COGNOME [ ] NOME [ ] Matr. [ ]

Analisi Matematica 2

4 settembre 2017

Esercizio 1 (8 punti)

Si consideri la curva piana $\vec{\gamma}$ di parametrizzazione $\vec{\gamma}(t) = (t^2\cos t, t^2 \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. (i) Si calcoli la lunghezza di $\vec{\gamma}$. (ii) Si calcolino versore tangente e curvatura nel punto di coordinate $\left(0, \frac{\pi^2}{4}\right)$.

Soluzione:

(i) Si ha $\vec{\gamma}'(t) = (2t\cos t - t^2 \sin t, 2t\sin t + t^2\cos t)$, per cui $|\vec{\gamma}'(t)| =$

$$= \left[(2t\cos t - t^2\sin t)^2 + (2t\sin t + t^2\cos t)^2\right]^{1/2} = \left[4t^2\cos^2 t + t^4\sin^2 t + 4t^2\sin^2 t + t^4\cos^2 t\right]^{1/2} = (4t^2+t^4)^{1/2} = t\sqrt{4+t^2}.$$

Dunque

$$\text{lungh}(\vec{\gamma}) = \int_0^{2\pi} t\sqrt{4+t^2}\,dt = (4+t^2)^{3/2}\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{3}\left[(4+4\pi^2)^{3/2} - 8\right] = \frac{8}{3}\left[(1+\pi^2)^{3/2} - 1\right].$$

(ii) Il versore tangente in $(0, \pi^2/4)$ (che corrisponde a $\vec{\gamma}(\pi/2)$) è

$$\vec{T} = (-\pi^2/4, \pi)/\sqrt{\pi^4/16+\pi^2} = (-\pi/4, 1)/\sqrt{\pi^2/16+1} = (-\pi, 4)/(\pi^2+16)^{1/2}.$$

Per la curvatura usiamo la formula $\kappa = \dfrac{\|\vec{\gamma}' \times \vec{\gamma}''\|}{\|\vec{\gamma}'\|^3}$. Si ha

$$\vec{\gamma}''(t) = (2\cos t - 2t\sin t - 2t\sin t - t^2\cos t, 2\sin t + 2t\cos t + 2t\cos t - t^2\sin t),$$

dunque $\vec{\gamma}''(\pi/2) = (-2\pi, 2-\pi^2/4)$. Poi $\vec{\gamma}'(\pi/2) = (-\pi^2/4, \pi)$, quindi

$$\vec{\gamma}' \times \vec{\gamma}'' = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\pi^2/4 & \pi & 0 \\ -2\pi & 2-\pi^2/4 & 0 \end{pmatrix} = \left(0, 0, -\pi^2/2 + \pi^4/16 + 2\pi^2\right) = \left(0, 0, \frac{3}{2}\pi^2 + \frac{1}{16}\pi^4\right).$$

In conclusione

$$\kappa = \frac{\pi^2}{2}\left(3+\frac{1}{8}\pi^2\right)\frac{1}{\pi^3\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)^{3/2}} = \frac{1}{2\pi}\frac{(3+\pi^2/8)}{(1+\pi^2/16)^{3/2}} = \frac{4}{\pi}\frac{24+\pi^2}{(16+\pi^2)^{3/2}}.$$

Esercizio 2 (7 punti)
Si consideri la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $f(x,y) = (x-y)(x^2-2)$. Si determinino i punti stazionari di f e si stabilisca se sono di minimo locale, di massimo locale o di sella.

Soluzione:

Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (x^2-2)+(x-y)2x = 3x^2-2xy-2 \Rightarrow 6 \mp 2\sqrt{2}\,y - 2 = 0 \text{ per } y = \pm\sqrt{2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -(x^2-2) = 0 \text{ per } x = \pm\sqrt{2}$$

Dunque i punti stazionari sono $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

L'hessiano vale:

$$H = \begin{pmatrix} 6x-2y & -2x \\ -2x & 0 \end{pmatrix},$$

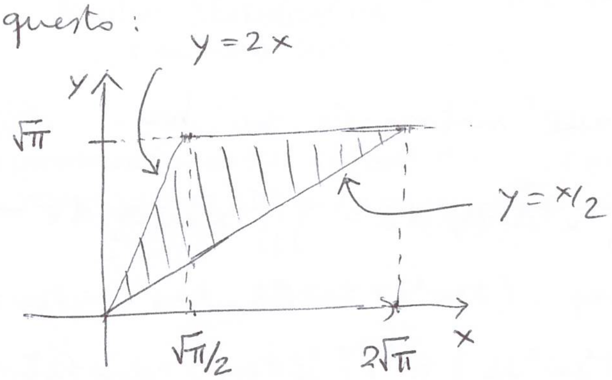
e siccome $\det H = -4x^2$ si ha valore <0 sia per $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ che per $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$. Quindi i punti stazionari sono ambedue di <u>sella</u>.

Esercizio 3 (7 punti)

Sia T il triangolo delimitato dalle rette $y = \sqrt{\pi}$, $y = x/2$ e $y = 2x$. Si calcoli $\iint_T yx\cos(x^2)\,dxdy$.

Soluzione:

Il triangolo è questo:



Quindi, integrando per fili orizzontali, si ha:

$$\iint_T yx\cos(x^2)\,dxdy = \int_0^{\sqrt{\pi}} dy \left[\int_{y/2}^{2y} yx\cos(x^2)\,dx \right] =$$

$$= \int_0^{\sqrt{\pi}} y \left[\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{2} \Big|_{y/2}^{2y} \right] dy = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}} \left[y \operatorname{sen}(4y^2) - y \operatorname{sen}(y^2/4) \right] dy =$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos(4y^2)}{8} \Big|_0^{\sqrt{\pi}} + \frac{\cos(y^2/4)}{1/2} \Big|_0^{\sqrt{\pi}} \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cancel{\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)} + \cos(\pi/4) - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1.$$

Esercizio 4 (8 punti)

Sia C il cubo che nel piano $\{z = 0\}$ ha come base il quadrato Q di vertici $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ e $(0, -1)$. Sia K il cilindro di altezza infinita che come asse ha l'asse z e come sezione nel piano $\{z = 0\}$ l'ellisse $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 4x^2 + 16y^2 \leq 1\}$. Sia $D = C \setminus K$ (cioè la parte di cubo esterna al cilindro). Si calcoli $\iiint_D x^2\, dxdydz$.

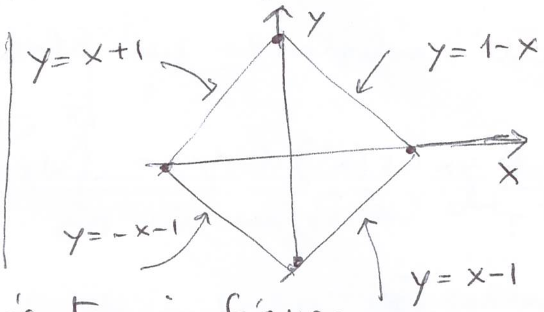
Soluzione:

Per l'additività dell'integrale si ha

$$\iiint_D x^2 dxdydz = \iiint_C x^2 dxdydz - \iiint_{K\cap C} x^2 dxdydz .$$

Dunque, essendo Q un quadrato di lato $\sqrt{2}$, l'altezza di C è appunto $\sqrt{2}$ e si ha

$$\iiint_C x^2 dxdydz = \sqrt{2} \iint_Q x^2 dxdy .$$



Q è delimitato dalle rette indicate in figura.

Dunque, per simmetria di Q e della funzione x^2,

$$\iint_Q x^2 dxdy = 4 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2 dy = 4 \int_0^1 (x^2 - x^3) = 4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3} .$$

L'ellisse E ha semiassi $a = 1/2$ e $b = 1/4$, dunque in coordinate ellittiche può essere espresso come $x = \frac{1}{2}\rho\cos\theta$, $y = \frac{1}{4}\rho\,\mathrm{sen}\,\theta$, $\rho \in [0,1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Dunque, cambiando variabile $(x,y) \rightsquigarrow (\rho, \theta)$:

jacobiano!

$$\iiint_{K\cap C} x^2 dxdydz = \sqrt{2} \iint_E x^2 dxdy = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{1}{4}\rho^2\cos^2\theta \cdot \frac{1}{8}\rho\, d\rho =$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta \cdot \frac{1}{32} \int_0^1 \rho^3 d\rho = \sqrt{2}\, \frac{\pi}{32} \cdot \frac{1}{4} = \sqrt{2}\, \frac{\pi}{128} .$$

[Si ricordi che $\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = \pi$...

In totale

$$\iiint_D x^2 dxdydz = \sqrt{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{128}\right).$$