COGNOME [ ] NOME [ ] Matr. [ ]

# Analisi Matematica 2

2 febbraio 2018

**Esercizio 1.** Si determinino, se esistono, massimo assoluto e minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = xy(4x^2 - 9y^2 - 1)$$

sull'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 4x^2 + 9y^2 \leq 1\}$.

**Soluzione:**

Svolgimento 1

1 $f(x,y) = 4x^3y - 9xy^3 - xy$.

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} 12x^2y - 9y^3 - y = 0 \\ 4x^3 - 27xy^2 - x = 0. \end{cases}$$

Se $y = 0$ $x = 0$ o $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Se $y \neq 0$ allora $12x^2 - 9y^2 - 1 = 0$.

dalla seconda si ha $x \neq 0$. e dunque.

3.) $$\begin{cases} 12x^2 - 9y^2 - 1 = 0 \\ 4x^2 - 27y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 36x^2 - 27y^2 - 3 = 0 \\ 4x^2 - 27y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$32x^2 - 2 = 0$ $\quad x = \pm \frac{1}{4}$

da cui $\frac{1}{4} - 1 = 27y^2 \Rightarrow 27y^2 = -\frac{3}{4}$ No.

Abbiamo solo $(0,0)$, $(\pm \frac{1}{2}, 0)$.

osserviamo che appartengono ad $\partial A$. !

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 24xy & 12x^2 - 27y^2 - 1 \\ 12x^2 - 27y^2 - 1 & -54xy \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (0,0) \text{ sella.}$$

$$Hf\left(\pm\tfrac{1}{2},0\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{sella.}$$

<u>sul bordo</u>:

$$\begin{cases} 12x^2y - 9y^3 - y = 8\lambda x \\ 4x^3 - 27xy^2 - x = 18\lambda y \\ 4x^2 + 9y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(12x^2 - 9y^2 - 1) = 8\lambda x & (1) \\ x(4x^2 - 27y^2 - 1) = 18\lambda y & (2) \\ 4x^2 + 9y^2 - 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

Da (3) e (2) abbiamo.

$$x(-27y^2 - 9y^2) = 18\lambda y$$

$$-36xy^2 = 18\lambda y$$

$y = 0$ oppure $\lambda = -2xy$

se $y = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$

se $\lambda = -2xy$.

$$\begin{cases} \cancel{y}(12x^2 - 9y^2 - 1) = -16x^2\cancel{y} \\ \cancel{x}(4x^2 - 27y^2 - 1) = -36\cancel{x}y^2 \\ 4x^2 + 9y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 28x^2 - 9y^2 = 1 \\ 4x^2 + 9y^2 = 1 \end{cases}$$

$9y^2 = 28x^2 - 1$

$4x^2 + 28x^2 - 1 = 1 \Rightarrow 32x^2 = 2$

$\Rightarrow x = \pm \frac{1}{4}$

$4 \cdot \frac{1}{4} + 9y^2 = 1 \Rightarrow 9y^2 = \frac{3}{4}$

$y^2 = \frac{1}{12} \qquad y = \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}$

$\left( \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)$

Equivalentemente su $\partial A$ :

$$x = \frac{\cos\theta}{2} \qquad \theta \in [0, 2\pi].$$
$$y = \frac{\operatorname{sen}\theta}{3}$$

$$(\theta) = f\left( \frac{\cos\theta}{2}, \frac{\operatorname{sen}\theta}{3} \right) = - \frac{\cos\theta \operatorname{sen}^3\theta}{3}$$

$$g'(\theta) = \operatorname{sen}^2\theta \left( \frac{4}{3} \operatorname{sen}^2\theta - 1 \right)$$

$$g'(\theta) = 0 \iff \left.\begin{array}{l} \theta = \pi. \\ \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi \end{array}\right\}$$

stanno in $(0, 2\pi)$.

$$P_0 = \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \qquad P_1 = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

corrisponde a $\theta = 0$.

$$P = \left( \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{2\sqrt{3}} \right)$$

$$Q = (0,0)$$

COGNOME NOME Matr.

# Analisi Matematica 2

2 febbraio 2018

**Esercizio 1.** Si determinino, se esistono, massimo assoluto e minimo assoluto della funzione

$$f(x,y) = xy(4x^2 - 9y^2 - 1)$$

sull'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 4x^2 + 9y^2 \leq 1\}$.

**Soluzione:** Svolgimento 2:

$F$ e' definito in $\mathbb{R}^3$ quindi essendo $\mathbb{R}^3$ convesso basta verificare che $\text{rot}\, F = 0$ per sapere che $F$ e' conservativo.

Alternativamente, troviamo (a mano) i potenziali:

$$\begin{cases} \partial_x U = yz \cos xy & (1) \\ \partial_y U = xz \cos xy + \frac{1}{1+y^2} & (2) \\ \partial_z U = \sin xy. & (3) \end{cases}$$

Da (3) $U(x,y,z) = z \sin xy + h(x,y)$

$$yz \cos xy = \partial_x U = zy \cos xy + h_x(x,y)$$

$$xz \cos xy + \frac{1}{1+y^2}\ \partial_y U = zx \cos xy + h_y(x,y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h_x = 0 \\ h_y = \frac{1}{1+y^2} \end{cases} \Rightarrow h(x,y) = \text{arctg}\, y + c \quad c \in \mathbb{R}.$$

I potenziali sono

$$\boxed{U(x,y,z) = z\, \text{sen}\, xy + \text{arctg}\, y + c. \quad \forall c \in \mathbb{R}}$$

Per calcolare $\int_\gamma F$ basta det. i punti iniziale e finale della curva $\gamma$.

$(1, 0, 2)$
$(2, 1, 2)$.

$$\int_\gamma F = U(1,0,2) - U(2,1,2).$$

oppure

$$= U(2,1,2) - U(1,0,2)$$

a seconda del verso scelto!

**Esercizio 3.** Si calcoli il volume dell'insieme $D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, y \le 4 - 12x^2 - 3z^2, 1 \le y \le 3\}$.

**Soluzione:**

Intersecando $D$ con il piano $y=3$ troviamo $12x^2+3z^2 \le 1$, l'ellisse $E^-$ di semiassi $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ e $\frac{1}{\sqrt{3}}$; con il piano $y=1$ troviamo $12x^2+3z^2 \le 3$, cioè l'ellisse di semiassi $1/2$ e $1$, che indichiamo con $E^+$

Integrando per fili paralleli all'asse $y$, nella "corona ellittica" $E^+ \setminus E^-$ abbiamo come "tetto" $y = 4-12x^2-3z^2$; integrando nell'ellisse $E^-$ abbiamo come "tetto" $y=3$. Sempre abbiamo $y=1$ come "pavimento".

Dunque il volume è dato da

$$V = \iiint_D 1\, dx\,dy\,dz = \iint_{E^+\setminus E^-} \left( \int_1^{4-12x^2-3z^2} dy \right) dx\,dz + \iint_{E^-} \left( \int_1^3 dy \right) dx\,dz =$$

$$= \iint_{E^+\setminus E^-} (3-12x^2-3z^2)\,dx\,dz + 2\,\underbrace{\text{area}(E^-)}_{\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\pi}.$$

L'insieme $E^+\setminus E^-$ può essere descritto in coordinate ellittiche: $x = \frac{1}{2}\rho\cos\theta$, $z = \rho\sin\theta$, con $\theta\in[0,2\pi]$ e $\rho\in\left[\frac{1}{\sqrt{3}},1\right]$. Dunque

$$\iint_{E^+\setminus E^-} (3-12x^2-3z^2)\,dx\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{1/\sqrt{3}}^1 \left(3 - 12\tfrac{1}{4}\rho^2\cos^2\theta - 3\rho^2\sin^2\theta\right)\tfrac{1}{2}\rho\, d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_{1/\sqrt{3}}^1 (3\rho - 3\rho^3)\,d\rho = \pi\, 3\left(\rho^2/2 - \frac{\rho^4}{4}\right)\Big|_{1/\sqrt{3}}^1 = 3\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36}\right) =$$

$$= 3\pi\,\frac{4}{36} = \pi/3.$$

Siccome $2\cdot\text{area}(E^-) = 2\cdot\frac{1}{6}\pi = \pi/3$, il risultato finale è $2\pi/3$.

---

Se lo si calcola per strati paralleli al piano $(x,z)$, si vede che ogni sezione è un ellisse $V_y$, dato da $12x^2+3z^2 = 4-y$. Quindi i semiassi sono $a = \frac{\sqrt{4-y}}{2\sqrt{3}}$, $b = \frac{\sqrt{4-y}}{\sqrt{3}}$. L'area di ogni sezione è quindi $ab\pi = \frac{4-y}{6}\pi$.

Dunque

$$V = \int_1^3 dy\, \overbrace{\pi\left(\frac{4-y}{6}\right)}^{\iint_{V_y} 1\,dx\,dz \,=\, \text{area}\, V_y} = \pi\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{6}\,\frac{y^2}{2}\Big|_1^3\right) = \pi\left(\frac{4}{3} - \frac{9}{12} + \frac{1}{12}\right) = \frac{8}{12}\pi = \frac{2}{3}\pi.$$

---

**Esercizio 4.** Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\vec{F}(x,y,z) = (y^2, x^2, x^3)$ attraverso la superficie $S = T \cap Q$ ottenuta dall'intersezione degli insiemi

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^4 + y^2 - z = 0\} \quad , \quad Q = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x \geq 0, z \leq 1\}$$

(scegliendo la normale che punta verso l'alto).

**Soluzione:**

La superficie $S$ è il grafico della funzione $f(x,y) = x^4+y^2$, con i parametri $(x,y)$ che variano in $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ x^4+y^2 \leq 1\}$.

Il vettore normale che punta verso l'alto è dato da

$$\vec{N} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) = (-4x^3, -2y, 1).$$

Dunque il flusso richiesto è

$$\iint_S \underbrace{\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS}_{\vec{N}\,dx\,dy} = \iint_D \left(y^2(-4x^3) + x^2(-2y) + x^3\right) dx\,dy.$$

Integrando in $D$ per fili verticali, si ha $0 \leq x \leq 1$ e $-\sqrt{1-x^4} \leq y \leq \sqrt{1-x^4}$, quindi

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^4}}^{\sqrt{1-x^4}} (-4x^3y^2 - 2x^2y + x^3)\,dy = \int_0^1 \left(-4x^3\frac{1}{3}y^3\Big|_{-\sqrt{1-x^4}}^{\sqrt{1-x^4}} + x^3 2\sqrt{1-x^4}\right)dx =$$

$$\int_{-\sqrt{1-x^4}}^{\sqrt{1-x^4}} y\,dy = 0$$

$$= -\frac{4}{3}\int_0^1 x^3 2(1-x^4)^{3/2}dx + 2\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^4}\,dx = -\frac{8}{3}(1-x^4)^{5/2}\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\Big|_0^1 + 2(1-x^4)^{3/2}\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{4}{15} + \frac{1}{3} = \frac{1}{15}.$$

---

Integrando in $D$ per fili orizzontali, si ha $-1 \leq y \leq 1$ e $0 \leq x \leq (1-y^2)^{1/4}$, quindi

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \int_{-1}^1 dy \int_0^{(1-y^2)^{1/4}} (-4x^3y^2 - 2x^2y + x^3)\,dx = \int_{-1}^1 dy \left(-x^4y^2\Big|_0^{(1-y^2)^{1/4}} - \frac{2}{3}x^3y\Big|_0^{(1-y^2)^{1/4}} + \frac{x^4}{4}\Big|_0^{(1-y^2)^{1/4}}\right) =$$

$$= \int_{-1}^1 \left[-(1-y^2)y^2 - \frac{2}{3}(1-y^2)^{3/4}y + \frac{1}{4}(1-y^2)\right]dy = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{4}-y^2\right)(1-y^2)\,dy =$$

$$\int_{-1}^1 (1-y^2)^{3/4} y\,dy = 0 \quad \text{(funzione dispari....)}$$

$$= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{4}y^2 + y^4\right)dy = 2\cdot\frac{1}{4} - \frac{5}{4}\frac{1}{3}y^3\Big|_{-1}^1 + \frac{1}{5}y^5\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} - \frac{5}{6} + \frac{2}{5} = \frac{15-25+12}{30} =$$

$$= \frac{2}{30} = \frac{1}{15}.$$

---

**Esercizio 4.** Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\vec{F}(x,y,z) = (y^2, x^2, x^3)$ attraverso la superficie $S = T \cap Q$ ottenuta dall'intersezione degli insiemi

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^4 + y^2 - z = 0\} \quad , \quad Q = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x \geq 0, z \leq 1\}$$

(scegliendo la normale che punta verso l'alto).

**Soluzione:**

[seguito...]

Con uno scatto di fantasia (eccessivo?) si può integrare in D cambiando variabili: $x = \sqrt{\rho\cos\theta}$, $y = \rho\sin\theta$, con $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ e $\rho \in [0,1]$. Si ha

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \frac{1}{2\sqrt{\rho\cos\theta}}\cos\theta \, , \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = \frac{1}{2\sqrt{\rho\cos\theta}}(-\rho\sin\theta) \, , \quad \frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin\theta \, , \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = \rho\cos\theta \, ,$$

per cui $|\det \mathrm{Jac}\,\vec{T}(\rho,\theta)| = \frac{\sqrt{\rho}}{2\sqrt{\cos\theta}}$ (avendo definito $\vec{T}(\rho,\theta) = (\sqrt{\rho\cos\theta}, \rho\sin\theta)$).

Quindi

$$\iint_D (-4x^3y^2 - 2x^2y + x^3)\,dx\,dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^1 d\rho \frac{\sqrt{\rho}}{2\sqrt{\cos\theta}} \Big(-4\rho^{3/2}(\cos\theta)^{3/2}\rho^2\sin^2\theta -$$

$$- 2\rho\cos\theta\,\rho\sin\theta + \rho^{3/2}(\cos\theta)^{3/2}\Big) =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \left(-2\cos\theta\sin^2\theta\,\rho^4 - \sqrt{\cos\theta}\sin\theta\,\rho^{5/2} + \frac{1}{2}\cos\theta\,\rho^2\right) d\rho =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \left(-\frac{2}{5}\cos\theta\sin^2\theta - \frac{2}{7}\sqrt{\cos\theta}\sin\theta + \frac{1}{6}\cos\theta\right) =$$

$$= \left(-\frac{2}{5}\frac{1}{3}\sin^3\theta + \frac{2}{7}\frac{2}{3}(\cos\theta)^{3/2} + \frac{1}{6}\sin\theta\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = -\frac{4}{15} + \frac{1}{3} = \frac{1}{15}.$$

---

Con ancora maggiore ardimento, si parametrizza la superficie con $x = \sqrt{\rho\cos\theta}$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z = \rho^2$, per $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ e $\rho \in [0,1]$.

Chiamando $\vec{r}(\rho,\theta) = (\sqrt{\rho\cos\theta}, \rho\sin\theta, \rho^2)$, viene

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \left(\frac{\cos\theta}{2\sqrt{\rho\cos\theta}}, \sin\theta, 2\rho\right), \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \left(-\frac{\rho\sin\theta}{2\sqrt{\rho\cos\theta}}, \rho\cos\theta, 0\right),$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \left(-2\rho^2\cos\theta, -\rho^{3/2}\frac{\sin\theta}{\sqrt{\cos\theta}}, \frac{\sqrt{\rho}}{2\sqrt{\cos\theta}}\right),$$

e calcolando $\vec{F}(\vec{r}(\rho,\theta)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\right)$ viene nuovamente

$$-2\cos\theta\sin^2\theta\,\rho^4 - \sqrt{\cos\theta}\sin\theta\,\rho^{5/2} + \frac{1}{2}\cos\theta\,\rho^2 \ldots$$

---

**Esercizio 4.** Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\vec{F}(x,y,z) = (y^2, x^2, x^3)$ attraverso la superficie $S = T \cap Q$ ottenuta dall'intersezione degli insiemi

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^4 + y^2 - z = 0\} \quad , \quad Q = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x \geq 0, z \leq 1\}$$

(scegliendo la normale che punta verso l'alto).

**Soluzione:**

[seguito...]

Si può anche applicare il teorema della divergenza. Consideriamo le superfici $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=0,\ y^2 \leq z \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1\}$ e $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z=1,\ x^4+y^2 \leq 1,\ 0 \leq x \leq 1\}$. L'unione di $S$, $A$ e $B$ è il bordo di un volume $V$. Siccome $\operatorname{div} \vec{F} = 0$, si ha $\iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\, dx\,dy\,dz = 0$, quindi

$$0 = \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}_e\, dS + \iint_A \vec{F}\cdot\vec{n}_e\, dS + \iint_B \vec{F}\cdot\vec{n}_e\, dS,$$

ove $\vec{n}_e$ è il vettore normale <u>esterno</u> a $\partial V$.

Si ha $\vec{n}_e = (-1,0,0)$ su $A$, $\vec{n}_e = (0,0,1)$ su $B$, $\vec{n}_e = -\vec{n}$ su $S$ (dato che si è richiesto che $\vec{n}$ su $S$ punti verso l'alto, mentre $\vec{n}_e$ su $S$ punta verso il basso). Dunque $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = \iint_A \vec{F}\cdot\vec{n}_e\, dS + \iint_B \vec{F}\cdot\vec{n}_e\, dS$.

Svolgendo i calcoli:

$$\iint_A \vec{F}\cdot\vec{n}_e\, dS = \int_{-1}^{1} dy \int_{y^2}^{1} dz\, (y^2,0,0)\cdot(-1,0,0) = \int_{-1}^{1} -y^2(1-y^2)\, dy = -\frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= -\frac{2}{3} + \frac{2}{5} = -\frac{4}{15}.$$

$$\iint_B \vec{F}\cdot\vec{n}_e\, dS = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^4}}^{+\sqrt{1-x^4}} dy\, (y^2,x^2,x^3)\cdot(0,0,1) = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^4}}^{+\sqrt{1-x^4}} x^3\, dy =$$

$$= 2\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^4}\, dx = 2\,(1-x^4)^{3/2}\,\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Dunque

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = -\frac{4}{15} + \frac{1}{3} = \frac{1}{15}.$$