Distribuzioni

1 Funzioni Test e Funzioni Localmente Integrabili

L'introduzione delle distribuzioni risponde a diverse esigenze; due in particolare si impongono all'attenzione.

(i) Ampliare l'insieme delle funzioni, includendo anche le *funzioni impulsive.*

Ancor prima che fosse formulata la teoria delle distribuzioni, i fisici e gli ingegneri avevano cominciato ad utilizzare le funzioni impulsive, per rappresentare masse o cariche concentrate in insiemi di dimensione inferiore a quella dell'ambiente in cui sono immerse: punti sulla retta; punti o curve nel piano; punti, curve o superfici nello spazio. Consideriamo ad esempio la (cosiddetta) *funzione di Dirac* δ, che spesso è caratterizzata da fisici e ingegneri mediante le seguenti proprietà:

$$\delta(t) = 0 \quad \forall t \neq 0, \qquad \int_{\mathbf{R}} \delta(t)\,dt = 1; \tag{1.1}$$

più generalmente quest'ultima condizione può essere sostituita da

$$\int_{\mathbf{R}} \delta(t)\varphi(t)\,dt = \varphi(0) \qquad \forall \varphi \in C^0(\mathbf{R}).$$

Non è chiaro il senso che si possa attribuire a queste condizioni, poiché l'integrale (sia esso inteso nel senso di Cauchy-Riemann o di Lebesgue) di una funzione nulla quasi ovunque è ineluttabilmente nullo. È chiaro che l'impulso unitario può essere ragionevolmente approssimato dalla successione

$$\delta_n(x) := \begin{cases} n/2 & \text{se } |x| < 1/n \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1/n \end{cases} \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Questo può forse aiutare ad intuire cosa ci si aspetti dalla *funzione* δ, ma è lungi dal risolvere la questione; anzi pone l'ulteriore problema del senso in cui intendere la convergenza $\delta_n \to \delta$.

(ii) Vi è anche un'altra esigenza alla base dell'introduzione delle distribuzioni: le funzioni definite quasi dappertutto sono adatte all'integrazione ma non alla derivazione; ad esempio esse possono benissimo essere discontinue. Sarebbe quindi auspicabile disporre di un concetto di derivazione per le funzioni definite quasi ovunque.

Si osservi che sussiste un legame naturale tra il problema della derivazione della funzioni discontinue e quello della rappresentazione delle funzioni impulsive: è lecito aspettarsi che (ad esempio) la derivata di una funzione $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ che ha un salto in un punto presenti un impulso nello stesso punto.

Questo stato di cose indusse alcuni matematici, in particolare S.L. Sobolev e L. Schwartz negli anni 1930-40, a pensare le funzioni in un modo alternativo; il risultato finale è una teoria alquanto ampia della derivazione, che deve non poco al contributo di un altro precursore: l'ingegnere Heaviside.

Abbiamo già incontrato un oggetto che rappresenta l'interazione tra due funzioni: il prodotto scalare in $L^2(\mathbf{R})$, $(f, \varphi) = \int_{\mathbf{R}} f(x)\,\varphi(x)^*\,dx$ esiste finito per ogni $f, \varphi \in L^2(\mathbf{R})$ (qui facciamo riferimento a funzioni a valori complessi, ma non ci interessiamo di questioni di olomorfia). Abbiamo visto come sia del tutto naturale che il prodotto scalare contenga il coniugio, poiché questo implica che $\|f\|^2 := (f,f) \geq 0$ per ogni $f \in L^2(\mathbf{R})$; tuttavia al momento non abbiamo bisogno di quest'ultima proprietà, e consideriamo l'integrale

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)\,\varphi(x)\,dx \;\; (= (f,\varphi^*)) \qquad \forall f \in L^p, \forall\varphi \in L^q, \text{ ove } p,q \in [1,+\infty],\; p^{-1}+q^{-1}=1.$$

Se f varia in uno spazio A più ampio di L^p, per dare senso a questo integrale non basta richiedere $\varphi \in L^q$, ed appunto occorre che φ appartenga ad uno spazio B più ristretto di L^q. Se comunque questo integrale ha senso ed è finito per ogni $f \in A$ ed ogni $\varphi \in B$, diremo che gli spazi A e B sono posti in *dualità* dal funzionale [1]

$$A \times B \to \mathbf{C} : (f,\varphi) \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

detto *prodotto di dualità.* Diremo anche che B è il duale di A, ovvero che A è il duale di B, e scriveremo rispettivamente $B = A'$ e $A = B'$. [2]

Quanto più ampio è uno dei due spazi, tanto più ristretto deve essere l'altro; per contro, quanto più piccolo è uno, tanto più grande può essere l'altro. Questa semplice idea è alla base della teoria di L. Schwartz. In questo capitolo introdurremo tre coppie di spazi di funzioni in dualità, che si aggiungono alla già nota coppia $L^p, L^{p'}$.

Funzioni Test. Iniziamo con definire uno spazio di funzioni estremamente piccolo; potremo quindi porlo in dualità con uno spazio molto grande.

Preliminarmente, dato un qualsiasi insieme $A \subset \mathbf{R}$ ed una funzione $f : A \to \mathbf{C}$, definiamo *supporto di* f, e denotiamo con $\mathrm{supp}(f)$, la chiusura del sottoinsieme di A in cui f è diversa da zero. [3] Ad esempio,

$$f_1(x) := \log|x| \quad \forall x \neq 0 \quad \to \quad \mathrm{supp}(f_1) = \mathbf{R},$$

$$f_2(x) := \tan x \quad \forall x \neq (k+1/2)\pi \; (k \in \mathbf{Z}) \quad \to \quad \mathrm{supp}(f_2) = \mathbf{R},$$

$$f_3(x) := x + |x| \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad \to \quad \mathrm{supp}(f_3) = \mathbf{R}^+,$$

$$f_4(x) := \sin x + |\sin x| \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad \to \quad \mathrm{supp}(f_4) = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi].$$

Introduciamo ora lo spazio delle *funzioni test* (dette anche *funzioni di prova)*

$$\mathcal{D}(\mathbf{R}) := \{\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}) : \mathrm{supp}(\varphi) \text{ è limitato}\};$$

Quindi ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ è nulla fuori da un intervallo dipendente da φ stessa; tale intervallo può essere ridotto all'insieme vuoto, quindi anche la funzione identicamente nulla appartiene a $\mathcal{D}(\mathbf{R})$. Questo è uno spazio lineare su $\mathbf{C}$ (la verifica è ovvia) non dotato di norma (e

[1] Qui (f,φ) rappresenta la coppia, non il prodotto scalare. La notazione è ambigua, comunque di solito il contesto permette di evitare equivoci.

[2] Dato uno spazio lineare A, è usuale indicare con A' lo spazio dei funzionali lineari $A \to \mathbf{C}$.

[3] Ricordiamo che per chiusura di un insieme $A \subset \mathbf{R}^N$ ($N \in \mathbf{N}$) si intende l'unione di A con i limiti delle successioni convergenti di punti in A, e la si indica con $\bar{A}$. Ad esempio

$$\overline{]0,1[} = [0,1], \qquad \overline{\{x \in \mathbf{R}^N : |x| < 1, x \neq 0\}} = \{x \in \mathbf{R}^N : |x| \leq 1\}.$$

quindi nemmeno di prodotto scalare). Si noti che $\varphi' \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$; in effetti $\operatorname{supp}(\varphi') \subset \operatorname{supp}(\varphi)$ [Es]. Questa classe di funzioni è molto piccola; tra l'altro, per quanto visto sul prolungamento analitico, la funzione nulla è l'unica funzione analitica di $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ [Es].

Tipici esempi di elementi di $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ sono le seguenti funzioni, dette *a campana* per via della forma del grafico:

$$\varphi_{a,b}(x) := \begin{cases} \exp \dfrac{1}{(x-a)^2 - b^2} & \text{se } |x-a| < b \\ 0 & \text{se } |x-a| \geq b, \end{cases} \qquad \forall a, b \in \mathbf{R}. \tag{1.2}$$

Si noti che la presenza dell'esponenziale fornisce il raccordo di tutte le derivate di $\varphi_{a,b}$ nei punti $x = a \pm b$, in modo del tutto analogo a quanto avviene per un classico esempio di Cauchy, che è ricordato nel capitolo sulle serie di potenze [Es]. Si noti pure che per ogni $c, d \in \mathbf{R}$ con $c < d$, esistono a, b tali che $\operatorname{supp}(\varphi_{a,b}) = [c, d]$.

Funzioni Localmente Integrabili. Sia $p \in [1, +\infty[$. Una funzione $v : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ è detta di potenza p-esima *localmente* integrabile se l'integrale di $|v|^p$ su ogni intervallo è finito. [4] Includendo anche il caso di $p = \infty$ (in cui ovviamente non si può parlare di integrabilità), poniamo

$$L^p_{\text{loc}}(\mathbf{R}) := \{v : \mathbf{R} \to \mathbf{C} : v \in L^p(a,b), \ \forall a, b \in \mathbf{R}(a < b)\} \qquad \forall p \in [1, +\infty].$$

Anche questo è uno spazio lineare su $\mathbf{C}$ non dotato di norma. Ovviamente

$$L^p(\mathbf{R}) \subset L^p_{\text{loc}}(\mathbf{R}) \qquad \forall p \in [1, +\infty].$$

Inoltre, poiché come si è visto gli $L^p(a,b)$ sono "inscatolati" tra di loro,

$$L^\infty_{\text{loc}}(\mathbf{R}) \subset L^p_{\text{loc}}(\mathbf{R}) \subset L^q_{\text{loc}}(\mathbf{R}) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}) \qquad \forall p, q \in [1, +\infty[\text{ con } p > q, \quad [Es]$$

a differenza di quanto succede per gli spazi $L^p(\mathbf{R})$. Qui siamo interessati al caso di $p = 1$; $L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R})$ è la più ampia classe di funzioni che definiremo facendo riferimento all'integrabilità.

Per queste funzioni non vi è alcun vincolo sul comportamento per $x \to \pm\infty$; ad esempio le funzioni

$$f_1(x) := \exp|x|, \quad f_2(x) := \exp(\exp|x|), \quad f_3(x) := \exp[\exp(\exp|x|)], \quad ...$$

stanno tutte in $L^p_{\text{loc}}(\mathbf{R})$ per ogni $p \in [1, +\infty]$. Si ponga ora

$$f(x) := 1/\sqrt{x}, \qquad g(x) := 1/x \qquad \forall x \neq 0$$

(il valore di queste funzioni nell'origine è irrilevante, poiché $\{0\}$ è un insieme di misura nulla). Si ha $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R})$, mentre $g \notin L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R})$, infatti ad esempio $g \notin L^1(0,1)$.

Le seguenti proprietà possono essere verificate facilmente mediante un semplice cambiamento di variabile di integrazione per ogni $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R})$,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbf{R}} f(\lambda x)\, \varphi(x)\, dx = |\lambda|^{-1} \int_{\mathbf{R}} f(x)\, \varphi(x/\lambda)\, dx \qquad \forall \lambda \in \mathbf{C}, \lambda \neq 0, [Es] \\ &\int_{\mathbf{R}} f(x+a)\, \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbf{R}} f(x)\, \varphi(x-a)\, dx \qquad \forall a \in \mathbf{R}. \quad [Es] \end{aligned} \tag{1.3}$$

[4]Per contro le funzioni di $L^p(\mathbf{R})$ sono dette *globalmente* integrabili; quando non si specifica, si intende che ci si riferisce all'integrabilità globale.

Esercizi.

— Si determinino il dominio di definizione ed il supporto della funzione

$$f(x) = \log[(x-1)^+].$$

— Posto

$$f(x) = \tan x, \qquad g(x) = \log|x| \qquad q\forall x \in \mathbf{R},$$

e si stabilisca se $f, g \in L^1(\mathbf{R})$ e se $f, g \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$.

2 Distribuzioni

Usualmente una funzione è pensata come una trasformazione che agisce su ciascun elemento del dominio, cioè è definita in ogni punto (o in quasi ogni punto). Le distribuzioni sono costruite in base ad un altro punto di vista.

Distribuzioni Associate a Funzioni Localmente Integrabili. Per ogni $f \in L^1_{\rm loc}(\mathbf{R})$ ed ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, l'integrale $\int_{\mathbf{R}} f(x)\,\varphi(x)\,dx$ esiste finito; inoltre, denotato con S_φ il supporto di φ,

$$\Big|\int_{\mathbf{R}} f(x)\,\varphi(x)\,dx\Big| \le \int_{S_\varphi} |f(x)\,\varphi(x)|\,dx \le \max_{\mathbf{R}}|\varphi| \int_{S_\varphi} |f(x)|\,dx < +\infty. \tag{2.1}$$

Definiamo ora il funzionale

$$T_f : \mathcal{D}(\mathbf{R}) \to \mathbf{C} : \varphi \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(x)\,\varphi(x)\,dx. \tag{2.2}$$

Il seguente risultato è tanto semplice quanto importante.

Lemma 2.1 *Per ogni* $f \in L^1_{\rm loc}(\mathbf{R})$,

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)\,\varphi(x)\,dx = 0 \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}) \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0 \;\; q\forall x \in \mathbf{R}.$$

Dimostrazione Parziale. Qui ci limitiamo a trattare il caso in cui f è continua; questa ipotesi ci permetterà di mostrare che $f(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. Per assurdo, esista $x_0 \in \mathbf{R}$ tale che $f(x_0) \neq 0$, ad esempio $f(x_0) > 0$; allora esiste un intervallo $]a, b[$ in cui $f > 0$. Se $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ è una funzione a campana non negativa il cui supporto (non vuoto) è contenuto in $]a, b[$, allora $\int_{\mathbf{R}} f(x)\,\varphi(x)\,dx > 0$ contraddicendo l'ipotesi. □

Ogni $f \in L^1_{\rm loc}(\mathbf{R})$ ovviamente determina il funzionale T_f. Viceversa, in base al lemma, questo funzionale determina univocamente la funzione f; in altri termini, se $f, g \in L^1_{\rm loc}(\mathbf{R})$ sono tali che $T_f = T_g$ (ovvero $T_f(\varphi) = T_g(\varphi)$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$) allora $f = g$ q.o. in $\mathbf{R}$. [5] Pertanto il funzionale T_f contiene la stessa informazione della funzione f, ed appare naturale identificare T_f con f. Questo modo di rappresentare le funzioni mediante funzionali è alla base dell'estensione del concetto di funzione operata dalla teoria delle distribuzioni.

[5] Si usa dire che l'uguaglianza $T_f = T_g$ è *testata* mediante le funzioni test φ ...

Distribuzioni. Diciamo *distribuzione* (o *funzione generalizzata)* su $\mathbf{R}$ ogni funzionale $T : \mathcal{D}(\mathbf{R}) \to \mathbf{C}$ lineare su $\mathbf{C}$, ovvero tale che

$$\begin{aligned} &T(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = \lambda_1 T(\varphi_1) + \lambda_2 T(\varphi_2) \\ &\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}, \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbf{R}), \end{aligned} \tag{2.3}$$

e limitato nel senso che

$$\begin{aligned} &\forall a > 0, \exists k \in \mathbf{N}, \exists C > 0 : \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}), \\ &\mathrm{supp}(\varphi) \subset [-a, a] \;\Rightarrow\; |T(\varphi)| \le C \sum_{n=0}^{k} \max_{\mathbf{R}} |D^n \varphi| \end{aligned} \tag{2.4}$$

(qui $D^0\varphi := \varphi$). Le distribuzioni della forma (2.2) sono dette regolari; le altre sono dette singolari. [6]

Due distribuzioni T e $\tilde{T}$ sono uguali se agiscono allo stesso modo sulle funzioni test, ovvero se $T(\varphi) = \tilde{T}(\varphi)$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$. L'insieme delle distribuzioni costituisce uno spazio lineare su $\mathbf{C}$, che denoteremo con $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

*** Distribuzioni di Ordine Finito.** Nella (2.4) sia la costante $C > 0$ che l'intero k possono dipendere da a, ovvero dal supporto di φ. Se k può essere scelto indipendente da a, ovvero

$$\begin{aligned} &\exists k \in \mathbf{N} : \forall a > 0, \exists C > 0 : \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}), \\ &\mathrm{supp}(\varphi) \subset [-a, a] \;\Rightarrow\; |T(\varphi)| \le C \sum_{n=0}^{k} \max_{\mathbf{R}} |D^n \varphi|, \end{aligned} \tag{2.5}$$

allora la distribuzione T è detta *di ordine finito,* ed il più piccolo intero k per cui vale quest'ultima implicazione è detto ordine di T. Ad esempio per ogni $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$, T_f è una distribuzione di ordine zero. Nel seguito incontreremo altre distribuzioni di ordine finito, ed anche una di ordine infinito.

A questo punto si capisce perché si sono considerate funzioni test infinitamente derivabili; la limitatezza del supporto comporta poi che le derivate di ogni ordine sono limitate. Comunque per le distribuzioni di ordine finito k basterebbe limitarsi funzioni φ di classe C^k a supporto limitato.

Nel caso che sia l'intero k che la costante $C > 0$ fossero indipendenti da a, allora ogni riferimento al supporto della funzione test verrebbe meno nella (2.4), che si riscriverebbe

$$\exists k \in \mathbf{N}, \exists C > 0 : \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}), \quad |T(\varphi)| \le C \sum_{n=0}^{k} \max_{\mathbf{R}} |D^n \varphi|. \tag{2.6}$$

Ad esempio questo succede per T_f con $f \in L^1(\mathbf{R})$ (in questo caso con $k = 0$).

Esempi. Abbiamo identificate le funzioni di $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$ alle distribuzioni regolari. Ecco altri esempi.

— Le funzioni impulsive sono distribuzioni. Ad esempio la *delta di Dirac*

$$\delta(\varphi) := \varphi(0) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}) \tag{2.7}$$

[6] La terminologia non è molto felice; infatti le distribuzioni regolari possono anche essere associate a funzioni che presentano ... singolarità, quali $f(x) = |x|^\alpha$ con $\alpha > -1$.

δ è una distribuzione singolare di ordine zero, poiché è lineare e

$$|\delta(\varphi)| = |\varphi(0)| \le \max_{\mathbf{R}} |\varphi| \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}).$$

Lo stesso vale per le sue traslate

$$\delta_a(\varphi) := \varphi(a) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}), \forall a \in \mathbf{R},$$

(quindi $\delta_0 = \delta$) e per le combinazioni lineari finite di delte di Dirac traslate

$$\sum_{k=0}^{N} \lambda_k \delta_{a_k}(\varphi) = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k \varphi(a_k) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}), \forall \lambda_1, ..., \lambda_N \in \mathbf{R}, \forall a_1, ..., a_N \in \mathbf{R}. \quad [Es]$$

— Sono distribuzioni anche certe combinazioni lineari infinite di delte di Dirac traslate, quali il *treno di impulsi* (detto anche *pettine di Dirac)*

$$s := \sum_{k \in \mathbf{Z}} \delta_k\ , \qquad \text{ovvero} \qquad s(\varphi) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \varphi(k) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}). \tag{2.8}$$

Più in generale si può considerare un pettine di Dirac avente *distanza interdentale* h:

$$s_h(\varphi) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \varphi(kh) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}), \forall h > 0.$$

Anche questa è una distribuzione singolare di ordine zero. Si noti che per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ questa serie è ridotta ad una somma finita, essendo il supporto di φ limitato. Tuttavia

$$\tilde{s} := \sum_{k \in \mathbf{Z}} \delta_{1/k}\ , \qquad \text{ovvero} \qquad \tilde{s}(\varphi) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \varphi(1/k) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}) \tag{2.9}$$

non è una distribuzione (si noti che le masse si accumulano vicino a $x = 0$) [Es].

— È noto che la funzione $1/x$ non è integrabile (né alla Cauchy-Riemann, né alla Lebesgue, né in senso generalizzato) su alcun intervallo che contiene l'origine. Tuttavia il funzionale

$$T : \mathcal{D}(\mathbf{R}) \to \mathbf{C} : \varphi \mapsto \lim_{\varepsilon \to +\infty} \int_{\mathbf{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \tag{2.10}$$

è una distribuzione, come vedremo nel paragrafo **??**.

Prime Proprietà delle Distribuzioni. Scriveremo anche $\langle T, \varphi \rangle$ in luogo di $T(\varphi)$. [7] Più disinvoltamente i non-matematici spesso usano la notazione $\int_{\mathbf{R}} T(x)\, \varphi(x)\, dx$, anche quando T non è una funzione di x; questo è lecito, purché non si operari su questo *finto integrale* come se fosse un integrale vero. Ad esempio, se T è una distribuzione singolare, $\int_{\mathbf{R}} |T(x)\, \varphi(x)|\, dx$ non ha senso.

Il ruolo simmetrico dei due "fattori" T e φ nella scrittura $\langle T, \varphi \rangle$ si presta a mettere in luce la *bilinearità* di $T(\varphi)$, ovvero la sua linearità su $\mathbf{C}$ rispetto sia a φ (cf. (2.3)) che a T:

$$\begin{gathered} \langle \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2, \varphi \rangle = \lambda_1 \langle T_1, \varphi \rangle + \lambda_2 \langle T_2, \varphi \rangle \\ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}, \forall T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}). \end{gathered} \tag{2.11}$$

[7] Il simbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è spesso denominato con il termine francese *crochet*.

Pertanto $\langle \lambda T, \lambda\varphi\rangle = \lambda^2\langle T, \varphi\rangle$ per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$.

Si noti l'analogia tra il *crochet* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ed il prodotto scalare $(\cdot,\cdot)$ di $L^2(\mathbf{R})$, che comunque è lineare rispetto al primo fattore ma *antilineare* rispetto al secondo. [8]

Le proprietà di omotetia e di traslazione (1.3) e la moltiplicazione per funzioni localmente integrabili delle funzioni localmente integrabili si estendono alle distribuzioni T sotto forma di definizioni: [9] per ogni $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ ed ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, si pone [10]

$$\langle T(\lambda\cdot), \varphi\rangle := |\lambda|^{-1}\langle T, \varphi(\cdot/\lambda)\rangle \qquad \forall\lambda \in \mathbf{C}, \lambda \neq 0, \tag{2.12}$$

$$\langle T(\cdot + a), \varphi\rangle := \langle T, \varphi(\cdot - a)\rangle \qquad \forall a \in \mathbf{R}, \tag{2.13}$$

$$\langle gT, \varphi\rangle := \langle T, g\varphi\rangle \qquad \forall g \in C^\infty(\mathbf{R}). \tag{2.14}$$

Queste formule hanno senso poiché

$$\varphi(\cdot/\lambda), \varphi(\cdot - a), g\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}) \qquad \forall g \in C^\infty(\mathbf{R}), \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})[Es],$$

e sono ovviamente soddisfatte da $T = T_f$ per ogni $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R})$.

Si dice allora che una distribuzione T è pari se $T(-\cdot) = T$, che T è dispari se $T(-\cdot) = -T$, che T è periodica di periodo a se $T(\cdot + a) = T$. [11] Ad esempio sia la distribuzione δ che il pettine di Dirac sono pari.

Per ogni $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ ed ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, si definiscono la distribuzione coniugata, la sua parte reale e la sua parte immaginaria come segue:

$$\begin{aligned} \langle T^*, \varphi\rangle &:= \langle T, \varphi^*\rangle^*, \\ \langle \Re(T), \varphi\rangle &:= \frac{1}{2}\langle T + T^*, \varphi\rangle = \langle T, \Re(\varphi)\rangle, \\ \langle \Im(T), \varphi\rangle &:= \frac{1}{2i}\langle T - T^*, \varphi\rangle = \langle T, \Im(\varphi)\rangle. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Queste definizioni sono coerenti con quelle note per le funzioni localmente integrabili:

$$T_f^* = T_{f^*}, \quad \Re(T_f) = T_{\Re(T_f)}, \quad \Im(T_f) = T_{\Im(T_f)} \qquad \forall f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}). \quad [Es]$$

Non si può invece definire la moltiplicazione tra due distribuzioni qualsiasi: ad esempio $\delta\cdot\delta$ non ha senso.

Esercizi.

— Ogni distribuzione *regolare* è ovviamente di ordine 0. Vale anche il viceversa?

---

[8] Se uno è interessato ad usare distribuzioni antilineari rispetto alla funzione test, basta che sostituisca una qualsiasi distribuzione T (necessariamente lineare) col corrispondente funzionale S antilineare

$$\langle S, \varphi\rangle := \langle T, \varphi^*\rangle \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}).$$

Questi funzionali sono detti *antidistribuzioni,* e sono poco usati.

Per contro sono spesso impiegate le distribuzioni a valori reali, la cui teoria è analoga a quella qui presentata.

[9] Il fatto che queste proprietà non siano derivate da altre ma sono introdotte come definizioni può dare l'impressione di una certa arbitrarietà. Così non è, poiché quanto imposto alle distribuzioni deve essere coerente con quanto succede per le funzioni di $L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R})$, dal momento che queste individuano le distribuzioni regolari.

[10] Il punto indica la variabile indipendente, ovvero la variabile di integrazione per le distribuzioni regolari.

[11] Anche qui usiamo il punto per evitare di indicare una dipendenza da x che nel caso delle distribuzioni non ha senso; ad esempio scriviamo $T(-\cdot)$ piuttosto che $T(-x)$.

— Si stabilisca se i seguenti funzionali $\mathcal{D}(\mathbf{R}) \to \mathbf{C}$ sono distribuzioni:

$$T_1 = \sum_{k=1}^{\infty} e^k \delta_{\log k}\,, \quad T_2 = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-|k|} \delta_{1/k}\,, \quad T_3 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} \delta_{1/k}\,, \quad T_4 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \delta_{1/k}\,.$$

— Fissati qualsiasi $\alpha \in C^\infty(\mathbf{R})$ e $x_0 \in \mathbf{R}$, si calcoli la distribuzione

$$T = \alpha\delta_{x_0} - \alpha(x_0)\delta_{x_0}.$$

— Si dimostri che

$$\delta(\lambda\cdot) = \frac{1}{|\lambda|}\delta \tag{2.16}$$

(Qui non abbiamo inserito l'argomento x perché tale uso sarebbe improprio, in quanto queste distribuzioni non sono definite puntualmente.)

— Si verifichi che se T è una distribuzione pari allora T' è dispari, e viceversa se T è una distribuzione dispari allora T' è pari.

— Si discuta la parità di $D^k\delta_a$ $(a \in \mathbf{R},\ k \in \mathbf{N})$.

— Per ogni intero $m \geq 1$ e per ogni $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbf{C}$, si ponga $T := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k D^k \delta$ e si verifichi che $x^{m+1}T = 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$. (In particolare, $x\delta = 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.)

3 Derivazione in $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$

Dirac aveva osato derivare la sua delta, suscitando lo sconcerto dei suoi contemporanei. Proviamo ad interpretare questa derivata: essendo δ nulla fuori dall'origine, lo stesso varrà per $D\delta$; inoltre, poiché δ è pari, $D\delta$ sarà dispari, e quindi nulla anche nell'origine; tuttavia non è plausibile the $D\delta$ coincida con la funzione nulla. Questo conferma le incongruenze già riscontrate nel tentativo di interpretare la delta di Dirac mediante il tradizionale concetto di funzione.

Derivazione di Funzioni Localmente Integrabili. Introdurremo un nuovo operatore di derivazione, che denoteremo con D e che estenderà l'operatore di derivazione *classico,* definito come limite puntuale del rapporto incrementale. (Denoteremo quest'ultimo con il "primo": ad esempio indicheremo la derivata di una funzione f con f'.) L'estensione sarà imperniata sulla formula di integrazione per parti.

Sia $f \in C^1(\mathbf{R})$. Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ esistono $a, b \in \mathbf{R}$ $(a < b)$ tali che $\varphi = \varphi' = 0$ fuori da $]a, b[$. Grazie alla formula di integrazione per parti, si ha allora

$$\int_a^b f'(x)\,\varphi(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,\varphi'(x)\,dx \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}),$$

ovvero

$$\int_{\mathbf{R}} f'(x)\,\varphi(x)\,dx = -\int_{\mathbf{R}} f(x)\,\varphi'(x)\,dx \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}). \tag{3.1}$$

Poiché questi integrali hanno senso anche se $f, f' \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$, definiamo la derivazione in $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$ come segue, secondo l'impostazione introdotta da S. Sobolev nel 1936. Per ogni $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$, diciamo che g è la *derivata debole di* f, e scriviamo $g = Df$, se

$$\int_{\mathbf{R}} g(x)\,\varphi(x)\,dx = -\int_{\mathbf{R}} f(x)\,(\varphi')(x)\,dx \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}),$$

ovvero, in termini delle corrispondenti distribuzioni T_g e T_f,

$$\langle T_g, \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}). \tag{3.2}$$

Denotiamo questa derivata con Df per distinguerla da quella *classica* f'. Comunque $Df = f'$ per ogni $f \in C^1(\mathbf{R})$, grazie alla (3.1). Identificando ogni funzione di $L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R})$ con la corrispondente distribuzione, scriveremo anche $T_{Df} = DT_f$. Perveniamo quindi alla seguente estensione della formula di integrazione per parti: per ogni $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R})$,

$$g = Df \qquad \Leftrightarrow \qquad g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}) \quad \text{e} \quad \langle g, \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}). \tag{3.3}$$

In seguito al Lemma 2.1 la (3.2) al più vale per una sola g. Comunque non è detto che una qualsiasi funzione $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R})$ ammetta una derivata debole $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R})$.

Derivazione di Distribuzioni Generali. Generalizziamo la (3.3) a distribuzioni qualsiasi ponendo

$$\langle DT, \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}), \forall T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}), \tag{3.4}$$

in modo da estendere la formula di integrazione per parti. Si noti che per ogni $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ esiste la *distribuzione derivata* DT, poiché il funzionale $\varphi \mapsto -\langle T, \varphi' \rangle$ è lineare e limitato nel senso della (2.4). [Es] Questa è una delle principali differenze tra la derivata nel senso delle distribuzioni e quella debole.

Si noti anche che la nuova nozione di derivata poggia su quella classica, che qui è applicata alla funzione derivabile φ. Inoltre, come già osservato, il nuovo concetto estende quello vecchio: $Df = f'$ per ogni $f \in C^1(\mathbf{R})$, grazie alla formula di integrazione per parti (3.1).

Iterando questo procedimento, si perviene facilmente alla seguente caratterizzazione delle derivate di ordine superiore: [12]

$$\langle D^k T, \varphi \rangle = (-1)^k \langle T, \varphi^{(k)} \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}), \forall T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}), \forall k \in \mathbf{N}. \tag{3.5}$$

Pertanto ogni distribuzione ammette derivate di ogni ordine. A questo punto dovrebbe essere chiaro perché si richiede l'infinita derivabilità delle funzioni test.

Nei prossimi capitoli utilizzeremo solo la derivata nel senso delle distribuzioni, che denoteremo anche col "primo".

Esempi. — Si definisca la funzione di Heaviside (detta anche funzione scalino unitario)

$$H(x) := 0 \quad \text{se } x \leq 0, \qquad H(x) := 1 \quad \text{se } x > 0. \tag{3.6}$$

Si ha

$$\langle DT_H, \varphi \rangle := -\int_{\mathbf{R}} H(x)\, \varphi'(x)\, dx = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\, dx$$

$$= -\lim_{a \to +\infty} \int_0^a \varphi'(x)\, dx = -\lim_{a \to +\infty} \varphi(a) + \varphi(0) = \varphi(0) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}).$$

Quindi la derivata nel senso delle distribuzioni della funzione di Heaviside coincide con la delta di Dirac:

$$(DT_H =)\ DH = \delta.$$

[12] Con notazione usuale, si indica con $\varphi^{(k)}$ la derivata classica di ordine k di φ.

Per ogni intero $k \geq 1$ si ha poi

$$D^k H = D^{k-1} DH = D^{k-1}\delta,$$

$$\langle D^{k-1}\delta, \varphi\rangle = (-1)^{k-1}\langle \delta, \varphi^{(k-1)}\rangle = (-1)^{k-1}\varphi^{(k-1)}(0) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}).$$

— Derivando una combinazione lineare finita di funzioni di Heaviside traslate si ottiene la corrispondente combinazione lineare di *delte di Dirac traslate* [Es]:

$$D\Big(\sum_{k=0}^{N} \lambda_k H(\cdot - a_k)\Big) = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k \delta_{a_k} \qquad \forall \lambda_0, ..., \lambda_N \in \mathbf{R}, \forall a_0, ..., a_N \in \mathbf{R}.$$

— Sia $f(x) := \log|x|$ per ogni $x \neq 0$; ovviamente $f'(x) := 1/x$ per ogni $x \neq 0$. Si noti che $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R})$ ma $f' \notin L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R})$, ed addirittura $f' \notin \mathcal{D}'(\mathbf{R})$. [Es] Pertanto $Df \neq f'$, ed infatti in questo caso non si può nemmeno scrivere la formula di integrazioni per parti (3.1) per funzioni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ (a meno che non sia $\varphi(0) = 0$). In effetti Df non è della forma $Df = T_g$ per alcuna $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R})$. Nel paragrafo **??** forniremo una rappresentazione di Df.

— Posto $f_\alpha(x) := |x|^\alpha$ per ogni $x \neq 0$ ed ogni $\alpha \in \mathbf{R}$, si ha

$$\begin{array}{ll} \text{per } \alpha > 0, & f_\alpha, f'_\alpha \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}), \\ \text{per } -1 < \alpha \leq 0, & f_\alpha \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}),\ f'_\alpha \notin L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}), \\ \text{per } \alpha \leq -1, & f_\alpha, f'_\alpha \notin L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}). \qquad [Es] \end{array}$$

Quindi

$$\begin{cases} \text{per } \alpha > 0, & Df_\alpha = f'_\alpha, \\ \text{per } -1 < \alpha \leq 0, & Df_\alpha \neq f'_\alpha,\ \ T_{f'_\alpha} \text{ non esiste,} \\ \text{per } \alpha \leq -1, & T_{f_\alpha}, T_{f'_\alpha} \text{ non esistono.} \end{cases} \tag{3.7}$$

— Fissata una qualsiasi successione $\{\lambda_k\}$ in $\mathbf{C}$, si ponga $T := \sum_{k=0}^\infty \lambda_k D^k \delta_k$, ovvero

$$\langle T, \varphi\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \lambda_k D^k \varphi(k) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}).$$

Poiché ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ ha supporto limitato, questa serie è ridotta ad una somma finita; pertanto $\langle T, \varphi\rangle$ contiene solo un numero finito $\tilde{k}$ di derivate, e si verifica facilmente che $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$. [Es] Questo numero $\tilde{k}$ però dipende dal supporto di φ, e non è limitato al variare di tale supporto; quindi T ha ordine infinito.

Proprietà della Derivazione. Il seguente risultato generalizza note proprietà delle funzioni di $C^1(\mathbf{R})$.

Proposizione 3.1 *Per ogni distribuzione* $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$,

$$(\lambda T)' = \lambda T' \qquad \forall \lambda \in \mathbf{C}, [Es] \tag{3.8}$$

$$(gT)' = g'T + gT' \qquad \forall g \in C^\infty(\mathbf{R}), [Es] \tag{3.9}$$

$$T(\lambda \cdot)' = \lambda T'(\lambda \cdot) \qquad \forall \lambda \in \mathbf{C}, [Es] \tag{3.10}$$

$$T(\cdot + a)' = T'(\cdot + a) \qquad \forall a \in \mathbf{R}. [Es] \tag{3.11}$$

A titolo di esempio verifichiamo la (3.9). Utilizzando ripetutamente le formule di derivazione e di moltiplicazione di una distribuzione per una funzione test, si ha

$$\begin{aligned} \langle (gT)', \varphi \rangle &= -\langle gT, \varphi' \rangle = -\langle T, g\varphi' \rangle = -\langle T, (g\varphi)' \rangle + \langle T, g'\varphi \rangle \\ &= \langle T', g\varphi \rangle + \langle g'T, \varphi \rangle = \langle gT' + g'T, \varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}). \end{aligned} \tag{3.12}$$

La (3.9) può essere estesa alle derivate di ordine superiore:

Proposizione 3.2 *(Regola di Leibniz) Per ogni distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$,* [13]

$$D^n(gT) = \sum_{m=1}^{N} \binom{n}{m} (D^{n-m}g) D^m T \qquad \forall g \in C^\infty(\mathbf{R}), \forall T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}), \forall n \in \mathbf{N}.$$

Ad esempio,

$$(gT)'' = g''T + 2g'T' + gT'' \qquad \forall g \in C^\infty(\mathbf{R}), \forall T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}). \quad [Es]$$

*** Confronto tra i Diversi Concetti di Derivata.** A questo punto disponiamo delle seguenti nozioni di derivata:

— la derivata classica f' (ovvero il limite puntuale del rapporto incrementale) per certe funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$;

— la derivata debole, qui denotata $D_d f$, per certe funzioni $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R})$;

— la derivata nel senso delle distribuzioni, denotata DT per ogni $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

Quando la derivata classica esiste solo per quasi ogni $x \in \mathbf{R}$, denominiamo quest'ultima *derivata quasi ovunque* (o *derivata q.o.* per brevità). Si noti che la derivata nel senso delle distribuzioni esiste sempre, mentre ciò non vale per le altre derivate.

Il seguente esempio è semplice ma significativo. La funzione di Heaviside H è derivabile in senso classico con derivata $H'(x) = 0$ per ogni $x \neq 0$, mentre $H'(0)$ non esiste; quindi

$$H' = 0 \qquad \text{q.o. in } \mathbf{R}.$$

Tuttavia H' non soddisfa la formula di integrazione per parti, poiché per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$.

$$\int_{\mathbf{R}} H'(x)\varphi(x)\,dx = 0, \qquad \text{mentre} \qquad -\int_{\mathbf{R}} H(x)\varphi'(x)\,dx = \varphi(0).$$

Possiamo allora concludere che $H, H' \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R})$, ma $D_d H$ non esiste, e $DH \neq H'$; infatti $DH = \delta \neq H'$.

I seguenti enunciati (di cui non diamo dimostrazione) possono dare un'idea della delicatezza della situazione.

— Proposizione 1. Sia $f \in C^0(\mathbf{R})$. Allora $f \in C^1(\mathbf{R})$ se e solo se $Df \in C^0(\mathbf{R})$; in tale caso $f' = D_d f = Df$ in tutto $\mathbf{R}$.

— Proposizione 2. Sia $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R})$. Allora esiste $D_d f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R})$ se e solo se $Df \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R})$; in tal caso $D_d f = Df$ q.o. in $\mathbf{R}$.

[13] Ricordiamo che la definizione del coefficiente binomiale:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad \forall n, m \in \mathbf{N}, m \leq n.$$

— Proposizione 3. Sia $f \in L^1_{\rm loc}(\mathbf{R})$. Se $Df \in L^1_{\rm loc}(\mathbf{R})$ allora f' esiste q.o. in $\mathbf{R}$, e $f' = Df$ q.o..

Quest'ultima implicazione non è invertibile: la derivabilità quasi ovunque non implica né l'integrabilità locale di Df, né $f' = Df$ q.o. in $\mathbf{R}$; la funzione di Heaviside è un controesempio.

La situazione può apparire un po' complicata. Rassicuriamo comunque il lettore: nel seguito utilizzeremo quasi esclusivamente la derivata nel senso delle distribuzioni, e scriveremo T' in luogo di DT per ogni $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$. □

Equazioni in $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$. Date $S \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ e $f \in C^\infty(\mathbf{R})$, consideriamo il seguente problema:

$$\text{esiste } T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}) \text{ tale che } fT = S \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbf{R})? \tag{3.13}$$

Si noti che se f avesse minore regolarità il prodotto fT potrebbe non avere senso; ad esempio $H\delta \notin \mathcal{D}'(\mathbf{R})$. Un'equazione come la (3.13) è detta un *problema di divisione,* poiché formalmente la sua soluzione è $T = S/f$.

Come per la teoria delle equazioni differenziali lineari, anche in questo caso la soluzione generale dell'equazione non omogenea $fT = S$ (brevemente, *SGN)* è uguale alla somma di una soluzione particolare della stessa equazione *(SPN)* e della soluzione generale della corrispondente equazione omogenea $fT = 0$ *(SGO)*:

$$\text{SGN} = \text{SPN} + \text{SGO}. \tag{3.14}$$

Se $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, allora $1/f \in C^\infty(\mathbf{R})$; si possono allora moltiplicare entrambi i membri dell'equazione (3.13) per $1/f$, ottenendo l'unica soluzione $T = (1/f)S$.

Se invece f si annulla in uno o più punti l'equazione $fT = S$ è meno banale. Qui ci limitiamo a considerare l'equazione omogenea

$$x^m T = 0 \qquad (m \in \mathbf{N}, m \geq 1). \tag{3.15}$$

Un semplice calcolo mostra che $T = c_0\delta + ... + c_{m-1}D^{m-1}\delta$ risolve quest'ultima equazione per ogni $c_0, ..., c_{m-1} \in \mathbf{C}$ [Es]; si può anche dimostrare che non vi sono altre soluzioni. L'apparentemente innocua equazione non omogenea

$$x^m T = 1 \qquad (m \in \mathbf{N}, m \geq 1). \tag{3.16}$$

è già più impegnativa. Disponendo della soluzione generale della corrispondente equazione omogenea, basterebbe individuarne una soluzione particolare; ma questo problema non è banale poiché $1/x^m \notin \mathcal{D}'(\mathbf{R})$. Nel prossimo paragrafo ne studiamo la soluzione per $m = 1$, la cui soluzione appunto non è $T = 1/x$ (anche se gli assomiglia...).

Esercizi.

— Si calcoli $D[x^k H(x)]$ per $k \in \mathbf{N}$, $D[(\sin x)H(x)]$.

— Fissati qualsiasi $\alpha \in C^\infty(\mathbf{R})$ e $x_0 \in \mathbf{R}$, si calcoli la distribuzione $T = D(\alpha\delta_{x_0})$.

— Si calcoli $xD\delta$, $x^2D\delta$, $xD^n\delta$.

— Si mostri che se T è una distribuzione non costante di ordine n, allora DT ha ordine $n+1$.

— Si mostri che

$$xD^n\delta_0 = -nD^{n-1}\delta, \qquad x^nD^n\delta = (-1)^n n!\delta, \qquad x^mD^n\delta = 0 \quad \text{se } m > n.$$

— Si risolvano le equazioni $x^2T = 0$, $x^2T = 1$.

— Si risolvano le equazioni $T' + aT = 0$, $T' + aT = \delta$, $T' + aT = H$.