COGNOME [ ] NOME [ ] Matr. [ ]

Analisi Matematica II (EA)

8 novembre 2013

Esercizio 1 (7 punti)

Si determini se le funzioni

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3y^3}{x^3+y^2} & \text{per } x^3\neq -y^2\\ 0 & \text{per } (x,y)=(0,0)\end{cases}\quad,\quad g(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3y^2}{x^4+y^2} & \text{per } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{per } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

sono differenziabili in $(0,0)$.

Risultati: NO. Non è continua | SI, è differenziabile

Calcoli:

Il denominatore di f si annulla su una curva $(x=-y^{2/3}\ldots)$. Dunque può essere reso piccolo anche restando "lontani" da $(0,0)$. Questo fa pensare che ci siano curve su cui f, nell'avvicinarsi a $(0,0)$, tenda all'infinito. Siccome al numeratore c'è un polinomio di grado 6, si può provare a considerare f sulla curva $x^3=-y^2+y^6$ (cioè $x=(-y^2+y^6)^{1/3}$).

Si ha, per $y\neq 0$:

$$f((-y^2+y^6)^{1/3},y)=\frac{(-y^2+y^6)\,y^3}{y^6}=\frac{-1+y^4}{y}\to-\infty \text{ per } y\to 0^+.$$

Quindi f non è continua in $(0,0)$, e dunque neanche differenziabile.

La funzione g è 0 sugli assi, quindi i suoi rapporti incrementali rispetto a x e rispetto a y sono nulli, e dunque $\nabla g(0,0)=(0,0)$. Per controllare la differenziabilità devo vedere se è infinitesimo $[g(x,y)-g(0,0)-\nabla g(0,0)\cdot(x,y)]/\sqrt{x^2+y^2}$

Si ha

$$\frac{|g(x,y)-g(0,0)-\nabla g(0,0)\cdot(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{|x^3y^2|}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\underset{\left[\frac{y^2}{x^4+y^2}\leq 1\right]}{\leq}\frac{|x|^3}{\sqrt{x^2+y^2}}\underset{\left[\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq 1\right]}{\leq}|x|^2,$$

e siccome $x^2\to 0$ si conclude che g è differenziabile.

Esercizio 2 (8 punti)

Sia $\vec{v}(x,y,z) = (y, yx, x)$ e il sostegno della curva $\vec{\alpha}$ sia dato dall'intersezione fra gli insiemi

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2 + 4y^2 - 8y + 3 = 0\,, z \in \mathbf{R}\} \quad , \quad P = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, y - x - z = 1\}\,.$$

Si calcoli $\int_\alpha \vec{v} \cdot d\vec{l}$, scegliendo a piacere l'orientazione di $\vec{\alpha}$.

Risultato: $\boxed{\int_\alpha \vec{v}\cdot d\vec{\ell} = \pm \pi/2 \text{ (a seconda dell'orientazione)}}$

Calcoli:

L'equazione $x^2+4y^2-8y+3=0$ si può riscrivere come

$$0 = x^2 + 4y^2 - 8y + 4 - 1 = x^2 + 4(y-1)^2 - 1\,,$$

e dunque fornisce l'equazione di un'ellisse di semiassi 1 e $1/2$, centrato in $(0,1)$. Dunque K è un cilindro infinito a base ellittica, e una parametrizzazione di $\vec{\alpha}$ è data da

$$\vec{\alpha}(\theta) = \begin{cases} \cos\theta \\ 1 + 1/2 \operatorname{sen}\theta \\ \cancel{1} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta - \cos\theta - \cancel{1}\,, \end{cases} \quad , \theta \in [0, 2\pi]$$

poiché voglio $z = y - x - 1$, l'equazione che definisce P.

Dunque l'integrale è dato da

$$\int_\alpha \vec{v}\cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} \left(1+\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\theta, \left(1+\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\right)\cos\theta, \cos\theta\right) \cdot \underbrace{\vec{\alpha}'(\theta)}_{= (-\operatorname{sen}\theta,\, \frac{1}{2}\cos\theta,\, \frac{1}{2}\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)} d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\operatorname{sen}\theta - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2\theta + \tfrac{1}{2}\cos^2\theta + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta + \tfrac{1}{2}\cos^2\theta + \cos\theta\operatorname{sen}\theta\right) d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta\right) d\theta = \pi/2\,,$$

poiché

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta = \pi\,, \quad \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta = 0\,, \quad \int_0^{2\pi} \cos\theta\operatorname{sen}\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}\Big|_0^{2\pi} = 0\,, \quad \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta\cos^2\theta\, d\theta = -\frac{\cos^3\theta}{3}\Big|_0^{2\pi} = 0\,.$$

Esercizio 3 (8 punti)

Si trovino i punti stazionari in $\mathbf{R}^3$ della funzione $f(x, y, z) = e^{y-z}(y^2 - xz + y)$, e si stabilisca se sono di massimo relativo, minimo relativo o sella.

Risultato: $\boxed{\left(-2-\sqrt{5}, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}, 0\right) \text{ e } \left(-2+\sqrt{5}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, 0\right) \text{ ; sono punti di sella.}}$

Calcoli:

Calcolando le derivate si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{y-z}(-z) \ ; \ \frac{\partial f}{\partial y} = e^{y-z}(y^2 - xz + y) + e^{y-z}(2y+1) = e^{y-z}(y^2 - xz + 3y + 1);$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = e^{y-z}(-y^2 + xz - y) + e^{y-z}(-x) = e^{y-z}(-y^2 + xz - y - x).$$

Eguagliandole a 0, dalla prima si ha $z = 0$, dalla seconda (già usando $z = 0$...) $y^2 + 3y + 1 = 0$ e dalla terza $x = -y^2 - y$.

Le radici di $y^2 + 3y + 1 = 0$ sono $y = \frac{-3 \mp \sqrt{9-4}}{2} = \frac{-3 \mp \sqrt{5}}{2}$, da cui si ricava

$$x = -\left(\frac{-3 \mp \sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{-3 \mp \sqrt{5}}{2} = -\frac{9+5 \pm 6\sqrt{5}}{4} - \frac{-3 \mp \sqrt{5}}{2} = -2 \mp \sqrt{5}.$$

I punti stazionari sono quindi $\left(-2-\sqrt{5}, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ e $\left(-2+\sqrt{5}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, 0\right)$.

Le derivate seconde valgono:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \ ; \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -z e^{y-z} \ ; \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = e^{y-z} z - e^{y-z} = e^{y-z}(z-1),$$

dunque l'hessiano ha una riga non tutta nulla con uno 0 sulla diagonale (per $z = 0$ si ha $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -e^{y} \neq 0$...), quindi i due punti sono due punti di <u>sella</u>.

[Per completezza, ma <u>non</u> necessario:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{y-z}(y^2 - xz + 3y + 1) + e^{y-z}(2y+3) = e^{y-z}(y^2 + 5y - xz + 4);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = e^{y-z}(-y^2 + xz - 3y - 1) + e^{y-z}(-x) = e^{y-z}(-y^2 - 3y - 1 + xz - x);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = e^{y-z}(y^2 - xz + y + x) + e^{y-z}(x) = e^{y-z}(y^2 + y - xz + 2x) \ldots]$$

Esercizio 4 (7 punti)

Si determinino il massimo assoluto e il minimo assoluto della funzione $g(x,y) = x^2 + xy - y^3$ sull'insieme

$$Q = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, y^2 + x = 0\,, -1 \leq y \leq 2\}\,.$$

Risultato: Max : 3 ; Min : $-\frac{27}{16}$.

Calcoli:

Su Q si ha che g diventa [definizione di h...

$$g(-y^2,y) = +y^4 - y^3 - y^3 = y^4 - 2y^3 =: h(y)$$

Facendo la derivata rispetto a y si ottiene

$$h'(y) = 4y^3 - 6y^2 = 2y^2(2y-3) = 0 \quad \text{per } y=0 \text{ e } y = 3/2 .$$

Dobbiamo dunque confrontare $h(-1) = 3$, $h(2) = 0$, $h(0) = 0$,

$$h(3/2) = \frac{81}{16} - 2\,\frac{27}{8} = \frac{81-108}{16} = -\frac{27}{16} .$$

Il massimo assoluto è dunque 3, il minimo assoluto è $-\frac{27}{16}$.

Con i moltiplicatori di Lagrange, si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} \nabla g = \lambda \nabla (y^2+x) \\ y^2 + x = 0 \,, \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} 2x + y - \lambda = 0 \\ x - 3y^2 - 2\lambda y = 0 \longrightarrow -y^2 - 3y^2 - 2y\lambda = 0 \longrightarrow -2y(2y+\lambda) = 0 \\ y^2 + x = 0 \longrightarrow x = -y^2 \end{cases}$$

$$\boxed{y = 0 \to x=0,\ \lambda=0} \qquad y = -\lambda/2 \to x = -\lambda^2/4 .$$

Inserendo $x = -\lambda^2/4$, $y = -\lambda/2$ nella prima equazione si ha

$$0 = -\lambda^2/2 - \lambda/2 - \lambda = -\frac{\lambda^2}{2} - \frac{3}{2}\lambda = -\frac{\lambda}{2}(\lambda+3) \quad \begin{cases} \lambda = 0 \to x=0,\ y=0 \\ \boxed{\lambda = -3 \to x = -9/4,\ y = +3/2} \end{cases}$$

Dunque occorre confrontare i valori di g nei punti $(0,0)$, $(-9/4, 3/2)$, $\overbrace{(-1,-1),\ (-4,2)}^{\text{punti estremi di } Q}$, e si ottengono i valori $0, -\frac{27}{16}, 3, 0$, trovando massimo 3 e minimo $-\frac{27}{16}$.