COGNOME [ ] NOME [ ] Matr. [ ]

Analisi Matematica II (EA)

27 agosto 2013

Esercizio 1 (7 punti) Si determinino il versore tangente $\vec{T}(t)$, il versore normale $\vec{N}(t)$ e il versore binormale $\vec{B}(t)$ della curva $\vec{\alpha}(t) = (t^2, 1-t^2, t)$, $t \in \mathbf{R}$. Si determini anche in quale punto del sostegno di $\vec{\alpha}$ il versore normale è dato da $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$.

Risultati: $\boxed{\vec{T}(t)=\frac{1}{\sqrt{1+8t^2}}(2t,-2t,1)}$ $\boxed{\vec{N}(t)=\frac{1}{Q(t)}(1,-1,-4t) \quad Q(t)=\sqrt{2}\sqrt{1+8t^2}}$ $\boxed{\vec{B}(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)}$ $\boxed{\vec{P}=\frac{1}{16}(1,15,-4)}$

Calcoli:

Si ha $\vec{\alpha}'(t) = (2t,-2t,1)$, per cui $\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+8t^2}}(2t,-2t,1)$.

Poi $\vec{\alpha}''(t) = (2,-2,0)$, per cui

$$\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}'' = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2t & -2t & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = (2,2,0) \quad , \quad \|\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''\| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

e dunque $\vec{B}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$.

Ne consegue

$$\vec{N}(t) = \vec{B}(t) \times \vec{T}(t) = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2t & -2t & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+8t^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+8t^2}}(1,-1,-4t).$$

Il versore normale $\vec{N}(t)$ vale $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$ quando $-4t=1$, dunque $t=-1/4$ (e si può verificare anche che effettivamente $\sqrt{2}\sqrt{1+8t^2}$ per $t=-1/4$ vale $\sqrt{2}\sqrt{1+8/16} = \sqrt{2}\sqrt{3/2} = \sqrt{3}$ ...).

Dunque la condizione richiesta è soddisfatta nel punto $\vec{\alpha}(-1/4) =$
$= (1/16, 1-1/16, -1/4) = (1/16, 15/16, -1/4)$.

Esercizio 2 (7 punti) Si stabilisca se la funzione f è continua in $(0,0)$ e per quali valori interi di $k \geq 1$ la funzione g è continua in $(0,0)$, ove f e g sono

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{x-y} & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}, \quad g(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-y)^k}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Risultati:

f <u>non</u> è continua in $(0,0)$.	Per $k=1$ e $k=2$ g <u>non</u> è cont. in $(0,0)$. Per $k \geqslant 3$ g <u>è</u> continua in $(0,0)$.

Calcoli:

$\boxed{*}$ Sugli assi si ha $f(x,0) = x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, $f(0,y) = -y \xrightarrow[y\to 0]{} 0$. Però il denominatore $x-y$ può essere reso "molto piccolo" se si considera la curva $y = x + x^m$, con m intero abbastanza grande. Infatti si ha:

$$f(x, x+x^m) = \frac{x^2 + (x+x^m)^2}{x - x - x^m} = \frac{x^2 + x^2(1+x^{m-1})^2}{-x^m},$$

e scegliendo $m = 2$ ne viene

$$f(x, x+x^2) = \frac{x^2 + x^2(1+x)^2}{-x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} -2 \neq f(0,0) = 0.$$

Dunque f <u>non</u> è continua in $(0,0)$.

$\boxed{*}$ Per $k=1$, la funzione g vale $\frac{x-y}{x^2+y^2}$ (per $(x,y) \neq (0,0)$). Calcolata sull'asse x diventa

$$g(x,0) = 1/x \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty.$$

Dunque per $k=1$ g <u>non</u> è continua in $(0,0)$.

Per $k=2$ (e $(x,y) \neq (0,0)$) g vale $\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$, e sull'asse x vale

$$g(x,0) = 1 \underset{x\to 0}{\not\to} 0.$$

Dunque <u>neanche</u> per $k=2$ g è continua in $(0,0)$.

Per $k \geq 3$ si ha $g(x,y) = \frac{(x-y)^k}{x^2+y^2}$ (per $(x,y) \neq (0,0)$) e sull'asse x si ottiene

$$g(x,0) = x^{k-2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

Dunque g ha la possibilità di essere continua in $(0,0)$, e in coordinate polari si ha

$$|g(\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta)| = \frac{|\rho^k(\cos\theta - \text{sen}\,\theta)^k|}{\rho^2} \leq \rho^{k-2}\, 2^k \xrightarrow[\rho\to 0^+]{} 0.$$

Dunque per $k \geqslant 3$ g è continua in $(0,0)$.

Esercizio 3 (8 punti) Si determinino il massimo assoluto e il minimo assoluto della funzione $q(x, y, z) = xy + z^2$ sulla superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + 4y^2 = 1, -1 \leq z \leq 1\}$.

Risultato: massimo $5/4$ in $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \pm 1\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \pm 1\right)$, minimo $-1/4$ in $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, 0\right)$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, 0\right)$.

Calcoli:

Utilizzando i moltiplicatori di Lagrange, si ha

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial x} - \lambda \frac{\partial}{\partial x}(x^2+4y^2-1) = y - 2\lambda x = 0 \rightarrow y = 2\lambda x \\ \frac{\partial q}{\partial y} - \lambda \frac{\partial}{\partial y}(x^2+4y^2-1) = x - 8\lambda y = 0 \qquad x - 8\lambda(2\lambda x) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ \lambda = \pm 1/4 \rightarrow y = \pm\frac{1}{2}x \end{cases} \\ \frac{\partial q}{\partial z} - \lambda \frac{\partial}{\partial z}(x^2+4y^2-1) = 2z = 0 \\ x^2+4y^2-1 = 0 \end{cases}$$

Da $x=0, y=0$ segue una contraddizione, perché non può essere $x^2+4y^2-1=0$.
Da $y = \pm\frac{1}{2}x$ segue $x^2 + 4\frac{1}{4}x^2 - 1 = 2x^2 - 1 = 0$, cioè $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Quindi si sono trovati i punti $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$, nel piano $z=0$.

Bisogna poi considerare le due curve "di bordo": $x^2+4y^2=1$ e $z=-1$; $x^2+4y^2=1$ e $z=1$. Su ambedue la funzione q vale $xy+1$, dunque basta considerare la funzione $h(x,y) = xy+1$ per $x^2+4y^2=1$. Risolvendo quest'ultima equazione rispetto a y si ha $y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$, e dunque dobbiamo considerare, per $-1 \leq x \leq 1$

$$h_+(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+1 \quad , \quad h_-(x) = -\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+1 .$$

Si ha $h_+(1) = h_+(-1) = h_-(1) = h_-(-1) = 1$. Poi, derivando,

$$h_+'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}x\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}(-\cancel{2}x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(1-x^2-x^2) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(1-2x^2),$$

che si annulla per $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. La stessa cosa accade per $h_-'(x)$.
Dunque si sono ritrovati gli stessi quattro punti di prima, ma ora nel piano $z=1$ e nel piano $z=-1$. [A $x = \pm 1/\sqrt{2}$ corrisponde $y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1/2} = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdots$
Calcolando il valore di q in questi 12 punti si trova un valore <u>massimo</u> $5/4$ (in $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \pm 1\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \pm 1\right)$) e un valore <u>minimo</u> $-1/4$ (in $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, 0\right)$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, 0\right)$).

Esercizio 4 (8 punti) Sia D l'insieme ottenuto ruotando attorno all'asse z l'insieme

$$A = \left\{(x, z) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 0 \le x \le \cos z, 0 \le z \le \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Si calcoli $\iiint_D x^2 \, dxdydz$.

Risultato: $\iiint_D x^2 dxdydz = \dfrac{3\pi^2}{64}$.

Calcoli:

Possiamo utilizzare coordinate cilindriche $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $z = z$, con $0 \le \rho \le \cos z$, $0 \le z \le \pi/2$ (nell'insieme A, la coordinata x rappresenta la distanza dall'asse di rotazione) e $\theta \in [0, 2\pi]$.
Si deve quindi calcolare ($\rho \, d\rho \, d\theta \, dz$ è il nuovo elemento di volume)

$$\iiint_D x^2 dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} dz \int_0^{\cos z} \rho^2 \cos^2\theta \, \rho \, d\rho = \qquad \left[\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta = \pi \ldots\right.$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta \int_0^{\pi/2} \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^{\cos z} dz = \pi \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \cos^4 z \, dz =$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi/2} \cos^2 z (1 - \sin^2 z) \, dz \overset{(*)}{=} \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi}{4} - \int_0^{\pi/2} \cos^2 z \sin^2 z \, dz\right).$$

Ora

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 z \sin^2 z \, dz \overset{\text{per parti}}{=} \cancel{\left.\frac{1}{3}\sin^3 z \cos z\right|_0^{\pi/2}} - \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \sin^3 z (-\sin z) \, dz = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \sin^4 z \, dz =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \sin^2 z (1 - \cos^2 z) \, dz \overset{(*)}{=} \frac{1}{3}\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \sin^2 z \cos^2 z \, dz,$$

da cui

$$\frac{4}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^2 z \sin^2 z \, dz = \frac{\pi}{12} \implies \int_0^{\pi/2} \cos^2 z \sin^2 z \, dz = \pi/16.$$

In conclusione,

$$\iiint_D x^2 dxdydz = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{16}\right) = \frac{3\pi^2}{64}.$$

(*) $\int_0^{\pi/2} \cos^2 z \, dz = \int_0^{\pi/2} \sin^2 z \, dz$

(facile, da note proprietà di $\sin x$ e $\cos x$ ...), per cui

$\int_0^{\pi/2} \cos^2 z \, dz = \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 z) \, dz \implies$

$\implies \int_0^{\pi/2} \cos^2 z \, dz = \frac{1}{2} \cdot \pi/2 = \pi/4.$