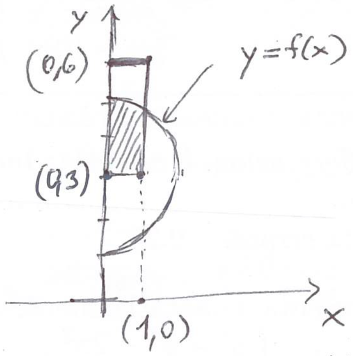
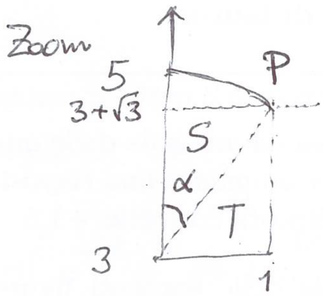
ANALISI MATEMATICA 1 - Quinto appello	6 settembre 2018

1. (6 punti) Sia C il cerchio di centro $(0,3)$ e raggio 2. Sia R il rettangolo di vertici $(0,3)$, $(0,6)$, $(1,6)$ e $(1,3)$. Si determini l'area della regione $Q = C \cap R$ data dall'intersezione di C ed R.





Una circonferenza è il luogo dei punti equidistanti da un centro. Quindi la sua equazione è data da $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$ [dal teorema di Pitagora $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$ è la distanza di (x,y) da (x_0,y_0), al quadrato...]. Nel nostro caso $x^2+(y-3)^2=4$. Ricavando y in funzione di x abbiamo $y-3 = \pm\sqrt{4-x^2}$ e quindi la parte che ci interessa, che è più in alto della quota $y=3$, è data da $y = 3+\sqrt{4-x^2}$.

Per calcolare l'area A richiesta dobbiamo calcolare

$$A = \int_0^1 \left(3+\sqrt{4-x^2}-3\right)dx = \int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx \underset{\downarrow}{=} \int_0^{\pi/6} \sqrt{4-4\,\text{sen}^2 t}\; 2\cos t\, dt =$$

$x = 2\,\text{sen}\, t$

$dx = 2\cos t\, dt$

$x=0 \rightarrow t=0$

$x=1 \rightarrow \text{sen}\, t = 1/2 \rightarrow t = \pi/6$

$$= \int_0^{\pi/6} 4\cos^2 t\, dt \overset{\text{per parti}}{=} 4\, \frac{t+\text{sen}\, t \cos t}{2}\Big|_0^{\pi/6} = 2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Geometricamente: il punto P ha coordinate 1 e $y_0 = 3+\sqrt{3}$ (si valuta $y = 3+\sqrt{4-x^2}$ per $x=1$...). Dunque il triangolo T ha area $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3} = \sqrt{3}/2$. L'angolo α è tale da avere $\overset{\to\text{ raggio}}{2}\,\text{sen}\,\alpha = 1$, quindi $\alpha = \pi/6$, un dodicesimo di angolo giro. Quindi l'area del settore circolare S è $\frac{1}{12}\cdot 2^2\pi = \pi/3$. Poi si somma...

ANALISI MATEMATICA 1 - Quinto appello	6 settembre 2018

2. (6 punti) (i) Si determini l'insieme dei valori $x \in \mathbf{R}$ per cui è convergente la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)} \left(6\,\frac{\arctan(3x)}{\pi}\right)^n .$$

(ii) Per $w \in (0,1)$ si determini la somma della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)} w^n$.

(i) Ponendo $t = 6\,\frac{\arctan(3x)}{\pi}$ ci riconduciamo a una serie di potenze: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} t^n$. Il raggio di convergenza è dato da $r = 1/L$, ove $L = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.

Quindi $L = \lim \left(\frac{1}{n+2} \cdot n+1\right) = 1$, e così $r = 1$.

Si ha quindi convergenza per $\left| 6\,\frac{\arctan(3x)}{\pi} \right| < 1$, cioè

$$-\pi/6 < \arctan(3x) < \pi/6 \Rightarrow -\tan \pi/6 < 3x < \tan \pi/6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3\sqrt{3}} < x < \frac{1}{3\sqrt{3}},$$

e non convergenza per $x < -\frac{1}{3\sqrt{3}}$ e $x > \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Negli estremi si ha:

- $x = -\frac{1}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{6}{\pi} \arctan(3x) = -1$ e la serie è $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} (-1)^n$, convergente per il criterio di Leibniz.
- $x = \frac{1}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{6}{\pi} \arctan(3x) = 1$ e la serie è $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$, divergente.

L'insieme di convergenza è dunque $-\frac{1}{3\sqrt{3}} \leq x < \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

(ii) Si ha, per $w \in (0,1)$

le serie di potenze si possono integrare termine a termine

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} w^n = \frac{1}{w} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} w^{n+1} = \frac{1}{w} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^w s^n \, ds \right) = \frac{1}{w} \int_0^w \left(\sum_{n=0}^{\infty} s^n \right) ds =$$

$$= \frac{1}{w} \int_0^w \frac{1}{1-s}\, ds = \frac{1}{w} \left[-\log(1-s) \right]\Big|_0^w = -\frac{\log(1-w)}{w} = \frac{1}{w} \log \frac{1}{1-w}.$$

ANALISI MATEMATICA 1 - Quinto appello	6 settembre 2018

3. (6 punti) (i) Si determini la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - 3y = 2e^{3x} \\ y(0) = -\frac{2}{3}. \end{cases}$$

(ii) Per la soluzione $y(x)$ il punto $x_0 = 0$ è punto di massimo relativo, di minimo relativo o di flesso?

È un'equazione del 1° ordine, lineare, non-omogenea. La formula risolutiva dà:

$$y(x) = \left(-\frac{2}{3} + \int_0^x e^{-\int_0^t 3ds} 2e^{3t}\, dt\right) e^{\int_0^x 3ds} = \left(-\frac{2}{3} + 2\int_0^x e^{-3t} e^{3t}\, dt\right) e^{3x} =$$

$$= \left(-\frac{2}{3} + 2\int_0^x 1\, dt\right) e^{3x} = \left(-\frac{2}{3} + 2x\right) e^{3x}.$$

Si può risolvere anche con le tecniche presentate per le equazioni a coefficienti costanti. Il polinomio associato è $r-3$, e ha radice $r=3$. Dunque la soluzione generale dell'omogenea è

$$y_0(x) = c\, e^{3x}.$$

Una soluzione particolare della non-omogenea si ottiene con il metodo di somiglianza. Siccome il termine $2e^{3x}$ è soluzione dell'omogenea, bisogna provare con $y_*(x) = Axe^{3x}$.

Si ha $y_*'(x) = Ae^{3x} + 3Axe^{3x}$, e imponendo $y' - 3y = 2e^{3x}$ viene

$$2e^{3x} = y_*' - 3y_* = Ae^{3x} + \cancel{3Ax}e^{3x} - \cancel{3Ax}e^{3x} \Rightarrow A = 2.$$

La soluzione generale dell'equazione è dunque

$$y(x) = ce^{3x} + 2xe^{3x}.$$

Imponendo il dato di Cauchy si ha $-\frac{2}{3} = c$, e si è finito come nel caso precedente.

(ii) Si ha $y'(x) = -\cancel{2e^{3x}} + \cancel{2e^{3x}} + 6xe^{3x}$ e quindi $y'(0) = 0$. Poi si ha $y''(x) = 6e^{3x} + 18xe^{3x}$ e quindi $y''(0) = 6 > 0$. Il punto $x_0 = 0$ è dunque di minimo relativo per $y(x)$.