Il volume della sfera

Come esercizio di integrali doppi calcoliamo il volume della sfera di raggio R, cioè dell'insieme $B_R = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$.
La sfera può essere vista come l'insieme compreso fra il grafico delle funzioni $q_+(x,y) = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$ e $q_-(x,y) = -\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, al variare di x e y nel cerchio $C_R = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \le R^2\}$.
Dunque si ha

$$\mathrm{vol}(B_R) = \iint_{C_R} [q_+(x.y) - q_-(x,y)]\, dxdy = 2\iint_{C_R} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\, dxdy\,. \tag{1}$$

Il cerchio C_R è un insieme sia y-semplice che x-semplice. Pensandolo come insieme y-semplice, può essere descritto così:

$$C_R = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, -R \le x \le R\,, -\sqrt{R^2-x^2} \le y \le \sqrt{R^2-x^2}\}\,, \tag{2}$$

e dunque

$$2\iint_{C_R} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\, dxdy = 2\int_{-R}^{R} \Big(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\, dy\Big)\, dx\,. \tag{3}$$

Ponendo per semplicità $a = \sqrt{R^2-x^2}$, il primo integrale da fare è

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-y^2}\, dy\,.$$

[Questa è l'area del semicerchio di raggio a, e dunque vale $\frac{1}{2}\pi a^2$. Per fare un po' di allenamento sugli integrali svolgiamo i conti, come se già non sapessimo questo risultato...]
Cambiamo variabile con $y = a\sin t$, $dy = a\cos t\, dt$, $t = \frac{\pi}{2}$ per $y = a$ e $t = -\frac{\pi}{2}$ per $y = -a$: si ha

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-y^2}\, dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\, a\cos t\, dt = a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\, dt = a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt\,. \tag{4}$$

Siccome $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt$ (per esempio, questo si verifica osservando che $\cos t = \sin(t+\frac{\pi}{2})$ e che $\sin(t-\pi) = -\sin t$; oppure guardando qual è l'area al di sotto dei grafici di $\sin^2 t$ e $\cos^2 t$ per $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$) e $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\, dt = \pi$, ne viene $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \frac{\pi}{2}$. [Se ricordate che la primitiva di $\cos^2 t$ è $\frac{1}{2}(t+\sin t\cos t)$ il risultato dell'integrale è immediato.]
Quindi in (4) si ha

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-y^2}\, dy = \frac{a^2\pi}{2}\,. \tag{5}$$

In (3) allora risulta, ricordando che $a = \sqrt{R^2-x^2}$,

$$\begin{aligned} 2\int_{-R}^{R} \Big(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\, dy\Big)\, dx &= 2\int_{-R}^{R} \frac{(R^2-x^2)\pi}{2}\, dx = \pi\Big(2R^3 - \int_{-R}^{R} x^2\, dx\Big) \\ &= \pi\Big(2R^3 - \tfrac{2}{3}R^3\Big) = \tfrac{4}{3}\pi R^3\,. \end{aligned}$$