COGNOME NOME Matr.

Analisi Matematica II (EA)

20 dicembre 2011

Esercizio 1 (7 punti)

Si determini per quale valore di $\alpha \in \mathbf{R}$ il campo vettoriale

$$\mathrm{v}(x,y) = (1 + y^\alpha - 2xy, 2y + 2xy - x^\alpha)$$

è irrotazionale nel quadrante $Q = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x > 0, y > 0\}$. Se possibile, se ne determini quindi un potenziale.

Risultati: $\boxed{\alpha = 2.}$ $\boxed{\varphi(x,y) = x + y^2x - xy^2 + y^2 + c.}$

Calcoli:

Calcoliamo le derivate incrociate: $\dfrac{\partial v_1}{\partial y} = \alpha y^{\alpha-1} - 2x$, $\dfrac{\partial v_2}{\partial x} = 2y - \alpha x^{\alpha-1}$, per cui uguagliando

$$\alpha y^{\alpha-1} - 2x = 2y - \alpha x^{\alpha-1} \iff \alpha x^{\alpha-1} - 2x = 2y - \alpha y^{\alpha-1},$$

e questo deve essere vero per ogni $(x,y) \in Q$. Scegliendo $x=1$, $y=1$ si ha $\alpha - 2 = 2 - \alpha$, cioè $2(\alpha-2) = 0$, cioè $\alpha = 2$. Si vede poi immediatamente che per $\alpha = 2$ si ha $\alpha y^{\alpha-1} - 2x = 2y - 2x$, $2y - \alpha x^{\alpha-1} = 2y - 2x$, quindi $\dfrac{\partial v_1}{\partial y} = \dfrac{\partial v_2}{\partial x}$ per ogni $(x,y) \in Q$.

Siccome l'insieme Q è semplicemente connesso (è un quadrante ...), siamo certi che per $\alpha = 2$ il campo v è conservativo.

Per determinare un potenziale φ si deve avere

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \underbrace{1 + y^2 - 2xy}_{v_1(x,y)} \Rightarrow \varphi(x,y) = x + y^2x - x^2y + g(y),$$

e ancora

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2yx - x^2 + g'(y) = \underbrace{2y + 2xy - x^2}_{v_2(x,y)} \Rightarrow g'(y) = 2y \Rightarrow g(y) = y^2 + c.$$

Quindi

$$\varphi(x,y) = x + y^2x - x^2y + y^2 + c.$$

Esercizio 2 (7 punti)

Si determini il polinomio di secondo grado $P(x) = a + bx + cx^2$ che nell'intervallo $[-1, 1]$ ha distanza minima da $F(x) = x^3+1$ (cioè, si determinino i valori dei coefficienti a, b, c per cui $P(x) = a+bx+cx^2$ minimizza $\int_{-1}^{1}[P(x) - F(x)]^2\, dx$).

Risultato: $\boxed{P(x) = 1 + 3/5\, x .}$

Calcoli:

Per chi ricorda la teoria, le incognite a, b, c sono le soluzioni del sistema lineare $(i,j = 0,1,2)$:

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{f} \quad , \quad A_{ij} = \int_{-1}^{1} x^{i+j}\, dx = \begin{cases} 0 & \text{per } i+j \text{ dispari} \\ 2 & \text{per } i=j=0; \\ 2/3 & \text{per } i=j=1;\ i=0, j=2;\ j=0, i=2; \\ 2/5 & \text{per } i=2, j=2. \end{cases}$$

$$f_0 = \int_{-1}^{1}(x^3+1)\,dx = 2 \quad , \quad f_1 = \int_{-1}^{1}(x^3+1)\,x\,dx = 2/5$$

$$f_2 = \int_{-1}^{1}(x^3+1)\,x^2\,dx = 2/3 .$$

Dunque si ha

$$\begin{cases} 2a + 2/3\, c = 2 \\ 2/3\, b = 2/5 \\ 2/3\, a + 2/5\, c = 2/3 \end{cases} \begin{array}{l} a = 1 - 1/3\, c \\ \to b = 3/5 \\ 2/3(1 - 1/3\, c) + 2/5\, c = 2/3 \to 2(1/5 - 1/9)c = 0 \to c = 0 \end{array}$$

$$a = 1 - 1/3\, c = 1 .$$

La soluzione è dunque $P(x) = 1 + 3/5\, x$.

Altrimenti, si impone l'annullarsi del gradiente rispetto ad a, b, c:

$$0 = \frac{\partial}{\partial a}\left[\int_{-1}^{1}(a+bx+cx^2-x^3-1)^2 dx\right] = \int_{-1}^{1} 2(a+bx+cx^2-x^3-1)\,dx = 4a + 4/3\, c - 4$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial b}\left[\int_{-1}^{1}(a+bx+cx^2-x^3-1)^2 dx\right] = \int_{-1}^{1} 2(a+bx+cx^2-x^3-1)\,x\,dx = 4/3\, b - 4/5$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial c}\left[\int_{-1}^{1}(a+bx+cx^2-x^3-1)^2 dx\right] = \int_{-1}^{1} 2(a+bx+cx^2-x^3-1)\,x^2\,dx = 4/3\, a + 4/5\, c - 4/3$$

e dunque il sistema lineare è lo stesso di prima, e ha come soluzione $a = 1$, $b = 3/5$, $c = 0$, che dà $P(x) = 1 + 3/5\, x$.

Oppure, calcolate "brutalmente"

$$\int_{-1}^{1}(a+bx+cx^2-x^3+1)^2 dx = 2a^2 + 2/3\, b^2 + 2/5\, c^2 + 4/3\, ac - 4a - 4/5\, b - 4/3\, c + 16/7 ,$$

e annullate il gradiente rispetto ad a, b, c.

Esercizio 3 (8 punti)
Si calcoli

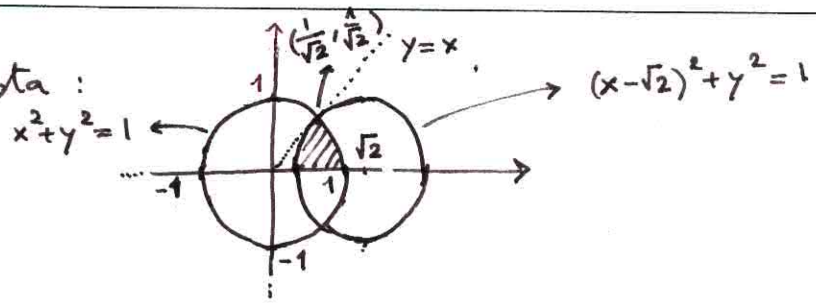
$$\iint_A \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy\,,$$

ove A è la regione contenuta nel semipiano $\{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \,|\, y\geq 0\}$ e compresa fra il cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 1 e il cerchio di centro $(\sqrt{2},0)$ e raggio 1.

Risultato: $(2-\sqrt{2})/6$.

Calcoli:

La figura è questa :



Intersecando i due cerchi si ha

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 & \to\ y^2=1-x^2 \\ (x-\sqrt{2})^2+y^2=1 & (x-\sqrt{2})^2+1-x^2=1 \to \cancel{x^2}-2\sqrt{2}x+2-\cancel{x^2}=0 \to x=1/\sqrt{2} \end{cases}$$

$$y^2=1-x^2=1-\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2}\to y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Utilizzando le coordinate polari, $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta$, si vede che nell'insieme A si ha $\theta\in[0,\pi/4]$, mentre $\rho\in[\rho_*(\theta),1]$, ove $\rho_*(\theta)$ si determina inserendo $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta$ nell'equazione $(x-\sqrt{2})^2+y^2=1$: quindi

$$\rho^2\cos^2\theta-2\sqrt{2}\rho\cos\theta+2+\rho^2\sin^2\theta=1 \iff \rho^2-2\sqrt{2}\rho\cos\theta+1=0 \iff$$

$$\iff \rho=\sqrt{2}\cos\theta\pm\sqrt{2\cos^2\theta-1}\,.$$

La radice da scegliere è $\rho_*(\theta)=\sqrt{2}\cos\theta-\sqrt{2\cos^2\theta-1}$, perché la semiretta di angolo θ interseca la circonferenza di centro $(\sqrt{2},0)$ in due punti, e quello da considerare è quello di valore più piccolo.

In conclusione :

$$\iint_A \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy=\int_0^{\pi/4}d\theta\left[\int_{\sqrt{2}\cos\theta-\sqrt{2\cos^2\theta-1}}^{1}\mathrm{sen}\,\theta\,\rho\,d\rho\right]=$$

$$=\int_0^{\pi/4}\left[\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{1}{2}\left(1-2\cos^2\theta-2\cos^2\theta+1+2\sqrt{2}\cos\theta\sqrt{2\cos^2\theta-1}\right)\right]d\theta=$$

$$=\int_0^{\pi/4}\mathrm{sen}\,\theta\left(1-2\cos^2\theta+\sqrt{2}\cos\theta\sqrt{2\cos^2\theta-1}\right)d\theta=$$

$$=-\cos\theta\Big|_0^{\pi/4}+\frac{2}{3}\cos^3\theta\Big|_0^{\pi/4}-\sqrt{2}\,\frac{1}{6}\left(2\cos^2\theta-1\right)^{3/2}\Big|_0^{\pi/4}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}+1+\frac{1}{3\sqrt{2}}-\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{2}}{6}(-1)=\frac{2-\sqrt{2}}{6}\,.$$

Esercizio 4 (8 punti)

Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\mathbf{v}(x,y,z) = (x+y, x-2y, 3z+x)$ attraverso la superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = \sqrt{x^2+y^2}, z \leq 1\}$ (scegliendo il versore normale che punti verso il basso).

Risultato: $\boxed{\text{flusso} = \iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\, dS = -7/3\,\pi.}$

Calcoli:

La normale $\vec{N}$ su S è data da $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right)$.

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

[Non è il versore, ma per un flusso non importa..., perché $dS = \|\vec{N}\|\, dx\, dy$...].

Il vincolo $z \leq 1$ dice che $\sqrt{x^2+y^2} \leq 1$, cioè $x^2+y^2 \leq 1$. La superficie S si può quindi parametrizzare con $x=x$, $y=y$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$ e $(x,y) \in C$, il cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 1.

In conclusione, il flusso richiesto è dato da:

$$\iint_C \left(x+y, x-2y, 3\sqrt{x^2+y^2}+x\right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right) dx\, dy =$$

$$= \iint_C \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 3\sqrt{x^2+y^2} - x\right) dx\, dy =$$

[coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho \operatorname{sen}\theta$]

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \left[\int_0^1 \left(\rho\cos^2\theta + 2\rho\cos\theta\operatorname{sen}\theta - 2\rho\operatorname{sen}^2\theta - 3\rho - \rho\cos\theta\right)\rho\, d\rho\right] =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \left(\frac{1}{3}\cos^2\theta + \frac{1}{3}\operatorname{sen}(2\theta) - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^2\theta - 1 - \frac{1}{3}\cos\theta\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi - \frac{2}{3}\pi - 2\pi = -\frac{7}{3}\pi.$$