ANALISI MATEMATICA 1 - Quarto appello	21 luglio 2020

1. (6 punti) Si disegni qualitativamente il grafico della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x^2+x+2} & \text{per } x < 0 \\ \frac{x-x^2-2}{4(x-1)} & \text{per } x \geq 0\,,\ x \neq 1\,. \end{cases}$$

In particolare si determinino i limiti per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$, gli eventuali asintoti obliqui, la continuità, la derivabilità, la crescenza/decrescenza, gli eventuali punti e valori di massimo relativo e assoluto, di minimo relativo e assoluto. [Non è richiesto lo studio di convessità/concavità.]

Si ha $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x^2+x+2} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-x^2-2}{4(x-1)} = -\infty$.

Poi $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{x-x^2-2}{4(x-1)} = +\infty$ (per $x=1$ il numeratore è uguale a -2...), e $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{x-x^2-2}{4(x-1)} = -\infty$. Dunque f non ha <u>né massimo assoluto, né minimo assoluto</u>. Altra informazione immediata: $f(-1)=0$.

Cerchiamo un eventuale asintoto obliquo per $x\to+\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-x^2-2}{4x(x-1)} = -1/4\,, \quad \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+\frac{1}{4}x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x-x^2-2}{4(x-1)}+\frac{1}{4}x\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4(x-1)}\left[\cancel{x}-\cancel{x^2}-2+\cancel{x^2}-\cancel{x}\right] = 0\,,$$

quindi $y = -\frac{1}{4}x$ è un <u>asintoto obliquo</u> per $x\to+\infty$.

f è continua per $x<0$ e $x>0$, $x\neq1$, essendo in quelle zone una funzione razionale (rapporto di polinomi). Per la stessa ragione, in quelle zone è anche derivabile.

Vediamo la continuità in 0: si ha $f(0) = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} = \lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 1/2$. Dunque <u>$f$ è continua per $x=0$.</u>

Calcoliamo f'. Per $x>0$ si ha

$$f'(x) = \left(\frac{x-x^2-2}{4(x-1)}\right)' = \frac{1}{4}\,\frac{(1-2x)(x-1)-x+x^2+2}{(x-1)^2} = \frac{x-1-2x^2+2x-x+x^2+2}{4(x-1)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{4(x-1)^2}\,,$$

per $x<0$ si ha

$$f'(x) = \left(\frac{x+1}{x^2+x+2}\right)' = \frac{x^2+x+2-(x+1)(2x+1)}{(x^2+x+2)^2} = \frac{x^2+x+2-2x^2-x-2x-1}{(x^2+x+2)^2} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+x+2)^2}\,.$$

Le radici di $-x^2+2x+1$ sono $x = +1\mp\sqrt{2}$, dunque f <u>cresce</u> per $0<x<1$ e $1<x<1+\sqrt{2}$, <u>decresce</u> per $x>1+\sqrt{2}$. Quindi $1+\sqrt{2}$ è punto di <u>massimo relativo</u>, e

$$f(1+\sqrt{2}) = \frac{1+\sqrt{2}-(1+\sqrt{2})^2-2}{4\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}-3-2\sqrt{2}-2}{4\sqrt{2}} = -\frac{4+\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = -\frac{1}{4}-\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Le radici di $-x^2-2x+1$ sono $x = -1\mp\sqrt{2}$, dunque f <u>cresce</u> per $-1-\sqrt{2}<x<0$ e <u>decresce</u> per $x<-1-\sqrt{2}$, per cui $-1-\sqrt{2}$ è punto di <u>minimo relativo</u> e vale

$$f(-1-\sqrt{2}) = \frac{-1-\sqrt{2}+1}{(-1-\sqrt{2})^2-1-\sqrt{2}+2} = -\frac{\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}-1-\sqrt{2}+2} = -\frac{\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}+1}\,.$$

ANALISI MATEMATICA 1 - Quarto appello	21 luglio 2020

1. (6 punti) Si disegni qualitativamente il grafico della funzione

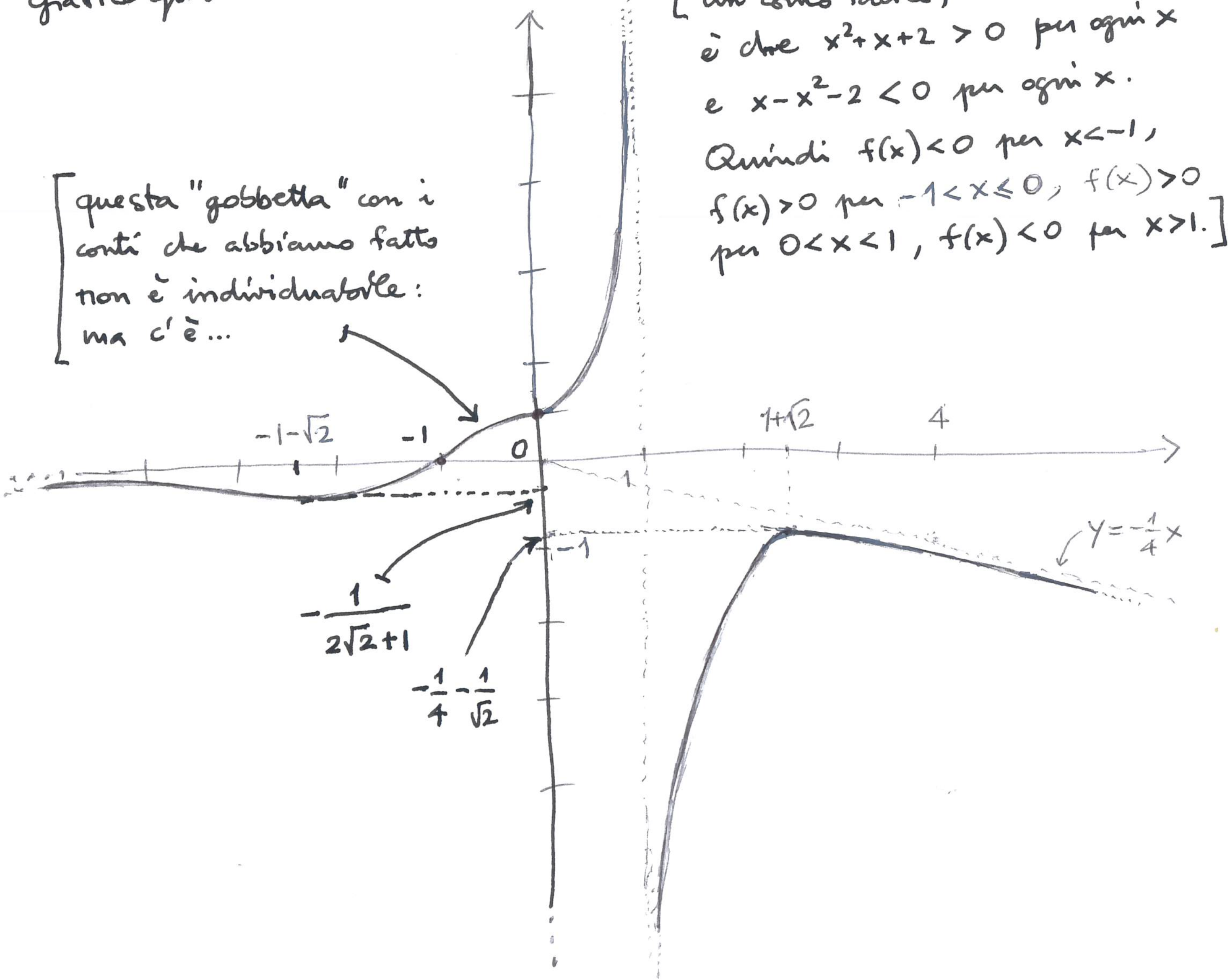
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x^2+x+2} & \text{per } x < 0 \\ \frac{x-x^2-2}{4(x-1)} & \text{per } x \geq 0\,,\ x \neq 1\,. \end{cases}$$

In particolare si determinino i limiti per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$, gli eventuali asintoti obliqui, la continuità, la derivabilità, la crescenza/decrescenza, gli eventuali punti e valori di massimo relativo e assoluto, di minimo relativo e assoluto. [Non è richiesto lo studio di convessità/concavità.]

Per quanto riguarda la derivabilità di f per $x=0$, sappiamo che è sufficiente che f sia continua per $x=0$ (già verificato) e che $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x)$. Si ha $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2+2x+1}{4(x-1)^2} = 1/4$,
$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+x+2)^2} = 1/4$, quindi f <u>è derivabile per $x=0$</u>.

Grafico qualitativo:

[Un conto facile, non richiesto, è che $x^2+x+2>0$ per ogni x e $x-x^2-2<0$ per ogni x. Quindi $f(x)<0$ per $x<-1$, $f(x)>0$ per $-1<x\leq 0$, $f(x)>0$ per $0<x<1$, $f(x)<0$ per $x>1$.]



[questa "gobbetta" con i conti che abbiamo fatto non è individuabile: ma c'è...]

ANALISI MATEMATICA 1 - Quarto appello	21 luglio 2020

2. (6 punti) Sia $a \in [0,1)$ ed S_a il segmento che congiunge i punti $(a, \sqrt{1-a^2})$ e $(1,0)$.
(i) Determinare l'area della superficie ottenuta facendo ruotare S_a attorno all'asse verticale Y.
(ii) Determinare $a \in [0,1)$ in modo che tale area sia massima.

(i) Il segmento S_a "scende" di $\sqrt{1-a^2}$ in un intervallo di lunghezza $(1-a)$. Dunque la pendenza è $-\frac{\sqrt{1-a^2}}{1-a}$. Siccome il segmento passa per $(1,0)$ (cioè deve avere quota 0 quando x è 1) la sua equazione è $y = -\frac{\sqrt{1-a^2}}{1-a}(x-1)$. [Comunque l'equazione di un segmento fra due punti bisognerebbe saperla ricavare...]

La formula per l'area della superficie ottenuta facendo ruotare il grafico di $f(x)$ per $x \in [A,B]$ attorno all'asse Y è data da

$$(*) \qquad A_a = 2\pi \int_A^B x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$

[formula illustrata e dimostrata a lezione; non l'avete nel vostro foglio A4?]

quindi nel nostro caso ($f'(x)$ dà la pendenza, dunque $-\frac{\sqrt{1-a^2}}{1-a}$...)

$$A_a = 2\pi \int_a^1 x\sqrt{1+\frac{1-a^2}{(1-a)^2}}\,dx \overset{1-a^2=(1-a)(1+a)}{=} 2\pi\sqrt{1+\frac{1+a}{1-a}}\int_a^1 x\,dx =$$

$$= 2\pi\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-a}}\,\frac{x^2}{2}\Big|_a^1 = \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{1-a}}(1-a^2) = \sqrt{2}\pi\sqrt{1-a}\,(1+a).$$

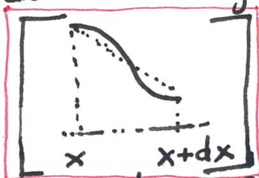
(ii) Calcoliamo la derivata rispetto ad a:

$$\frac{dA_a}{da} = \sqrt{2}\pi\left[\frac{1}{2\sqrt{1-a}}(-1)(1+a) + \sqrt{1-a}\right] = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1-a}}\left(-1-a+2(\sqrt{1-a})^2\right) =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}\sqrt{1-a}}(-1-a+2-2a) = \frac{\pi}{\sqrt{2}\sqrt{1-a}}(1-3a),$$

per cui A_a cresce per $1-3a>0$, cioè $a<1/3$, e per $a=1/3$ si ha il massimo.

(*) Perché è questa la formula? Prendiamo un pezzetto della curva fra x e $x+dx$: la sua lunghezza è circa, dal teorema di Pitagora, $\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$, ove $dy = f(x+dx) - f(x)$.



dy è il salto verticale, cioè
Dunque dy è (dal teorema di Lagrange)
$f'(c)dx$, con $x<c<x+dx$, quindi dy è circa $f'(x)dx$. La lunghezza del pezzetto di curva diventa allora circa $\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.
Questo pezzetto ruota per $2\pi x$ (x è la sua distanza dall'asse...), dunque (*).

ANALISI MATEMATICA 1 - Quarto appello	21 luglio 2020

3. (6 punti) Per $x > 0$ si determini la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{1}{x} y(x) + x \sin x \\ y(\pi) = \pi\,. \end{cases}$$

È un'equazione lineare del 1° ordine, non-omogenea. La formula risolutiva per l'equazione generale $y' + P(x)y = Q(x)$, $y(x_0) = y_0$ è

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} P(t)dt} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{+\int_{x_0}^{s} P(t)dt} Q(s)ds \right),$$

dunque in questo caso, essendo $P(x) = -\frac{1}{x}$, $x_0 = \pi$, $y_0 = \pi$, $Q(x) = x \sin x$,

$$y(x) = e^{\int_{\pi}^{x} 1/t\, dt} \left(\pi + \int_{\pi}^{x} e^{-\int_{\pi}^{s} 1/t\, dt} s \sin s\, ds \right) =$$

$$= e^{\log x - \log \pi} \left(\pi + \int_{\pi}^{x} e^{-\log s + \log \pi} s \sin s\, ds \right) =$$

$$e^{-\log s} = \frac{1}{e^{\log s}} = \frac{1}{s}$$

$$= \frac{x}{\pi} \left(\pi + \int_{\pi}^{x} \frac{\pi}{s} s \sin s\, ds \right) = x + x \int_{\pi}^{x} \sin s\, ds =$$

$$= x + x \left(-\cos s \Big|_{\pi}^{x} \right) = x + x(-\cos x + \cos \pi) =$$

$$= x - x\cos x - x = -x \cos x\,.$$