COGNOME ________ NOME ________ Matr. ________

Analisi Matematica II (EA)

27 ottobre 2011

Esercizio 1 (7 punti)
Si determini se esiste finito il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^8+3y^4}{x^4+y^2}$$

e se esiste lo si calcoli.

Risultato: $\boxed{L = 0}$

Calcoli:

Si ha

$$0 \le \frac{x^8+3y^4}{x^4+y^2} = \frac{x^8}{x^4+y^2} + \frac{3y^4}{x^4+y^2} \le \frac{x^8}{x^4} + \frac{3y^4}{y^2} = x^4+3y^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$

poiché $x^4+y^2 \ge x^4$, $x^4+y^2 \ge y^2$

Dunque $\frac{x^8+3y^4}{x^4+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$.

Altra via: cerchiamo un candidato limite. Per $x=0$ si ha

$\left.\frac{x^8+3y^4}{x^4+y^2}\right|_{x=0} = 3y^2 \xrightarrow[y\to 0]{} 0$; dunque il candidato limite è 0.

[Ulteriore controllo: su ogni retta $y=kx$, $k\in\mathbb{R}$, si ha

$$\left.\frac{x^8+3y^4}{x^4+y^2}\right|_{y=kx} = \frac{x^8+3k^4x^4}{x^4+k^2x^2} = \frac{\cancelto{2}{x^4}(x^4+3k^4)}{\cancel{x^2}(x^2+k^2)} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 .\ ]$$

In coordinate polari abbiamo:

$$0 \le \frac{\rho^8\cos^8\theta + 3\rho^4 \operatorname{sen}^4\theta}{\rho^4\cos^4\theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta} = \frac{\cancelto{2}{\rho^4}(\rho^4\cos^8\theta + 3\operatorname{sen}^4\theta)}{\cancel{\rho^2}(\rho^2\cos^4\theta + \operatorname{sen}^2\theta)} .$$

Siccome si ha $\cos^8\theta \le \cos^4\theta$, $\operatorname{sen}^4\theta \le \operatorname{sen}^2\theta$, $\rho^4 \le \rho^2$ (per $\rho \le 1$),

si ha

$\rho^2\cos^4\theta \le 3\rho^2\cos^4\theta\ldots$

$$\rho^4\cos^8\theta + 3\operatorname{sen}^4\theta \le \rho^2\cos^4\theta + 3\operatorname{sen}^2\theta \le 3\left(\rho^2\cos^4\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right),$$

dunque

$$0 \le \frac{\rho^8\cos^8\theta + 3\rho^4\operatorname{sen}^4\theta}{\rho^4\cos^4\theta + \rho^2\operatorname{sen}^2\theta} \le 3\rho^2 \xrightarrow[\rho\to 0^+]{} 0 .$$

Esercizio 2 (7 punti)

Si determinino il versore tangente $\mathbf{T}(t)$, il versore normale $\mathbf{N}(t)$ e il versore binormale $\mathbf{B}(t)$ della curva

$$\alpha(t) = \left(t, \frac{1}{t}, t^2+1,\right), \quad t>0. \qquad K(t)=\sqrt{t^4+4t^6+1}\sqrt{9t^2+t^6+1}$$

Risultati: $\boxed{\vec{T}(t)=\dfrac{(t^2,-1,2t^3)}{\sqrt{t^4+4t^6+1}}}$ $\boxed{\vec{N}(t)=\dfrac{1}{K(t)}(-2t^6+1, 6t^4+t^2, 3t+t^5)}$ $\boxed{\vec{B}(t)=\dfrac{(-3t,-t^3,1)}{\sqrt{9t^2+t^6+1}}}$.

Calcoli:

Si ha $\vec{\alpha}'(t)=(1,-t^{-2},2t)$, $\|\vec{\alpha}'(t)\|=\sqrt{1+\frac{1}{t^4}+4t^2}=\frac{1}{t^2}\sqrt{t^4+4t^6+1}$.

Quindi

$$\vec{T}(t)=\frac{\vec{\alpha}'(t)}{\|\vec{\alpha}'(t)\|}=\frac{(t^2,-1,2t^3)}{\sqrt{t^4+4t^6+1}}.$$

È più comodo calcolare $\vec{B}(t)$ e ottenere $\vec{N}(t)=\vec{B}(t)\times\vec{T}(t)$.
Si ha $\vec{B}(t)=\vec{\alpha}'(t)\times\vec{\alpha}''(t)/\|\vec{\alpha}'(t)\times\vec{\alpha}''(t)\|$. Ora $\vec{\alpha}''(t)=(0,2t^{-3},2)$, per cui

$$\vec{\alpha}'\times\vec{\alpha}''=\det\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -t^{-2} & 2t\\ 0 & 2t^{-3} & 2\end{pmatrix}=(-2t^{-2}-4t^{-2},-2,2t^{-3})=$$

$$=2(-3t^{-2},-1,t^{-3}); \qquad \|\vec{\alpha}'\times\vec{\alpha}''\|=2\sqrt{9t^{-4}+1+t^{-6}}=$$

$$=2t^{-3}\sqrt{9t^2+t^6+1}.$$

Così:

$$\vec{B}(t)=\frac{\vec{\alpha}'(t)\times\vec{\alpha}''(t)}{\|\vec{\alpha}'(t)\times\vec{\alpha}''(t)\|}=t^3\frac{(-3t^{-2},-1,t^{-3})}{\sqrt{9t^2+t^6+1}}=\frac{(-3t,-t^3,1)}{\sqrt{9t^2+t^6+1}}.$$

Infine

$$\vec{N}(t)=\frac{1}{\sqrt{9t^2+t^6+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{t^4+4t^6+1}}\det\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3t & -t^3 & 1\\ t^2 & -1 & 2t^3\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{9t^2+t^6+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{t^4+4t^6+1}}(-2t^6+1, 6t^4+t^2, 3t+t^5).$$

Esercizio 3 (8 punti)

Si determini il piano tangente P_T al grafico della funzione $f(x,y) = 4-4x^2-4y^2$ nel punto $(1,1,-4)$. Si fornisca inoltre una parametrizzazione della curva ottenuta intersecando il grafico di f con il piano parallelo a P_T e passante per l'origine.

Risultati: $\boxed{P_T = \{ z = -8x-8y+12 \}}$ $\boxed{(1+\sqrt{3}\cos\theta, 1+\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\theta, -16-8\sqrt{3}\cos\theta-8\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\theta),\ \theta\in[0,2\pi]}$

Calcoli:

Il piano tangente a un grafico è dato da:

$$z = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0, y-y_0).$$

Nel caso in questione si ha $f(1,1) = -4$, $\nabla f(x,y) = (-8x,-8y)$, $\nabla f(1,1) = (-8,-8)$, quindi

$$P_T = \{ z = -4-(8,8)\cdot(x-1,y-1)\} =$$
$$= \{ z = -8x-8y+12 \}.$$

Il piano parallelo a P_T passante per l'origine è $\{z=-8x-8y\}$.

Intersecando questo piano con il grafico di f si ha:

$$\begin{cases} z = -8x-8y \\ z = 4-4x^2-4y^2 \end{cases} \longrightarrow -8x-8y = 4-4x^2-4y^2, \text{ cioè } \quad 4x^2+4y^2-8x-8y-4=0.$$

"Completando i quadrati" si ha:

$$4x^2+4y^2-8x-8y-4 = 4(x^2-2x+1)-4+4(y^2-2y+1)-4-4 =$$
$$= 4(x-1)^2+4(y-1)^2-12, \quad \text{cioè } (x-1)^2+(y-1)^2 = 3.$$

La proiezione della curva cercata sul piano (x,y) è dunque la circonferenza di centro $(1,1)$ e raggio $\sqrt{3}$.

Una parametrizzazione della curva cercata è quindi

$$\begin{cases} x = 1+\sqrt{3}\cos\theta \\ y = 1+\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = -16-8\sqrt{3}\cos\theta-8\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}, \quad \theta\in[0,2\pi] \quad (z=-8x-8y\ldots).$$

Esercizio 4 (8 punti)

Si trovino i punti stazionari in $\mathbb{R}^2$ della funzione $g(x,y) = 2xy^2 + x - 12x^3 - \frac{1}{3}y^3$, e si stabilisca se sono di massimo relativo, minimo relativo o sella.

Risultato: $(1/6, 0)$, sella ; $(-1/6, 0)$, sella; $(1/2, 2)$, max. rel.; $(-1/2, -2)$, min. rel.

Calcoli:

Il gradiente di g vale: $\frac{\partial g}{\partial x} = 2y^2 + 1 - 36x^2$, $\frac{\partial g}{\partial y} = 4xy - y^2$,

per cui

$$\begin{cases} 2y^2 + 1 - 36x^2 = 0 \\ 4xy - y^2 = 0 \end{cases} \rightarrow y(4x - y) = 0, \quad \begin{aligned} &y = 0 \rightarrow 36x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1/6 \\ &y = 4x \rightarrow 32x^2 + 1 - 36x^2 = 0 \\ &\rightarrow 4x^2 = 1 \rightarrow \left[\begin{aligned} &x = \pm 1/2\ \text{e} \\ &y = \pm 2. \end{aligned}\right. \end{aligned}$$

I punti stazionari sono quindi: $(1/6, 0)$, $(-1/6, 0)$, $(1/2, 2)$, $(-1/2, -2)$.

La matrice hessiana è data da:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -72x & 4y \\ 4y & 4x - 2y \end{pmatrix}.$$

Quindi

$H_f(1/6, 0) = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix}$; $\det H < 0$, <u>sella</u>.

$H_f(-1/6, 0) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -2/3 \end{pmatrix}$; $\det H < 0$, <u>sella</u>

$H_f(1/2, 2) = \begin{pmatrix} -36 & 8 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$; $\det H > 0$, traccia $H < 0$, <u>max. rel.</u>

$H_f(-1/2, -2) = \begin{pmatrix} 36 & -8 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$; $\det H > 0$, traccia $H > 0$, <u>min. rel.</u>