COGNOME   NOME   Matr.

Analisi Matematica II (EA)

21 dicembre 2010

Esercizio 1 (7 punti)

Si calcoli l'area della parte del cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 2 che sta al di sopra della retta che congiunge i punti $(-2,0)$ e $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

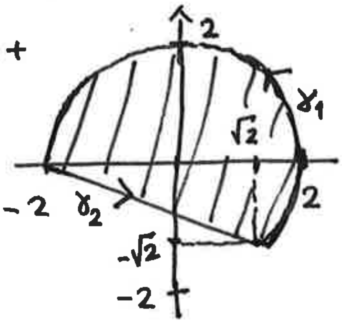
Risultato: $\boxed{\frac{5\pi}{2}+\sqrt{2}}$

Calcoli:

La retta che congiunge $(-2,0)$ e $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ è data da $y=-\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}(x+2)$.

Area = area mezzo cerchio + area triangolo + $\int_{\sqrt{2}}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} dy =$

$= 2\pi + \sqrt{2}\cdot(2+\sqrt{2})\frac{1}{2} + \int_{\sqrt{2}}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} dy =$ calcolare per esercizio...



$$\text{Area} = \int_{-2}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}(x+2)}^{\sqrt{4-x^2}} dy + \int_{\sqrt{2}}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy =$$

= calcolare per esercizio...

Con Gauss - Green: $\vec{\gamma}_1(t) = (2\cos t, 2\sin t)$, $t\in[-\pi/4,\pi]$ e

$\vec{\gamma}_2(t) = \left(t, -\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}(t+2)\right)$, $t\in[-2,\sqrt{2}]$.

Dunque, essendo $\vec{\gamma}_1{}' = (-2\sin t, 2\cos t)$, $\vec{\gamma}_2{}' = \left(1, -\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)$,

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\int_{\gamma_1\cup\gamma_2} (-y,x)\cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi} (-2\sin t, 2\cos t)\cdot(-2\sin t, 2\cos t)\,dt +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-2}^{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}(t+2), t\right)\cdot\left(1, -\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right) dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi} (4\sin^2 t + 4\cos^2 t)\,dt +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-2}^{\sqrt{2}} \left[\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}(t+2) - \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}t\right] dt = \frac{4}{2}\left(\pi+\pi/4\right) + \frac{2}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\cdot(\sqrt{2}+2) =$$

$$= \frac{5\pi}{2} + \sqrt{2}.$$

Esercizio 2 (7 punti)
Si calcoli l'area della superficie di rotazione ottenuta ruotando attorno all'asse x il grafico

$$G = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 1\,,\, y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right\}.$$

Risultato: $\boxed{\pi\left(1 + \frac{e^2}{4} - \frac{e^{-2}}{4}\right).}$

Calcoli:

L'area è data dalla formula $A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$ (per una funzione $f(x) \geq 0$).

[Infatti si può parametrizzare a questo modo, essendo $f(x)$ la distanza dall'asse x:

$$\vec{r}(x,\theta) = \begin{cases} x = x \\ y = f(x)\cos\theta \\ z = f(x)\sin\theta \end{cases} \qquad x \in [a,b],\ \theta \in [0,2\pi],$$

e risulta $\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right\| = f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}$.]

Dunque

$$A = 2\pi \int_0^1 \frac{e^x+e^{-x}}{2}\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx = 2\pi \int_0^1 \frac{e^x+e^{-x}}{2}\sqrt{\frac{4+e^{2x}+e^{-2x}-2}{4}}\,dx =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \frac{e^x+e^{-x}}{2}\sqrt{\frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4}}\,dx = 2\pi \int_0^1 \frac{e^x+e^{-x}}{2}\,\frac{\sqrt{(e^x+e^{-x})^2}}{2}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^1 (e^x+e^{-x})^2\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^1 (e^{2x}+2+e^{-2x})\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_{x=0}^{x=1} + 2 - \frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_{x=0}^{x=1}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}e^2 - \cancel{\frac{1}{2}} + 2 - \frac{1}{2}e^{-2} + \cancel{\frac{1}{2}}\right] = \pi\left(1+\frac{e^2}{4} - \frac{e^{-2}}{4}\right).$$

Esercizio 3 (8 punti)
Si calcoli il volume della parte del cilindro infinito

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2 + 4y^2 \le 1\,,\, z \in \mathbf{R}\}$$

che è **compresa** fra i piani $z = 1$ e $x + y + z = 1$.

Risultato: $\boxed{\sqrt{5}/3}$

Calcoli:

La base del cilindro K è un'ellisse E, di semiassi 1 e 1/2. Intersecando i piani troviamo la retta $x+y=0$, dunque per $x+y>0$ il piano $z=1$ è più alto del piano $x+y+z=1$, mentre per $x+y<0$ accade viceversa.

Il volume richiesto è dato da per simmetria...

$$V = \iint_{E\cap\{x+y>0\}} dx\,dy\left(\int_{1-x-y}^{1} dz\right) + \iint_{E\cap\{x+y<0\}} dx\,dy\left(\int_{1}^{1-x-y} dz\right) =$$

$$= 2\iint_{E\cap\{x+y>0\}} (x+y)\,dx\,dy.$$

(*) In coordinate ellittiche, θ non è l'angolo formato dalla semiretta che congiunge il punto con l'origine e dal semiasse positivo delle ascisse!!

Passiamo in coordinate ellittiche: $x = \rho\cos\theta$, $y = \frac{1}{2}\rho\,\mathrm{sen}\,\theta$, con jacobiano $\frac{1}{2}\rho$. La variazione di ρ è fra 0 e 1, mentre quella di θ va precisata (*). I punti di intersezione di $x+y=0$ con l'ellisse sono dati dalla soluzione di $y^2+4y^2=1$, cioè $y=\mp\frac{1}{\sqrt5}$, cui corrisponde $x=\pm\frac{1}{\sqrt5}$. L'angolo θ_1 corrispondente a $\left(+\frac{1}{\sqrt5}, -\frac{1}{\sqrt5}\right)$ è dunque dato da $+\frac{1}{\sqrt5} = \cos\theta_1$, $-\frac{2}{\sqrt5} = \mathrm{sen}\,\theta_1$; l'angolo θ_2 corrispondente a $\left(-\frac{1}{\sqrt5}, \frac{1}{\sqrt5}\right)$ è dato da $\frac{-1}{\sqrt5} = \cos\theta_2$, $\frac{2}{\sqrt5} = \mathrm{sen}\,\theta_2$. [Volendo, ma non è necessario: $\theta_1 = -\mathrm{arctg}\,2$, $\theta_2 = \pi - \mathrm{arctg}\,2$ ...]

L'integrale richiesto è dunque

$$\frac{1}{2}V = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_0^1 \frac{1}{2}\rho\left(\rho\cos\theta + \frac{1}{2}\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\right)d\rho = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta\left(\frac{1}{6}\rho^3\cos\theta + \frac{1}{12}\rho^3\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\Big|_{\rho=0}^{\rho=1} =$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2}\left(\frac{1}{6}\cos\theta + \frac{1}{12}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)d\theta = \frac{1}{6}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\Big|_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} - \frac{1}{12}\cos\theta\,\Big|_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\mathrm{sen}\,\theta_2 - \mathrm{sen}\,\theta_1 - \frac{1}{2}\cos\theta_2 + \frac{1}{2}\cos\theta_1\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{\sqrt5} + \frac{2}{\sqrt5} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt5} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt5}\right) = \frac{\sqrt5}{6},$$

da cui $V = \sqrt5/3$.

Esercizio 4 (8 punti)

Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\mathbf{v}(x, y, z) = (x+y+z, x+y+z, x^2+y^2)$ attraverso la superficie laterale del cono ottenuto ruotando attorno all'asse z l'insieme

$$M = \{(x, z) \in \mathbf{R}^2 \,|\, z = 2x\,, 0 \leq z \leq 1\}\,.$$

[Si scelga il versore normale che punta verso il basso, cioè con terza componente negativa.]

Risultato: $\boxed{\dfrac{13\pi}{96}}$

Calcoli:

Il cono si può parametrizzare come grafico: $\vec{r}(x,y) = (x, y, 2\sqrt{x^2+y^2})$ (dire che nel piano (x,z) si ha $z = 2x$ vuol dire che z è il doppio della distanza dall'asse di rotazione; quindi in $\mathbb{R}^3$ si ha $z = 2\sqrt{x^2+y^2} \dots$); oppure in coordinate polari $\vec{R}(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta, 2\rho)$ (sapendo che z è il doppio della distanza dall'asse di rotazione...).

Usiamo questa seconda parametrizzazione. Calcoliamo $\dfrac{\partial\vec{R}}{\partial\rho} \times \dfrac{\partial\vec{R}}{\partial\theta}$:

$$\frac{\partial\vec{R}}{\partial\rho} \times \frac{\partial\vec{R}}{\partial\theta} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta & 2 \\ -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta & \rho\cos\theta & 0 \end{pmatrix} = (-2\rho\cos\theta, -2\rho\,\mathrm{sen}\,\theta, \rho).$$

Siccome si richiede che punti verso il basso, occorre cambiarlo di segno, e si ha $\vec{N} = (2\rho\cos\theta, 2\rho\,\mathrm{sen}\,\theta, -\rho)$.

Siccome z varia fra 0 e 1, ρ varia fra 0 e $1/2$; θ varia fra 0 e 2π.

L'integrale richiesto è (poiché $\vec{n} = \vec{N}/\|\vec{N}\|$ e $dS = \|\vec{N}\|\,d\rho\,d\theta \dots$)

$$\int_0^{1/2} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \left[(\rho\cos\theta + \rho\,\mathrm{sen}\,\theta + 2\rho,\ \rho\cos\theta + \rho\,\mathrm{sen}\,\theta + 2\rho,\ \rho^2) \cdot \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|} \|\vec{N}\| \right] =$$

$$= \int_0^{1/2} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \left(2\rho^2\cos^2\theta + 2\rho^2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + 4\rho^2\cos\theta + 2\rho^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + 2\rho^2\,\mathrm{sen}^2\theta + 4\rho^2\,\mathrm{sen}\,\theta - \rho^3\right)$$

$$= \int_0^{1/2} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \left[2\rho^2 + 4\rho^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + 4\rho^2(\mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta) - \rho^3 \right] =$$

$\downarrow$ poiché $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}\,\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\, d\theta = 0$

$$= 2\pi \int_0^{1/2} (2\rho^2 - \rho^3)\, d\rho =$$

$$= 2\pi \left(\frac{2}{3}\rho^3 - \frac{1}{4}\rho^4 \right)\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=1/2} = 2\pi\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{64}\right) =$$

$$= \frac{13\pi}{96}.$$