COGNOME | | NOME | | Matr. | |

Analisi Matematica II (EA)

4 febbraio 2013

Esercizio 1 (7 punti) Si determinino il versore tangente $\vec{T}(t)$, il versore normale $\vec{N}(t)$ e il versore binormale $\vec{B}(t)$ della curva $\vec{\alpha}(t) = (e^t, e^{-t}, e^{2t})$, $t \in \mathbf{R}$. Si determini anche il piano osculatore nel punto $(1,1,1)$.

Risultati: $\boxed{\vec{T}(t) = \frac{1}{A}(e^{2t}, -1, 2e^{3t})}$ $\boxed{\vec{N}(t) = \frac{1}{AK}(-2e^{6t}+1, 6e^{4t}+e^{2t}, 3e^t+e^{5t})}$ $\boxed{\vec{B}(t) = \frac{1}{K}(-3e^t, -e^{3t}, 1)}$ $\boxed{-3x-y+z+3=0}$

Calcoli:

Si ha $\vec{\alpha}'(t) = (e^t, -e^{-t}, 2e^{2t})$, $\vec{\alpha}''(t) = (e^t, e^{-t}, 4e^{2t})$.

Dunque $\vec{T}(t) = (e^t, -e^{-t}, 2e^{2t})/\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}+4e^{4t}}$, e semplificando un po'

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{4e^{6t}+e^{4t}+1}}(e^{2t}, -1, 2e^{3t}).$$ [Poniamo $A = \sqrt{4e^{6t}+e^{4t}+1}$.]

Calcoliamo

$$\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}'' = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ e^t & -e^{-t} & 2e^{2t} \\ e^t & e^{-t} & 4e^{2t} \end{pmatrix} = (-6e^t, -2e^{3t}, 2) = 2(-3e^t, -e^{3t}, 1).$$

Ponendo $K = \sqrt{e^{6t}+9e^{2t}+1}$, ne viene

$$\vec{B} = \frac{\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''}{\|\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''\|} = \frac{1}{K}(-3e^t, -e^{3t}, 1).$$

Quindi

$$\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T} = \frac{1}{AK}\det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3e^t & -e^{3t} & 1 \\ e^{2t} & -1 & 2e^{3t} \end{pmatrix} = \frac{1}{AK}(-2e^{6t}+1, 6e^{4t}+e^{2t}, 3e^t+e^{5t}).$$

La curva passa per $(1,1,1)$ per $t=0$; si ha $\vec{B}(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(-3,-1,1)$, per cui il piano osculatore in $(1,1,1)$ è dato da

$$0 = (x-1)(-3) + (y-1)(-1) + (z-1)\cdot 1 = -3x+3-y+1+z-1 =$$
$$= -3x - y + z + 3.$$

Esercizio 2 (7 punti) Si determini il polinomio di secondo grado $P(x) = a+bx+cx^2$ che nell'intervallo [0,1] ha distanza minima da $F(x) = \sin(2\pi x)$ (cioè, si determinino i valori dei coefficienti a, b, c per cui $P(x) = a + bx + cx^2$ minimizza $\int_0^1 [P(x) - F(x)]^2 dx$).

Risultato: $\boxed{P(x) = \frac{3}{\pi} - \frac{6}{\pi} x .}$

Calcoli:

Si tratta di minimizzare

$$\phi(a,b,c) = \int_0^1 \left(a+bx+cx^2 - \operatorname{sen}(2\pi x)\right)^2 dx .$$

Cerchiamo dove si annulla $\nabla\phi$:

$$\frac{\partial\phi}{\partial a} = 2\int_0^1 \left(a+bx+cx^2 - \operatorname{sen}(2\pi x)\right) dx = 0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial b} = 2\int_0^1 \left(a+bx+cx^2 - \operatorname{sen}(2\pi x)\right) x \, dx = 0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial c} = 2\int_0^1 \left(a+bx+cx^2 - \operatorname{sen}(2\pi x)\right) x^2 \, dx = 0 ,$$

cioè

$$\begin{cases} a + b/2 + c/3 = 0 \\ a/2 + b/3 + c/4 = \int_0^1 x \sin(2\pi x)\,dx = -\frac{1}{2\pi} x\cos(2\pi x)\Big|_0^1 + \frac{1}{2\pi}\cancel{\int_0^1 \cos(2\pi x)\,dx} = \\ \qquad = -1/2\pi \\ a/3 + b/4 + c/5 = \int_0^1 x^2 \sin(2\pi x)\,dx = -\frac{1}{2\pi} x^2 \cos(2\pi x)\Big|_0^1 + \frac{1}{2\pi}\int_0^1 2x\cos(2\pi x)\,dx = \\ \qquad = -\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\left[\cancel{\frac{1}{2\pi} x \sin(2\pi x)\Big|_0^1} - \cancel{\frac{1}{2\pi}\int_0^1 \sin(2\pi x)\,dx}\right] = -\frac{1}{2\pi} . \end{cases}$$

Sottraendo la seconda e la terza equazione si ha $\frac{a}{6} + \frac{b}{12} + \frac{c}{20} = 0$,

e usando $a = -b/2 - c/3$ viene

$$0 = \left(-\frac{b}{2} - \frac{c}{3}\right)\frac{1}{6} + \frac{b}{12} + \frac{c}{20} = \frac{c}{20} - \frac{c}{18} \Rightarrow c = 0.$$

Dunque $a = -b/2$, che inserito nella terza equazione dà

$$-\frac{1}{2\pi} = -\frac{b}{6} + \frac{b}{4} = \frac{-2+3}{12} b = \frac{b}{12} \Rightarrow b = -\frac{6}{\pi} \Rightarrow a = \frac{3}{\pi} .$$

Il polinomio richiesto è quindi:

$$P(x) = \frac{3}{\pi} - \frac{6}{\pi} x .$$

Esercizio 3 (8 punti) Si calcoli $\iiint_D z\,dxdydz$, ove

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+\frac{z^2}{4} \le 1, z^2 \ge \frac{4}{3}(x^2+y^2), z \ge 0\right\}.$$

Risultato: $\boxed{\iiint_D z\,dxdydz = \frac{3\pi}{4}.}$

Calcoli:

Intersecando le superfici $x^2+y^2+z^2/4 = 1$ e $z^2 = \frac{4}{3}(x^2+y^2)$ viene $x^2+y^2+\frac{1}{3}(x^2+y^2) = 1$, cioè $x^2+y^2 = 3/4$, la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{3}/2$. Per avere $4/3\,(x^2+y^2) \le z^2 \le 4(1-x^2-y^2)$ deve poi essere $x^2+y^2 \le 3/4$. Dunque si può integrare per fili, nel cerchio C di raggio $\sqrt{3}/2$ e centro $(0,0)$, dalla quota minore $2/\sqrt{3}\,\sqrt{x^2+y^2}$ alla quota maggiore $2\sqrt{1-x^2-y^2}$.

In conclusione

$$\iiint_D z\,dxdydz = \iint_C dxdy \int_{2/\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}}^{2\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,dz = \frac{1}{2}\iint_C \left[4(1-x^2-y^2) - \frac{4}{3}(x^2+y^2)\right] dxdy.$$

Passando in coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ si ha:

$$\iiint_D z\,dxdydz = \frac{4}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}/2} \rho\left[(1-\rho^2) - \frac{1}{3}\rho^2\right] d\rho = 4\pi \int_0^{\sqrt{3}/2} \left(\rho - \frac{4}{3}\rho^3\right) d\rho =$$

$$= 4\pi \left(\rho^2/2 - \rho^4/3\right)\Big|_0^{\sqrt{3}/2} = 4\pi\left(\frac{3}{8} - \frac{3}{16}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Esercizio 4 (8 punti) Si calcoli $\iint_S \frac{\sin(2z)}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dS$, ove S è la superficie ottenuta ruotando attorno all'asse z la curva $c = \{(x,z) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x = 1+\cos z, z \in [0, \frac{3}{4}\pi]\}$.

Risultato: $\boxed{\iint_S \frac{\sin(2z)}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dS = \pi\left(\sqrt{6} - 4/3\right).}$

Calcoli:

Nel piano (x,z) l'ascissa x è la distanza ρ dall'asse di rotazione. Dunque possiamo parametrizzare la superficie S come l'immagine di $\vec{r}(z,\theta)$ così definita:

$$\vec{r}(z,\theta) = \left((1+\cos z)\cos\theta,\ (1+\cos z)\sin\theta,\ z\right),$$

con $\theta \in [0, 2\pi]$, $z \in [0, 3\pi/4]$ (ed avendo usato che $\rho = 1+\cos z$).

Si ha

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = (-\sin z\cos\theta, -\sin z \sin\theta, 1), \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (-(1+\cos z)\sin\theta, (1+\cos z)\cos\theta, 0),$$

da cui $\vec{N} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}$ viene

$$\vec{N} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin z\cos\theta & -\sin z\sin\theta & 1 \\ -(1+\cos z)\sin\theta & (1+\cos z)\cos\theta & 0 \end{pmatrix} = \left(-(1+\cos z)\cos\theta, -(1+\cos z)\sin\theta, -\sin z(1+\cos z)\right).$$

Ne segue $\|\vec{N}\| = (1+\cos z)\sqrt{1+\sin^2 z}$, $dS = (1+\cos z)\sqrt{1+\sin^2 z}\, dz\, d\theta$.

Si ha quindi:

$$\iint_S \frac{\sin(2z)}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dS = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{3\pi/4} dz \frac{\sin(2z)}{\sqrt{\cancel{(1+\cos z)^2}\cancel{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}}} \cdot \left(\cancel{1+\cos z}\right)\sqrt{1+\sin^2 z} =$$

$[(\sin^2 z)' = 2\sin z\cos z = \sin(2z)$

$$= 2\pi \int_0^{3\pi/4} \sin(2z)\sqrt{1+\sin^2 z}\, dz = 2\pi \left.(1+\sin^2 z)^{3/2}\frac{2}{3}\right|_0^{3\pi/4} =$$

$$= 4\pi\frac{1}{3}\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)^{3/2} - 1\right] = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - 1\right) = \pi\sqrt{6} - \pi\frac{4}{3}.$$