ANALISI MATEMATICA 1 - Quinto appello	9 settembre 2015

1. (6 punti) Disegnare il grafico qualitativo della funzione $f(x) = |x^2 - 2x|e^{-x}$. In particolare si determinino dominio, eventuali asintoti, punti di massimo e di minimo e di non derivabilità (non è richiesto lo studio di concavità/convessità).

Siccome $f(x) = |x^2-2x|e^{-x} = |(x^2-2x)e^{-x}|$, basta studiare $g(x) = (x^2-2x)e^{-x}$ e poi "ribaltarne" il grafico nelle zone dove essa è <0.

Si ha $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ (e^x va all'infinito più velocemente di ogni potenza...), $g(0) = 0$ e $g(2) = 0$.

Il dominio di g (e dunque di f) è tutto $\mathbb{R}$. L'asse delle x è un asintoto per $x\to+\infty$, per $x\to-\infty$ non ci sono asintoti (perché e^x va all'infinito più velocemente di ogni potenza).

Vediamo la derivata prima: si ha

$$g'(x) = (2x-2)e^{-x} - (x^2-2x)e^{-x} = e^{-x}(-x^2+4x-2).$$

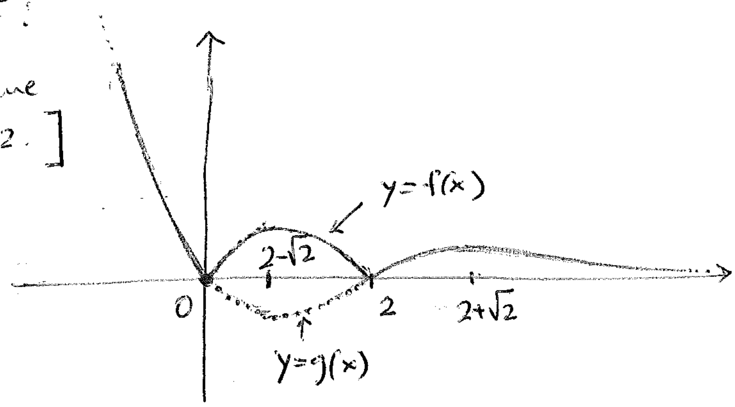
Il segno è >0 fra le radici di $g'(x)=0$, che sono

$$x = 2\mp\sqrt{4-2} = 2\mp\sqrt{2}.$$

Dunque g cresce per $2-\sqrt{2} < x < 2+\sqrt{2}$, decresce per $x < 2-\sqrt{2}$ e $x > 2+\sqrt{2}$.

Il grafico di g è:

[Quello di f si ottiene "ribaltando" fra 0 e 2.]



Punti di non derivabilità sono 0 e 2: infatti $\lim_{x\to0^-} f'(x) = \lim_{x\to0^-} e^{-x}(-x^2+4x-2) = -2$, $\lim_{x\to0^+} f'(x) = \lim_{x\to0^+} e^{-x}(x^2-4x+2) = 2$; $\lim_{x\to2^-} f'(x) = \lim_{x\to2^-} e^{-x}(x^2-4x+2) = e^{-2}(-2)$, $\lim_{x\to2^+} f'(x) = \lim_{x\to2^+} e^{-x}(-x^2+4x-2) = e^{-2}\cdot 2$.

ANALISI MATEMATICA 1 - Quinto appello	9 settembre 2015

2. **(6 punti)** Per ogni valore del parametro $\alpha > 0$ si determinino tutti i valori $x \in \mathbf{R}$ per cui la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^\alpha + 2}{n^3 - e^{-n}} \left(\frac{x^2-4}{x^2+2}\right)^n$$

è convergente.

Ponendo $t = \frac{x^2-4}{x^2+2}$, si ottiene una serie di potenze in t.

Il raggio di convergenza è $r = 1/L$, ove

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(n+1)^\alpha+2}{(n+1)^3 - e^{-(n+1)}}\right|}{\left|\frac{n^\alpha+2}{n^3-e^{-n}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^\alpha+2}{n^\alpha+2} \lim_{n\to\infty} \frac{n^3-e^{-n}}{(n+1)^3 - e^{-n+1}}.$$

Nel primo fattore n^α predomina su 2, nel secondo fattore n^3 predomina su e^{-n}. Dunque

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^3 = 1 \quad \underline{\text{per ogni } \alpha>0.}$$

Si ha allora convergenza per $\left|\frac{x^2-4}{x^2+2}\right| < 1$, non si ha convergenza per $\left|\frac{x^2-4}{x^2+2}\right| > 1$. Questo significa che c'è convergenza per

$$|x^2-4| < x^2+2 \iff \underset{\uparrow \text{sempre}}{-x^2-2 < x^2-4} < x^2+2 \iff 2x^2>2 \iff x<-1 \text{ e } x>1.$$

Dunque c'è convergenza per $x<-1$ e $x>1$ <u>per ogni $\alpha>0$</u>, e non c'è convergenza per $-1<x<1$ <u>per ogni $\alpha>0$</u>.

Vediamo negli estremi $x=-1$ e $x=1$. Si ha sempre $x^2=1$, dunque

$$\left.\begin{matrix} x=-1 \\ x=+1 \end{matrix}\right] \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^\alpha+2}{n^3-e^{-n}}(-1)^n.$$

Se $\alpha \geq 3$, il termine generale $\frac{n^\alpha+2}{n^3-e^{-n}}(-1)^n$ <u>non</u> tende a 0, dunque la serie non è convergente in $x=-1$ e $x=1$.

Se $0<\alpha<3$ il termine generale tende a 0; se $\frac{n^\alpha+2}{n^3-e^{-n}}$ decresce, dal criterio di Leibniz si ha convergenza della serie.

La derivata di $\frac{x^\alpha+2}{x^3-e^{-x}}$ è (ci interessa solo per $x>0$...)

$$\left(\frac{x^\alpha+2}{x^3-e^{-x}}\right)' = \frac{\alpha x^{\alpha-1}(x^3-e^{-x}) - (x^\alpha+2)(3x^2+e^{-x})}{(x^3-e^{-x})^2} = \frac{(\alpha-3)x^{\alpha+2} - e^{-x}(2+\alpha x^{\alpha-1}+x^\alpha) - 6x^2}{(x^3-e^{-x})^2},$$

ed è <0 per $\alpha<3$. Quindi il coefficiente $\frac{n^\alpha+2}{n^3+e^{-n}}$ decresce.

In conclusione: per $0<\alpha<3$ c'è convergenza <u>anche</u> per $x=-1$ e $x=1$.

ANALISI MATEMATICA 1 - Quinto appello	9 settembre 2015

3. **(6 punti)** Determinare la soluzione del problema di Cauchy (definito per $t \neq 0$)

$$\begin{cases} y' = \frac{y^3+5t^3}{ty^2} \\ y(1) = -4\,. \end{cases}$$

[Suggerimento: (i) provare che se y è soluzione di questo problema di Cauchy, allora la funzione z tale che $y(t) = tz(t)$ soddisfa l'equazione $z' = \frac{5}{tz^2}$, con uno specifico dato di Cauchy; (ii) determinare la soluzione z di questo nuovo problema di Cauchy; (iii) concludere determinando y.]

(i) Si ha $y' = z + tz'$, dunque

$$z + tz' = \frac{t^3z^3 + 5t^3}{t\cdot t^2z^2} = \frac{z^3+5}{z^2} = z + \frac{5}{z^2} \Longrightarrow tz' = \frac{5}{z^2} \Rightarrow z' = \frac{5}{tz^2}\,.$$

Il dato di Cauchy è: $-4 = y(1) = 1\cdot z(1) \Rightarrow z(1) = -4$.

(ii) E' un'equazione del 1° ordine, non-lineare, a variabili separabili: si ha

$$z' = \frac{5}{tz^2} \Longleftrightarrow z^2 dz = \frac{5}{t}dt \Rightarrow \int z^2 dz = 5\int \frac{1}{t}dt\,,$$

quindi

$$\frac{z^3}{3} = 5\log|t| + c\,.$$

Imponendo il dato di Cauchy:

$$-\frac{64}{3} = 5\cancel{\log 1} + c \Rightarrow c = -\frac{64}{3}\,,$$

e dunque

$$z(t) = \sqrt[3]{15\log|t| - 64}\,.$$

(iii) Siccome $y(t) = tz(t)$, si ha

$$y(t) = t\sqrt[3]{15\log|t| - 64}\,.$$