COGNOME | | NOME | | Matr. | |

Analisi Matematica II (EA)

1 febbraio 2012

Esercizio 1. (7 punti)
Determinare il valore del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ per cui è conservativo il campo vettoriale

$$\mathbf{v}(x,y) = (x^{2\alpha}(x^2+y^2), y^{2\alpha}(x^2+y^2)) \ , \quad x>0 \ , \ y>0 \ .$$

Per quel valore di α: determinare un potenziale di $\mathbf{v}$; calcolare l'integrale curvilineo di $\mathbf{v}$ sul grafico di $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$, $x \in [1,2]$, (percorso nel verso crescente delle x).

Risultati: $\boxed{\alpha = 1/2}$ $\boxed{\varphi(x,y) = \frac{1}{4}(x^2+y^2)^2 + k}$ $\boxed{\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{\ell} = \frac{21}{4}\,.}$

Calcoli:

L'insieme $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0, y>0\}$ è semplicemente connesso: dunque se $\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial x}$ il campo è conservativo. Si ha

$$\frac{\partial V_2}{\partial x} = 2x\,y^{2\alpha} \ , \ \frac{\partial V_1}{\partial y} = 2y\,x^{2\alpha} \ \Rightarrow \ y^{2\alpha-1} = x^{2\alpha-1} \ \text{solo se } \alpha = 1/2 .$$

$\Downarrow$ imponendo $2xy^{2\alpha} = 2yx^{2\alpha}$

In conclusione, se $\alpha = 1/2$ il campo $\vec{v}$ è conservativo.

Per determinarne un potenziale φ integriamo la relazione $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = v_1 = x(x^2+y^2)$. Si ha

$$\varphi(x,y) = \int x(x^2+y^2)\,dx + c(y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}y^2 + c(y) .$$

Poi imponendo $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = v_2 = y(x^2+y^2)$:

$$y(x^2+y^2) = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = x^2y + c'(y) \Rightarrow c'(y) = y^3 \Rightarrow c(y) = \frac{y^4}{4} + k .$$

In conclusione: $\varphi(x,y) = \frac{1}{4}(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) + k = \frac{1}{4}(x^2+y^2)^2 + k.$

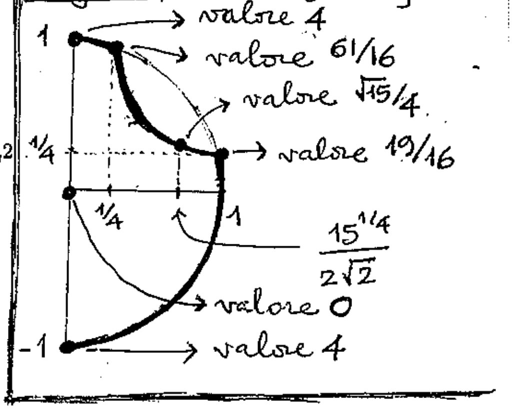
Siccome $\vec{v}$ è conservativo, l'integrale curvilineo si ottiene facendo la differenza del potenziale φ negli estremi della curva, cioè, indicando con $\vec{\gamma}(x) = (x, f(x))$, $x\in[1,2]$ la curva in questione,

$$\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{\ell} = \varphi(2,f(2)) - \varphi(1,f(1)) = \varphi(2,1) - \varphi(1,1) = \frac{1}{4}(25-4) = \frac{21}{4} .$$

Esercizio 2. (7 punti)
Determinare il massimo assoluto e il minimo assoluto di $g(x,y) = x^2 + 4y^2$ nell'insieme

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \le 1, xy \le \sqrt{15}/16\}.$$

Figura di $K \cap \{x \geq 0\} = K^+$:



Risultato: $\boxed{\begin{array}{l}\text{Max. assoluto: } 4, \text{ in } (0,1) \text{ e } (0,-1).\\ \text{Min. assoluto: } 0, \text{ in } (0,0).\end{array}}$

Calcoli:

Intersecando l'iperbole $xy = \sqrt{15}/16$ con la circonferenza $x^2+y^2=1$ si ottiene:

$$x^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{16}\frac{1}{x}\right)^2 = 1 \iff x^2 + \frac{15}{256x^2} - 1 = 0 \iff x^4 - x^2 + \frac{15}{256} = 0,$$

quindi

$$x^2 = \frac{1 \mp \sqrt{1 - 15/64}}{2} = \frac{1 \mp \sqrt{49/64}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 1/16 \\ 15/16 \end{array}\right. \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x = \pm 1/4 \to y = \pm\sqrt{15}/4 \\ x = \pm\frac{\sqrt{15}}{4} \to y = \pm 1/4. \end{array}\right.$$

Siccome l'insieme K è simmetrico rispetto alla riflessione $(x,y) \to -(x,y)$, e altrettanto è la funzione f, possiamo ridurci a $K^+ = K \cap \{x \geq 0\}$, oppure, nello studio sul bordo di K, ridurci a $(\partial K)^+ = \partial K \cap \{x \geq 0\}$.

Determiniamo i punti stazionari interni a K: si ha

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 8y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (0,0), \text{ interno a } K.$$

Siccome $f(x,y) \geq 0$ e $f(0,0) = 0$, $(0,0)$ è punto di minimo assoluto e il valore di <u>minimo assoluto</u> è <u>0</u>.

Essendo f di classe C^1 (è un polinomio...), è sufficiente controllare f su ∂K: per le ragioni di simmetria, lo facciamo su $\partial K \cap \{x \geq 0\}$. Consideriamo quindi i due pezzi di circonferenza dati da $(\sqrt{1-y^2}, y)$, $y \in [-1, 1/4]$ e $y \in [\sqrt{15}/4, 1]$. In questa zona la funzione f vale: $f(\sqrt{1-y^2}, y) = 1 - y^2 + 4y^2 = 1 + 3y^2$, quindi decresce per $y<0$ e cresce per $y>0$. Di conseguenza, ci interessano solo i valori negli estremi $y=-1$, $y = 1/4$, $y = \sqrt{15}/4$, $y=1$. Si ha

$$f(0,-1) = 4, \quad f(1/4, \sqrt{15}/4) = \frac{1}{16} + \frac{15}{4} = \frac{61}{16}, \quad f(\sqrt{15}/4, 1/4) = \frac{15}{16} + \frac{1}{4} = \frac{19}{16}, \quad f(0,1) = 4.$$

Resta da analizzare f sul pezzo di iperbole $(x, \sqrt{15}/16x)$, $x \in [1/4, \sqrt{15}/4]$.

Si ha $f(x, \sqrt{15}/16x) = x^2 + 4 \cdot \frac{15}{256x^2} = x^2 + \frac{15}{64x^2}$, e la derivata prima di questa funzione vale $2x - \frac{15}{32x^3}$ e si annulla per $x = \frac{15^{1/4}}{2\sqrt{2}} \in \left[\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}\right]$.

Calcolando $x^2 + \frac{15}{64x^2}$ per $x = 15^{1/4}/2\sqrt{2}$ viene il valore $\sqrt{15}/4$ (<4).

Il valore di <u>massimo assoluto</u> è dunque <u>4</u>, in $(0,1)$ e $(0,-1)$.

Esercizio 3. (8 punti)
Si calcoli il volume dell'insieme

$$Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq x^2+y^2+1, 0 \leq z \leq (x-1)^2+y^2+1\}.$$

Risultato: $\boxed{V = \frac{11}{6}\pi - \frac{3}{4}\sqrt{3}.}$

Calcoli:

L'intersezione fra le due superfici $z = x^2+y^2+1$ e $z=(x-1)^2+y^2+1$ si ha per $x^2+y^2+1 = (x-1)^2+y^2+1$, cioè per $2x-1=0$, ossia $x = 1/2$.

Quindi quando (x,y) appartengono al cerchio $x^2+y^2 \leq 1$ con $x \leq 1/2$ si ha $x^2+y^2+1 \leq (x-1)^2+y^2+1$ [il "tetto" sopra la testa è dato da $z = x^2+y^2+1 \ldots$]; quando (x,y) appartengono al cerchio $x^2+y^2 \leq 1$ con $x \geq 1/2$ si ha $(x-1)^2+y^2+1 \leq x^2+y^2+1$ [il "tetto" sopra la testa è dato da $z = (x-1)^2+y^2+1 \ldots$].

Il volume richiesto è dunque dato da (integrando "per fili"...):

$$V = \iint_{\left\{ \substack{x^2+y^2 \leq 1 \\ x \leq 1/2} \right\}} dx\,dy \int_0^{x^2+y^2+1} dz + \iint_{\left\{ \substack{x^2+y^2 \leq 1 \\ x \geq 1/2} \right\}} dx\,dy \int_0^{(x-1)^2+y^2+1} dz = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2+y^2+1)\,dx\,dy +$$

$$+ \iint_{\left\{ \substack{x^2+y^2 \leq 1 \\ x \geq 1/2} \right\}} (1-2x)\,dx\,dy = V_1 + V_2.$$

Usando le coordinate polari, $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$, si ha

$$V_1 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (\rho^2+1)\rho\, d\rho = 2\pi \int_0^1 (\rho^3+\rho)\,d\rho = 2\pi\left(\frac{\rho^4}{4}+\frac{\rho^2}{2}\right)\Big|_{\rho=0}^{\rho=1} = \frac{3\pi}{2}.$$

Intersecando $x^2+y^2=1$ e $x = 1/2$ si trova $y = \pm\sqrt{3}/2$, e l'angolo corrispondente alle semirette passanti per $(1/2, \pm\sqrt{3}/2)$ è $\pm\pi/3$.

Dunque, sempre in coordinate polari, per cui $x = 1/2$ corrisponde a $\rho = \frac{1}{2\cos\theta}$

$$V_2 = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} d\theta \int_{1/2\cos\theta}^{1} \rho(1-2\rho\cos\theta)\,d\rho = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} d\theta \left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{2}{3}\rho^3\cos\theta\right)\Big|_{\rho=1/2\cos\theta}^{\rho=1} =$$

$$= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8\cos^2\theta} - \frac{2}{3}\cos\theta + \frac{1}{12\cos^2\theta}\right) d\theta = \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}\,\mathrm{sen}\,\theta\Big|_{\theta=-\pi/3}^{\theta=\pi/3} - \frac{1}{24}\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{24}\,\mathrm{tg}\,\theta\Big|_{\theta=-\pi/3}^{\theta=\pi/3} = \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{12}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{3}{4}\sqrt{3}.$$

Quindi $V = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3} - \frac{3}{4}\sqrt{3} = \frac{11}{6}\pi - \frac{3}{4}\sqrt{3}.$

Esercizio 4. (8 punti)
Si calcoli l'area della superficie di rotazione ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z la semicirconferenza di parametrizzazione $x = 1 + \cos\psi$, $z = 1 + \sin\psi$, $\psi \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Risultato: $A = 2\pi(\pi + 2)$.

Calcoli:

Nel piano (x,z), x rappresenta la distanza dall'asse di rotazione z. Dunque, chiamando ρ la distanza dall'asse di rotazione, si ha $\rho = 1 + \cos\psi$, e quindi una parametrizzazione della superficie di rotazione assegnata è

$$\vec{r}(\theta,\psi) = \begin{cases} x = \rho\cos\theta = (1+\cos\psi)\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta = (1+\cos\psi)\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = 1 + \mathrm{sen}\,\psi \end{cases}, \quad \psi \in [-\pi/2, \pi/2],\ \theta \in [0, 2\pi]$$

Si ha $\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = (-(1+\cos\psi)\,\mathrm{sen}\,\theta, (1+\cos\psi)\cos\theta, 0)$, $\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\psi} = (-\mathrm{sen}\,\psi\cos\theta, -\mathrm{sen}\,\psi\,\mathrm{sen}\,\theta, \cos\psi)$, per cui

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial\psi} = ((1+\cos\psi)\cos\theta\cos\psi, (1+\cos\psi)\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\psi, (1+\cos\psi)\,\mathrm{sen}\,\psi),$$

$$\left\| \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial\psi} \right\| = (1+\cos\psi)\sqrt{\cos^2\theta\cos^2\psi + \mathrm{sen}^2\theta\cos^2\psi + \mathrm{sen}^2\psi} = 1 + \cos\psi.$$

L'area richiesta è quindi data da:

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\psi \int_0^{2\pi} d\theta\, (1+\cos\psi) = 2\pi\left(\pi + \mathrm{sen}\,\psi \Big|_{\psi=-\pi/2}^{\psi=\pi/2}\right) = 2\pi(\pi+2).$$

Altra via: stiamo facendo ruotare la semicirconferenza di centro $(1,1)$ e raggio 1, con $x \geq 1$. Questa è il grafico di $f(z) = 1 + \sqrt{1-(z-1)^2}$, $z \in [0,2]$ (ha equazione $(x-1)^2 + (z-1)^2 = 1$, da cui $x - 1 = \sqrt{1-(z-1)^2} \dots$).

Quindi l'area è data da ($x = f(z)$ è la distanza dall'asse di rotazione...)

$$A = \int_0^2 2\pi f(z)\sqrt{1+[f'(z)]^2}\,dz = 2\pi\int_0^2 \left(1+\sqrt{1-(z-1)^2}\right)\sqrt{1 + \frac{(z-1)^2}{1-(z-1)^2}}\,dz =$$

$$= 2\pi\int_0^2 \left(1+\sqrt{1-(z-1)^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-(z-1)^2}}\,dz = 2\pi\left(2 + \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1-(z-1)^2}}\,dz\right) =$$

$$= 2\pi\left(2 + \mathrm{arcsen}\,(z-1)\Big|_{z=0}^{z=2}\right) = 2\pi\left(2 + \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\pi(2+\pi).$$