COGNOME ____________ NOME ____________ Matr. ________

Analisi Matematica 2 - 2a prova in itinere

21 dicembre 2016

Esercizio 1 (10 punti). Si consideri nel piano la curva di parametrizzazione:

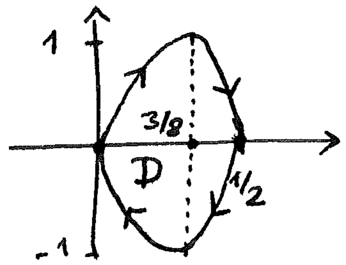
$$\vec{\alpha}(t) = (2(t - t^2), \sin(2\pi t)) \quad , \quad t \in [0, 1].$$

(i) Si mostri che la curva è chiusa.
(ii) Si disegni (approssimativamente) il suo sostegno, specificando l'orientazione.
(iii) Si calcoli l'area della regione di piano delimitata dal sostegno della curva.

Soluzione:

(i) Si ha $\vec{\alpha}(0) = (0,0)$, $\vec{\alpha}(1) = (2(1-1), \sin 2\pi) = (0,0)$, dunque la curva è chiusa.

(ii)



[Scale diverse in x e in y!

Per $0 \le t \le 1$, $t - t^2 = t(1-t) \ge 0$. Dunque $\alpha_1(t) \ge 0$. Poi $\sin(\pi - s) = -\sin(\pi + s)$, quindi $-\sin(2\pi(1/2 - t)) = \sin(2\pi(1/2 + t))$, cioè la seconda componente $\alpha_2(t)$ soddisfa $\alpha_2(1/2 + t) = -\alpha_2(1/2 - t)$. Si ha anche $\vec{\alpha}(1/2) = (1/2, 0)$, $\alpha_2(t) \ge 0$ per $t \in [0, 1/2]$, $\alpha_2(1/4) = 1$, $\alpha_1(1/4) = 3/8$.

(iii) L'area si può calcolare tramite il teorema di Green: dunque

$$A = \frac{1}{2} \int_{\partial^+ D} (-y, x) \cdot d\vec{r} = -\frac{1}{2} \int_0^1 (-\sin(2\pi t), 2(t - t^2)) \bullet (2 - 4t, 2\pi \cos(2\pi t))\, dt =$$

$\vec{\alpha}(t)$ ha il verso opposto a $\partial^+ D$! | $\vec{\alpha}'(t) = (2 - 4t, 2\pi \cos(2\pi t))$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 [4t \sin(2\pi t) - 2 \sin(2\pi t) + 4\pi t \cos(2\pi t) - 4\pi t^2 \cos(2\pi t)]\, dt =$$

$\int_0^1 \sin(2\pi t)\, dt = 0$

$$= -2 \int_0^1 [t \sin(2\pi t) + \pi (t - t^2) \cos(2\pi t)]\, dt =$$

$$= -2 \left[\int_0^1 t \sin(2\pi t)\, dt + \pi \left(\sin(2\pi t) \frac{1}{2\pi} (t - t^2) \Big|_0^1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \sin(2\pi t)(1 - 2t)\, dt \right) \right] =$$

$$= -2 \left[\int_0^1 t \sin(2\pi t)\, dt - \frac{1}{2} \int_0^1 \sin(2\pi t)\, dt + \int_0^1 \sin(2\pi t)\, t\, dt \right] =$$

$$= -4 \left[-\frac{1}{2\pi} \cos(2\pi t)\, t \Big|_0^1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \cos(2\pi t)\, dt \right] = 2/\pi .$$

$\int_0^1 \cos(2\pi t)\, dt = 0$

Esercizio 2 (10 punti). (i) Si calcoli $\iiint_V |z|\,dxdydz$, ove V è il solido di rotazione che si ottiene ruotando attorno all'asse Z la regione piana $D = \{(x,z) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 1+z^2 \le x \le 2\}$.
(ii) Si calcoli $\iiint_V z\,dxdydz$.

Soluzione:

(i) La regione piana D è contenuta nel piano $\{y=0\}$. In quel piano la coordinata x rappresenta la distanza dall'asse di rotazione Z. Dunque la relazione fra ρ, distanza dall'asse di rotazione, e z, quota, è $1+z^2 \le \rho \le 2$.

Utilizzando coordinate cilindriche $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, $z=z$, si ha $\theta\in[0,2\pi]$, $1+z^2\le\rho\le 2$, $-1\le z\le 1$ (poiché $1+z^2\le 2$ equivale a $z^2\le 1$, cioè $-1\le z\le 1$).

Siccome D (e il suo ruotato V) è simmetrico rispetto al piano $\{z=0\}$, si può calcolare

jacobiano!

$$\iiint_V |z|\,dxdydz = 2\iiint_{V^+ = V\cap\{z\ge 0\}} z\,dxdydz = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dz \int_{1+z^2}^2 \rho z\,d\rho =$$

$$= 2\cdot 2\pi \int_0^1 dz \left(z\,\frac{\rho^2}{2}\Big|_{1+z^2}^{2} \right) = 2\pi \int_0^1 z(4-1-2z^2-z^4)\,dz =$$

$$= 2\pi \int_0^1 (3z-2z^3-z^5)\,dz = 2\pi\left(\frac{3}{2}z^2-\frac{2}{4}z^4-\frac{1}{6}z^6\right)\Big|_0^1 =$$

$$= 2\pi\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right) = 2\pi\,\frac{5}{6} = \frac{5}{3}\pi.$$

(ii) Siccome V è simmetrico rispetto al piano $\{z=0\}$, e z è invece dispari rispetto a quel piano, si ha

$$\iiint_V z\,dxdydz = 0.$$

[Sviluppando i conti, si sarebbe arrivati a

$$\iiint_V z\,dxdydz = \iiint_{V^+} z\,dxdydz + \iiint_{V^-} z\,dxdydz = \iiint_{V^+} z\,dxdydz - \iiint_{V^+} w\,dxdydw = 0 \,]$$

$\hookrightarrow z=-w$, V^+ con $|\det \mathrm{Jac}\,\vec{T}|=1$!

Esercizio 3 (10 punti). (i) Si calcoli $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ (il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie S), ove $\vec{F}=(x-y,y,z-x)$ ed S è la parte della superficie $\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \,|\, z=2-x^2-y^2\}$ che sta al di sopra del piano $\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \,|\, z=1-2x\}$. [Si scelga la normale orientata verso l'alto.]
(ii) Si determini il piano tangente ad S nel punto $(1,0,1)$.

Soluzione:

(i) Intersechiamo la superficie S con il piano: si ha

$$\begin{cases} z=2-x^2-y^2 \\ z=1-2x \end{cases} \longrightarrow \quad x^2+y^2-2x-1=0 \iff (x-1)^2+y^2=2.$$

Dunque si può rappresentare S come un grafico $z=2-x^2-y^2$, con $(x,y)\in C$, e C è il cerchio di centro $(1,0)$ e raggio $\sqrt{2}$.

Il vettore normale $\vec{N}$ è dato da $\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$, essendo $f(x,y)=2-x^2-y^2$; quindi $\vec{N}=(2x,2y,1)$, e punta verso l'alto.

Il flusso vale:

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_C (x-y,\, y,\, 2-x^2-y^2-x)\cdot(2x,2y,1)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_C (2x^2-2xy+2y^2+2-x^2-y^2-x)\,dx\,dy =$$

polari "scentrate": $x=1+\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$

$$= \iint_C (x^2+y^2-2xy-x+2)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \rho\,d\rho \int_0^{2\pi} \big(\cancel{1}+2\rho\cos\theta+\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta-2\rho\sin\theta-2\rho^2\sin\theta\cos\theta - \cancel{1}-\rho\cos\theta+2\big)\,d\theta =$$

jacobiano!

$$\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\theta=0 \qquad \int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta=0 \qquad \int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\,d\theta=0$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \rho(\rho^2+2)\,d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\theta =$$

$$= 2\pi\left(\rho^2+\frac{\rho^4}{4}\right)\Big|_0^{\sqrt{2}} =$$

$$= 2\pi\left(2+\frac{4}{4}\right) = 6\pi.$$