COGNOME ______ NOME ______ Matr. ______

Analisi Matematica II (EA)

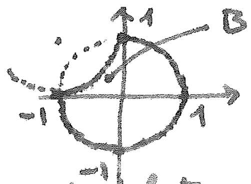
27 gennaio 2015

Esercizio 1 (7 punti). Sia Q la parte del cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 1 che è esterna al cerchio di centro $(-1,1)$ e raggio 1. Si calcoli l'area di Q.

Risultato: $\boxed{\text{area } Q = 1+\pi/2.}$

Calcoli:

[$3/4$ dell'area del cerchio...

La figura è 

. Dunque l'area è $\frac{3}{4}\pi$ + area B. Poi B è un quadrato di lato 1 a cui si sottrae un quarto di cerchio di raggio 1. Dunque area B $= 1-\pi/4$. In conclusione, area Q =

$$= \frac{3}{4}\pi + 1 - \frac{\pi}{4} = 1 + \pi/2.$$

Per gli <u>amanti</u> dell'analisi: utilizziamo il teorema di Green. Consideriamo le due curve $\vec{\alpha}: [-\pi, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{\alpha}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$, e $\vec{\beta}: [-\pi/2, 0] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{\beta}(s) = (-1+\cos s, 1+\sin s)$. Si noti che il sostegno di $\vec{\beta}$ è un pezzo del bordo di Q, ma il verso di percorrenza di $\vec{\beta}$ è opposto a quello antiorario, che devo usare nel teorema di Green.

[per correggere il verso di percorrenza "sbagliato"...

Dunque:

$$\text{area } Q = \frac{1}{2}\int_{\vec{\alpha}} (-y,x)\cdot d\vec{\ell} - \frac{1}{2}\int_{\vec{\beta}} (-y,x)\cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi/2} (-\sin\theta, \cos\theta)\cdot \vec{\alpha}'(\theta)\,d\theta -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{0} (-1-\sin s, -1+\cos s)\cdot \vec{\beta}'(s)\,ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi/2} (\sin^2\theta + \cos^2\theta)\,d\theta - \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{0} (\sin s + \sin^2 s - \cos s + \cos^2 s)\,ds =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right) - \frac{1}{2}\left(0+\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}(-\cos s - \sin s)\Big|_{-\pi/2}^{0} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(-2) = \frac{\pi}{2} + 1.$$

Esercizio 2 (7 punti). Si determini il polinomio di secondo grado $P(x) = a + bx + cx^2$ che nell'intervallo $[-\log 2, \log 2]$ ha distanza minima da $F(x) = e^x - e^{-x}$ (cioè, si determinino i valori dei coefficienti a, b, c per cui $P(x) = a + bx + cx^2$ minimizza $\int_{-\log 2}^{\log 2}[P(x) - F(x)]^2 dx$).

Risultato: $\boxed{P(x) = \dfrac{15\log 2 - 9}{2\log^3 2}\, x .}$

Calcoli:

Si vuole minimizzare $\phi(a,b,c) = \int_{-\log 2}^{\log 2} [a+bx+cx^2-(e^x-e^{-x})]^2 dx$.

Derivando rispetto ad a,b,c si ha:

$$0 = \frac{\partial \phi}{\partial a} = 2\int_{-\log 2}^{\log 2} [a+bx+cx^2-(e^x-e^{-x})]dx$$

$$0 = \frac{\partial \phi}{\partial b} = 2\int_{-\log 2}^{\log 2} [a+bx+cx^2-(e^x-e^{-x})]x\, dx$$

$$0 = \frac{\partial \phi}{\partial c} = 2\int_{-\log 2}^{\log 2} [a+bx+cx^2-(e^x-e^{-x})]x^2 dx .$$

Siccome $e^x - e^{-x}$ è dispari, $\int_{-\log 2}^{\log 2}(e^x-e^{-x})dx = 0 = \int_{-\log 2}^{\log 2}(e^x-e^{-x})x^2$.

Poi

$$\int_{-\log 2}^{\log 2}(e^x-e^{-x})x\,dx = 2\int_0^{\log 2}(e^x x - e^{-x}x)dx = 2\Big[xe^x\Big|_0^{\log 2} - \int_0^{\log 2} e^x dx +$$
$$+ xe^{-x}\Big|_0^{\log 2} - \int_0^{\log 2} e^{-x}dx\Big] = 2\Big[2\log 2 - e^x\Big|_0^{\log 2} + \frac{1}{2}\log 2 + e^{-x}\Big|_0^{\log 2}\Big] =$$
$$= 2\Big[\frac{5}{2}\log 2 - 2 + \cancel{1} + 1/2 - \cancel{1}\Big] = 5\log 2 - 3,$$

$$\int_{-\log 2}^{\log 2} 1\, dx = 2\log 2, \quad \int_{-\log 2}^{\log 2} x\, dx = 0 = \int_{-\log 2}^{\log 2} x^3 dx, \quad \int_{-\log 2}^{\log 2} x^2 dx = \frac{2}{3}\log^3 2, \quad \int_{-\log 2}^{\log 2} x^4 dx = \frac{2}{5}\log^5 2 .$$

Si deve dunque risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2(\log 2)a + \frac{2}{3}(\log^3 2)c = 0 \\ \frac{2}{3}(\log^3 2)b = 5\log 2 - 3 \\ \frac{2}{3}(\log^3 2)a + \frac{2}{5}(\log^5 2)c = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} a = 0 \\ b = \dfrac{15\log 2 - 9}{2\log^3 2} \\ c = 0 \end{array} .$$

Il polinomio cercato è

$$P(x) = \frac{15\log 2 - 9}{2\log^3 2}\, x .$$

Esercizio 3 (8 punti). Si trovino i punti stazionari in $\mathbf{R}^2$ della funzione $f(x,y) = \log(1 + x^2 + 2y^2)$ e si stabilisca se sono di minimo relativo, massimo relativo o sella. Quindi si determinino il massimo assoluto e il minimo assoluto di f nell'insieme Q, ove Q è la parte del cerchio (chiuso) di centro $(1,0)$ e raggio 2 contenuta nel primo quadrante $\{x \geq 0, y \geq 0\}$.

Risultati:

$(0,0)$, minimo assoluto	$\max f = \log 11$, in $(2,\sqrt{3})$ $\min f = 0$, in $(0,0)$.

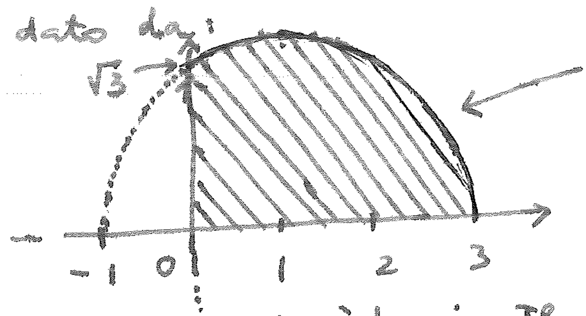
Calcoli:

Il gradiente di f vale $\nabla f = \left(\frac{2x}{1+x^2+2y^2}, \frac{4y}{1+x^2+2y^2}\right)$, per cui l'unico punto stazionario è $(0,0)$, che è (chiaramente...) il punto di minimo <u>assoluto</u> di f in $\mathbb{R}^2$ (infatti $1+x^2+2y^2 \geq 1$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $1+x^2+2y^2 = 1$ solo per $(x,y) = (0,0)$, e il logaritmo è una funzione crescente...). [Per gli <u>amanti</u> dell'hessiano: si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(1+x^2+2y^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2+2y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{2x}{(1+x^2+2y^2)^2} \cdot 4y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{4(1+x^2+2y^2) - 4y \cdot 4y}{(1+x^2+2y^2)^2},$$

e dunque in $(0,0)$ vale $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, che dà un minimo relativo.]

L'insieme Q è dato da:



$(x-1)^2 + y^2 = 4$
Se $x = 0$, $y = \sqrt{3}$.

Non ci sono punti stazionari interni. Il bordo ha tre pezzi: $y = 0$ (con $0 \leq x \leq 3$); $x = 0$ (con $0 \leq y \leq \sqrt{3}$); $y = \sqrt{4-(x-1)^2}$ (con $0 \leq x \leq 3$).

Per $y = 0$ la funzione diventa $\log(1+x^2)$, strettamente crescente per $x > 0$. Per $x = 0$ la funzione diventa $\log(1+2y^2)$, strettamente crescente per $y > 0$. Per $y = \sqrt{4-(x-1)^2}$ la funzione diventa

$$h(x) = \log(1 + x^2 + 2(4-(x-1)^2)) = \log(7 + 4x - x^2), \text{ con } 0 \leq x \leq 3.$$

Si ha

$$h'(x) = \frac{1}{7+4x-x^2}(4-2x), > 0 \text{ per } 0 < x < 2, \ < 0 \text{ per } 2 < x < 3.$$

Si deve quindi confrontare (per $x = 2$ si ha $\sqrt{4-(x-1)^2} = \sqrt{3}$):

$$f(0,0) = 0\ ; \ f(3,0) = \log 10\ ; \ f(0,\sqrt{3}) = \log 7\ ; \ f(2,\sqrt{3}) = \log 11.$$

Il minimo assoluto in Q è 0 (assunto in $(0,0)$), il massimo assoluto è $\log 11$ (assunto in $(2,\sqrt{3})$).

Esercizio 4 (8 punti). Si calcoli $\iiint_D y\,dxdydz$, ove D è la parte del cilindro

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2+y^2 \le 1, z \in \mathbf{R}\}$$

che sta sia sotto il piano $\{z+2x-y=0\}$ che sopra il piano $\{z-x+(\sqrt{3}-1)y=0\}$.

Risultato: $\displaystyle\iiint_D y\,dxdydz = \frac{\sqrt{3}}{8}\pi.$

Calcoli:

Intersechiamo i due piani, per vedere in che parte di C si ha che il piano $\{z+2x-y=0\}$ è sopra il piano $\{z-x+(\sqrt{3}-1)y=0\}$.

Si ha

$$\begin{cases} z = -2x+y \\ z = x-(\sqrt{3}-1)y \end{cases} \to \quad 3x = \sqrt{3}y \to \quad y = \sqrt{3}x.$$

Per $x>0$, descritta da $\theta = \pi/3$; per $x<0$ descritta da $\theta = 4\pi/3$.

In particolare $-2x+y \geq x-(\sqrt{3}-1)y$ per $y \geq \sqrt{3}x$. Sia $K = \{x^2+y^2 \le 1, y \geq \sqrt{3}x\}$.

L'integrale richiesto è

$$\iiint_D y\,dxdydz = \iint_K y\left(\int_{x-(\sqrt{3}-1)y}^{-2x+y} dz\right)dxdy =$$

$$= \iint_K y(\sqrt{3}y-3x)\,dxdy \underset{\text{cordinate polari}}{=} \int_{\pi/3}^{4\pi/3} d\theta \int_0^1 \rho\,[\sqrt{3}\rho^2\sin^2\theta - 3\rho^2\cos\theta\sin\theta]\,d\rho =$$

jacobiano!

$$= \int_{\pi/3}^{4\pi/3} d\theta \int_0^1 (\sqrt{3}\rho^3\sin^2\theta - 3\rho^3\sin\theta\cos\theta)\,d\rho = \quad \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{1}{4}\rho^4\Big|_0^1 = \frac{1}{4}\ldots$$

$$= \int_{\pi/3}^{4\pi/3} d\theta\left[\frac{\sqrt{3}}{4}\sin^2\theta - \frac{3}{4}\sin\theta\cos\theta\right] = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\theta - \sin\theta\cos\theta}{2}\right)\Bigg|_{\pi/3}^{4\pi/3} -$$

$$- \frac{3}{4}\,\frac{\sin^2\theta}{2}\Bigg|_{\pi/3}^{4\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{8}\left[\frac{4\pi}{3} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{3} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right] -$$

$$- \frac{3}{8}\left[\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right] = \frac{\sqrt{3}}{8}\cdot\pi.$$