COGNOME [ ] NOME [ ] Matr. [ ]

Analisi Matematica II (EA)

23 giugno 2015

Esercizio 1 (7 punti). Si determini per quali valori dei parametri a, b e c il campo vettoriale $\vec{v}(x,y,z) = (ay + z - byz + 2x, x - 2cxz + by, ax - 2cxy)$ ha sia divergenza nulla che rotore nullo.

Risultato: $a=1$, $b=-2$, $c=-1$.

Calcoli:

Si ha

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 2+b = 0 \quad \text{per} \quad \underline{b=-2.}$$

Poi

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \det \begin{pmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ay+z-byz+2x & x-2cxz+by & ax-2cxy \end{pmatrix} =$$

$$= (\cancel{-2cx + 2cx})\vec{\imath} + (1-by-a+2cy)\vec{\jmath} + (1-2cz-a+bz)\vec{k} =$$

$$= (1-a+(2c-b)y)\vec{\jmath} + (1-a+(b-2c)z)\vec{k} = \vec{0} \quad \text{per} \quad \begin{cases} a=1 \\ b=2c \end{cases}.$$

Dunque si ha $\operatorname{div}\vec{v} = 0$ e $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$ per $\underline{a=1}$, $\underline{b=-2}$, $\underline{c=-1}$.

Esercizio 2 (8 punti). Si calcoli l'integrale curvilineo $\int_{\alpha} \vec{V} \cdot d\vec{l}$, ove $\vec{V} = (x + yz, y + xz, z)$ e la curva $\vec{\alpha}$ ha come sostegno la parte dell'intersezione delle superfici $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - y^2 + z = 1\}$ e $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z = 1\}$ contenuta nell'insieme $K = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x \geq 0, 0 \leq z \leq 1\}$. [Si scelga a piacere il verso di percorrenza di $\vec{\alpha}$.]

Risultato: $\boxed{\int_{\alpha} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = 2/3 .}$

Calcoli:

Intersecando S_1 ed S_2 si ha

$$\begin{cases} x - y^2 + z = 1 \\ x^2 + y^2 - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y^2 - z = x - 1 \\ x^2 + x - 1 = 1 \end{matrix} \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0,$$

e dunque $x = \frac{-1 \mp \sqrt{1+8}}{2} = \genfrac{}{}{0pt}{}{\nearrow -2}{\searrow 1}$.

Siccome si cerca una curva contenuta in K, si ha solo $x = 1$. Una parametrizzazione della curva $\vec{\alpha}$ è dunque data da $\vec{\alpha}(y) = (1, y, y^2)$ (inserendo $x = 1$ nelle equazioni che definiscono S_1 ed S_2 si ottiene $z = y^2$), con $y \in [-1, 1]$ (poiché in K si richiede $0 \leq z \leq 1$).

In conclusione, essendo $\vec{\alpha}'(y) = (0, 1, 2y)$,

$$\int_{\alpha} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \int_{-1}^{1} (1 + y^3, y + y^2, y^2) \cdot (0, 1, 2y) \, dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} (y + y^2 + 2y^3) \, dy = 2 \int_{0}^{1} y^2 dy = \frac{2}{3}.$$

$\downarrow$

[y e $2y^3$ sono dispari
y^2 è pari

Esercizio 3 (7 punti). (i) Si determinino i punti stazionari della funzione $f(x,y) = x^2y - 2xy - 3y + x$ e si stabilisca se sono di massimo relativo, minimo relativo o sella. (ii) Si determinino quindi il massimo assoluto e il minimo assoluto di f nell'insieme $Q = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \le x \le 1/2, 0 \le y \le 3/4\}$.

Risultati: $\boxed{(-1, 1/4), \text{ sella}; \ (3, -1/4), \text{ sella}}$ $\boxed{\max = \frac{1}{2} \text{ in } (\frac{1}{2}, 0); \ \min = -\frac{7}{3} \text{ in } (\frac{1}{3}, \frac{3}{4}).}$

Calcoli:

Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - 2y + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x=-1 : -4y+1=0, \ y = 1/4. \\ x=3 : 6y-2y+1=0, \ y=-1/4. \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = 1 \mp \sqrt{1+3} = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}.$$

I punti stazionari sono quindi $(-1, 1/4)$ e $(3, -1/4)$.

L'Hessiano vale

$$H = \begin{pmatrix} 2y & 2x-2 \\ 2x-2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ dunque } \begin{cases} H(-1, 1/4) = \begin{pmatrix} +1/2 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \\ H(3, -1/4) = \begin{pmatrix} -1/2 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

e siccome $\det H < 0$ in ambedue i casi si hanno due punti di <u>sella</u>.

Sul bordo di Q si ha:

$x=0$, $y \in [0, 3/4]$: $f(0,y) = -3y$, decrescente.

$x = 1/2$, $y \in [0, 3/4]$: $f(1/2, y) = \frac{1}{4}y - y - 3y + \frac{1}{2} = -\frac{15}{4}y + \frac{1}{2}$, decrescente.

$y=0$, $x \in [0, 1/2]$: $f(x, 0) = x$, crescente.

$y = 3/4$, $x \in [0, 1/2]$: $f(x, 3/4) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{4} + x = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{9}{4}$.

Calcolando la derivata di $\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{9}{4}$ si ottiene $\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$, che si annulla per $x = 1/3$. Bisogna dunque confrontare i valori:

$f(0,0) = 0$; $f(1/2, 0) = \frac{1}{2}$; $f(0, 3/4) = -\frac{9}{4}$; $f(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) = -\frac{37}{16}$;

$f(\frac{1}{3}, \frac{3}{4}) = -\frac{7}{3}$,

e si ottiene $1/2$ come <u>massimo</u> e $-\frac{7}{3}$ come <u>minimo</u>.

Esercizio 4 (8 punti). Si calcoli $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ (il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie S), ove $\vec{F}=(x,y,z^2)$ ed S è la superficie dell'ellissoide di semiassi 3 (lungo l'asse X), 2 (lungo l'asse Y) ed 1 (lungo l'asse Z). [Si scelga la normale orientata verso l'esterno dell'ellissoide.]

Risultato: $\boxed{\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = 16\pi.}$

Calcoli: 1° modo

Una parametrizzazione di S è data da $x = a\sin\varphi\cos\theta$, $y = b\sin\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z = c\cos\varphi$ (pensate alle coordinate sferiche in $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}$ ...), con $\varphi\in[0,\pi]$, $\theta\in[0,2\pi]$, $a=3$, $b=2$, $c=1$. Chiamiamola $\vec{T}(\varphi,\theta)$. Dunque

$$\frac{\partial\vec{T}}{\partial\varphi} = (3\cos\varphi\cos\theta,\ 2\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta,\ -\sin\varphi)$$

$$\frac{\partial\vec{T}}{\partial\theta} = (-3\sin\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 2\sin\varphi\cos\theta,\ 0)$$

e $\frac{\partial\vec{T}}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\vec{T}}{\partial\theta} = (2\sin^2\varphi\cos\theta,\ 3\sin^2\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 6\cos\varphi\sin\varphi) = \vec{N}$.

La direzione di $\vec{N}$ su S è verso l'esterno (per esempio, per $\varphi=\frac{\pi}{2}$ [equatore ...] e $\theta=0$ [sul meridiano di Greenwich...] vale $(2,0,0)$). Dunque bisogna calcolare:

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \int_0^\pi d\varphi\int_0^{2\pi} d\theta\,(3\sin\varphi\cos\theta,\ 2\sin\varphi\sin\theta,\ \cos^2\varphi)\cdot(2\sin^2\varphi\cos\theta,\ 3\sin^2\varphi\sin\theta,\ 6\cos\varphi\sin\varphi) =$$

$$= \int_0^\pi d\varphi\int_0^{2\pi} d\theta\,(6\sin^3\varphi\cos^2\theta + 6\sin^3\varphi\sin^2\theta + 6\cos^3\varphi\sin\varphi) =$$

$$= \int_0^\pi d\varphi\int_0^{2\pi} d\theta\,(6\sin^3\varphi + 6\cos^3\varphi\sin\varphi) =$$

$$= 12\pi\int_0^\pi\left[\sin\varphi(1-\cos^2\varphi) + \cos^3\varphi\sin\varphi\right]d\varphi =$$

$$= 12\pi\left(-\cos\varphi\Big|_0^\pi + \frac{1}{3}\cos^3\varphi\Big|_0^\pi - \frac{1}{4}\cos^4\varphi\Big|_0^\pi\right) = 12\pi\left(2-\frac{2}{3}\right) = 16\pi.$$

Esercizio 4 (8 punti). Si calcoli $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ (il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie S), ove $\vec{F} = (x, y, z^2)$ ed S è la superficie dell'ellissoide di semiassi 3 (lungo l'asse X), 2 (lungo l'asse Y) ed 1 (lungo l'asse Z). [Si scelga la normale orientata verso l'esterno dell'ellissoide.]

Risultato:

Calcoli:

2° modo: con il teorema della divergenza.

Si deve dunque calcolare $\iiint_E \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz$, dove E è l'ellissoide.

Si ha $\operatorname{div}\vec{F} = 1+1+2z = 2(1+z)$ e quindi

Jacobiano: $abc\rho^2\sin\varphi$

$$\iiint_E 2(1+z)\,dx\,dy\,dz \underset{\text{coordinate ellittiche}}{=} \int_0^1 d\rho \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta\; 2(1+\rho\cos\varphi)\, 6\rho^2\sin\varphi =$$

$$= 24\pi \int_0^1 d\rho \int_0^\pi d\varphi\, (\rho^2\sin\varphi + \rho^3\sin\varphi\cos\varphi) =$$

$$\int_0^1 \rho^2 d\rho = \frac{1}{3} \qquad \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{1}{4}$$

$$= 24\pi \int_0^\pi d\varphi\, \left(\frac{1}{3}\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin\varphi\cos\varphi\right) = 24\pi\left(-\frac{1}{3}\cos\varphi\Big|_0^\pi + \frac{1}{8}\sin^2\varphi\Big|_0^\pi\right) =$$

$$= 24\pi\,\frac{2}{3} = 16\pi.$$

[Ancora più breve: la funzione z è dispari, e l'ellissoide E è simmetrico rispetto a z. Dunque $\iiint_E z\,dx\,dy\,dz = 0$.

Allora

$$\iiint_E \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz = \iiint_E 2\,dx\,dy\,dz = 2\operatorname{vol}(E) =$$

$$= 2\cdot\frac{4}{3}\pi\underbrace{abc}_{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{48}{3}\pi = 16\pi.\ ]$$