COGNOME ____ NOME ____ Matr. ____

Analisi Matematica 2

9 gennaio 2018

Esercizio 1. Determinare, se esistono, massimo assoluto e minimo assoluto della funzione $f(x,y) = |x+1/4| + |y-1/2|$ sul quadrato $Q = [-1,1] \times [-1,1]$. Determinare inoltre, se esistono, massimo assoluto e minimo assoluto di f in $\mathbf{R}^2$.

Soluzione.

Poiché u è compatto, e f è continua, esistono massimi e minimi assoluti di f su Q. Poiché $f \geq 0$, e in $(-1/4, 1/2)$ la funzione vale 0, il minimo assoluto è 0.
Dividiamo Q in quattro settori. Sia Q_1 la parte di Q in cui $x \geq -1/4, y \geq 1/2$, Q_2 la parte di Q in cui $x \leq -1/4, y \geq 1/2$, Q_3 la parte di Q in cui $x \leq -1/4, y \leq 1/2$, Q_4 la parte di Q in cui $x \geq -1/4, y \leq 1/2$. La funzione f assumerà espressioni f_1, f_2, f_3, f_4, a seconda del settore su cui la stiamo andando a studiare. Fuori dalle rette $x = -1/4$ e $y = 1/2$ la funzione è differenziabile, quindi i massimi interni a Q andranno cercati tra i punti che annullano il gradiente di f. Tuttavia, i gradienti di f_i, con $i = 1 \dots 4$ sono sempre non nulli, quindi i massimi andranno cercati sul bordo di Q e sulle rette di non differenziabilità. Basterà quindi andare a restringere la nostra funzione sulle rette $x = 1, -1, -1/4$ e sulle rette $y = 1, -1, 1/2$, facendo attenzione a scegliere la giusta f_i, $i = 1, \dots 4$, e studiandone la funzione in una variabile che ne risulta. Poiché la derivata prima delle funzioni in una variabile risultanti da queste restrizioni sulle rette sono tutte non nulle, i massimi andranno infine cercati tra i vertici e tra le intersezioni delle rette di non differenziabilità con Q. Cioè in $(1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1), (-1/4,1)(-1/4,-1), (1,1/2), (-1,1/2)$. Andando a confrontare i valori ottenuti su questi punti si ottiene che il massimo vale $11/4$ ed è assunto in $(1,-1)$.

Chiaramente 0 è anche minimo assoluto di f in $\mathbf{R}^2$, mentre il massimo assoluto di f in $\mathbf{R}^2$ non esiste: è sufficiente ad esempio restringersi alla retta $x = -1/4$ e si ha che $f(-1/4, y)$ tende a $+\infty$ per $y \to +\infty$.

Esercizio 2. Dato il campo vettoriale $\vec{F}(x,y,z) = (\frac{y}{x+2} + yz, \log(x+2) + xz, xy)$ stabilire se nel suo insieme di definizione è conservativo e in tal caso determinare tutti i suoi potenziali. Inoltre, data $\vec{\gamma}_n(t) = (\frac{1}{2}\sin(nt), \frac{1}{2}\cos(nt), 0)$, con n intero ≥ 1 e $t \in [0,\pi]$, calcolare per ogni $n \geq 1$ il valore dell'integrale di seconda specie $\int_{\gamma_n} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Soluzione.

L'insieme di definizione del campo vettoriale è dato dall'insieme semplicemente connesso:

$$\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x > -2\}$$

Inoltre non è difficile verificare che il campo è irrotazionale

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_x}{\partial y} &= \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{1}{x+2} + z;\\
\frac{\partial F_y}{\partial z} &= \frac{\partial F_z}{\partial y} = x;\\
\frac{\partial F_z}{\partial x} &= \frac{\partial F_x}{\partial z} = y.
\end{aligned}$$

Il campo è dunque conservativo, possiamo determinarne i potenziali.
Risolvendo l'integrale

$$\int xy \; dz$$

Notiamo immediatamente che i nostri potenziali saranno della forma:

$$U(x,y,z) = xyz + G(x,y)$$

Derivando, ad esempio, rispetto a x otteniamo

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}(x,y,z) = yz + \frac{\partial G}{\partial x}(x,y).$$

da cui ricaviamo immediatamente (integrando)

$$U(x,y,z) = xyz + y\log(x+2) + H(y).$$

Replicando l'operazione derivando rispetto a y otteniamo infine

$$U(x,y,z) = xyz + y\log(x+2) + K, \quad K \in \mathbf{R}.$$

Consideriamo ora la curva $\gamma_n(t)$, dapprima con n <u>pari</u>. Per ogni N pari, la curva γ_n è una curva chiusa, pertanto $\int_{\gamma_n} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.

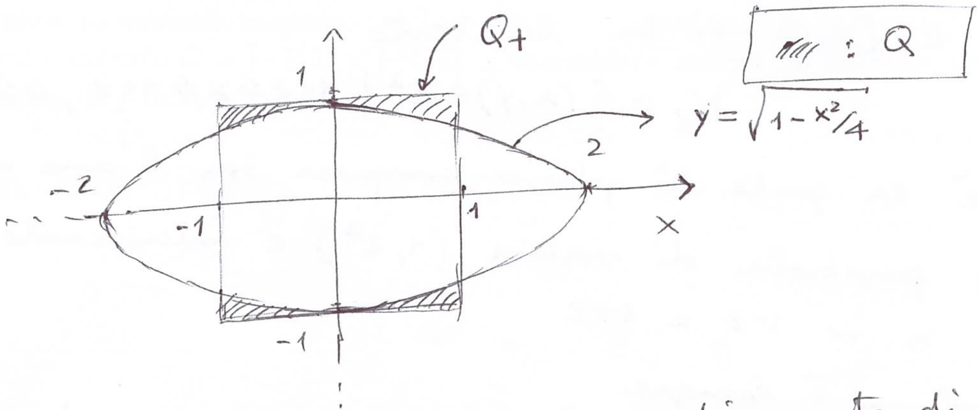
Se invece n è <u>dispari</u>; sfruttando la periodicità di seno e coseno avremo

$$\int_{\gamma_n} \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(\pi) - U(0) = -\log 2.$$

Esercizio 3. Sia Q la regione esterna all'ellisse $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\}$ ed interna al quadrato $[-1,1] \times [-1,1]$. Si calcoli $\iint_Q |x|\, dxdy$.

Soluzione:

L'ellisse è di semiassi 2 (rispetto a x) e 1 (rispetto a y). La figura che illustra la situazione è



La funzione $|x|$ è simmetrica rispetto al cambiamento di variabile $(x,y) \to (-x,y)$ e anche rispetto al cambiamento di variabile $(x,y) \to (x,-y)$. Dunque basta integrare su $Q_+ = Q \cap \{x \geq 0, y \geq 0\}$ (e moltiplicare per 4) la funzione x (in Q_+ si ha $|x| = x$ ...). L'equazione dell'ellisse in quel quadrante è $y = \sqrt{1-x^2/4}$. Integrando per fili verticali si ha

$$\iint_Q |x|\, dxdy = 4 \iint_{Q_+} x\, dx dy = 4 \int_0^1 dx \left[\int_{\sqrt{1-x^2/4}}^1 x\, dy \right] = 4 \int_0^1 x \left(1 - \sqrt{1-x^2/4}\right) dx =$$

$$= 4 \left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \int_0^1 x \sqrt{1-x^2/4}\, dx \right) \underset{(*)}{=} 4 \left(1/2 - \left(1 - x^2/4\right)^{3/2} \frac{2}{3} (-2) \Big|_0^1 \right) =$$

$$= 4 \left(1/2 + \frac{4}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^{3/2} - \frac{4}{3} \right) = 4\left(-\frac{5}{6}\right) + \frac{16}{3} \cdot \frac{3}{4} \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} - \frac{10}{3}.$$

(*) La primitiva di $t\sqrt{1-t^2}$ è $(1-t^2)^{3/2} \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)$, dove il fattore $\left(-\frac{1}{2}\right)$ tiene conto della derivata $-2t$ di $-t^2$.

Esercizio 4. Si calcoli il volume dell'insieme

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, 1 - z \le x \le 1 + z, 0 \le y \le z^2 - (x-1)^2, 0 \le z \le 1\}\,.$$

Soluzione:

Il volume si può calcolare integrando per strati: per ogni $z \in [0,1]$ si ha lo strato

$$K_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1-z \le x \le 1+z\,,\, 0 \le y \le z^2-(x-1)^2\},$$

che è la parte di piano compresa fra l'asse delle x e la parabola di vertice $(1, z^2)$ e intersecante l'asse delle x in $1-z$ e $1+z$.

Il volume è dunque

$$V = \int_0^1 dz \int_{1-z}^{1+z} dx \int_0^{z^2-(x-1)^2} dy = \int_0^1 dz \int_{1-z}^{1+z} [z^2-(x-1)^2]\, dx = \int_0^1 dz \left(z^2 \cdot 2z - \frac{(x-1)^3}{3} \Big|_{1-z}^{1+z} \right) =$$

$$= \int_0^1 dz \left(2z^3 - \frac{z^3}{3} + \frac{(-z)^3}{3} \right) = \int_0^1 \frac{4}{3} z^3\, dz = \frac{z^4}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Si può anche calcolare l'integrale per fili lungo l'asse y, con base nel piano xz data da $T = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1-z \le x \le 1+z, 0 \le z \le 1\}$.

T è un triangolo, semplice rispetto a z, con $x \in [0,2]$ e $1-x \le z \le 1$ per $x \in [0,1]$, $x-1 \le z \le 1$ per $x \in [1,2]$.

Si ha quindi $V = V_1 + V_2$, con

$$V_1 = \int_0^1 dx \int_{1-x}^1 dz \int_0^{z^2-(x-1)^2} dy = \int_0^1 dx \int_{1-x}^1 [z^2-(x-1)^2]\, dz = \int_0^1 \left[\frac{1}{3} z^3 \Big|_{1-x}^1 - (x-1)^2 x \right] dx =$$

$$= \int_0^1 \Big[\frac{1}{3} - \frac{(1-x)^3}{3} - \underbrace{x(x-1)^2}_{x^3-2x^2+x} \Big] dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4}(1-x)^4 \Big|_0^1 - \frac{1}{4} x^4 \Big|_0^1 + \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^1 - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{12} - \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4-1-3+8-6}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

Analogamente

$$V_2 = \int_1^2 dx \int_{x-1}^1 dz \int_0^{z^2-(x-1)^2} dy = \int_1^2 dx \int_{x-1}^1 [z^2-(x-1)^2]\, dz = \int_1^2 \Big[\frac{1}{3} z^3 \Big|_{x-1}^1 \overbrace{-(x-1)^2(2-x)}^{-x^3+4x^2-5x+2} \Big] dx =$$

$$= \int_1^2 \Big[\frac{1}{3} - \frac{(x-1)^3}{3} \Big] dx + \left(\frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x \right)\Big|_1^2 = \frac{1}{3} - \frac{(x-1)^4}{12}\Big|_1^2 + 4 - \frac{32}{3} + 10 - 4 -$$

$$- \frac{1}{4} + \frac{4}{3} - \frac{5}{2} + 2 = \dots = \frac{1}{6}.$$