Trasformazione di Fourier

1 Trasformazione di Fourier in L^1

In questo capitolo definiremo e studieremo la trasformazione di Fourier in diversi spazi di funzioni: $L^1(\mathbf{R})$, $L^2(\mathbf{R})$, (che anche qui denoteremo con L^1, L^2). Vedremo che anche le serie di Fourier rientrano in questo quadro.

Per ogni $u \in L^1$, definiamo la funzione trasformata di Fourier $\hat{u}$ di u (nel senso di L^1):

$$\hat{u}(\xi) := \int_{\mathbf{R}} u(t) e^{-2\pi i \xi t}\, dt \qquad \forall \xi \in \mathbf{R}. \tag{1.1}$$

Questa funzione è anche denominata *integrale di Fourier,* in contrapposizione alle serie di Fourier. Scriveremo indifferentemente $\hat{u}$ oppure $\mathcal{F}(u)$. Alcuni autori omettono il fattore 2π nell'esponente, ovvero interpretano ξ come pulsazione; in tal modo semplificano alcune formule, ma ne complicano altre. Ci sono anche altre varianti della definizione, ma non esiste una scelta ottimale che elimini i fattori costanti dalle formule principali.

In teoria dei segnali, t rappresenta il tempo, u è un segnale, ξ rappresenta la frequenza (ovvero $2\pi\xi$ è la pulsazione), e la funzione $\hat{u}$ è detta *spettro* di u. Si dice allora che la trasformata di Fourier opera dallo spazio dei tempi allo spazio delle frequenze.

Si noti che

$$\hat{u}(0) := \int_{\mathbf{R}} u(t)\, dt \qquad \forall u \in L^1. \tag{1.2}$$

Teorema 1.1 *L'operatore $\mathcal{F} : u \mapsto \hat{u}$ è lineare e trasforma L^1 in C_b^0. Inoltre*

$$\|\hat{u}\|_{C_b^0} := \max\{|\hat{u}(\xi)| : \xi \in \mathbf{R}\} \leq \int_{\mathbf{R}} |u(t)|\, dt =: \|u\|_{L^1}\ (< +\infty) \qquad \forall u \in L^1, \tag{1.3}$$

$$\hat{u}(\xi) \to 0 \quad \textit{per} \ \ \xi \to \pm\infty, \quad \forall u \in L^1. \tag{1.4}$$

Dimostrazione Parziale. Si verifica banalmente che $\mathcal{F}$ è lineare. Inoltre, per ogni $u \in L^1$,

$$|\hat{u}(\xi)| \leq \int_{\mathbf{R}} |u(t) e^{-2\pi i \xi t}|\, dt = \int_{\mathbf{R}} |u(t)|\, dt\ (< +\infty) \qquad \forall \xi \in \mathbf{R}, \tag{1.5}$$

quindi $\hat{u}$ è limitata e vale la (1.3). La funzione $\hat{u}$ è anche continua:

$$\begin{aligned} \lim\nolimits_{h\to 0} \hat{u}(\xi + h) &= \lim_{h\to 0} \int_{\mathbf{R}} u(t) e^{-2\pi i (\xi + h) t}\, dt \\ &= \int_{\mathbf{R}} \lim_{h\to 0} [u(t) e^{-2\pi i (\xi+h)t}]\, dt = \int_{\mathbf{R}} u(t) e^{-2\pi i \xi t}\, dt = \hat{u}(\xi) \qquad \forall \xi \in \mathbf{R}; \end{aligned} \tag{1.6}$$

il passaggio al limite nell'integrale è giustificato dal teorema di Lebesgue della convergenza dominata [Es].

Omettiamo la dimostrazione della (1.4). □

Corollario 1.2 *(Continuità di $\mathcal{F} : L^1 \to C_b^0$) Per ogni successione $\{u_n\}$ in L^1 ed ogni $u \in L^1$,*

$$u_n \to u \quad \textit{in } L^1 \quad \Rightarrow \quad \hat{u}_n \to \hat{u} \quad \textit{in } C_b^0 \ \textit{(ovvero } \max\nolimits_{\mathbf{R}} |\hat{u}_n - \hat{u}| \to 0\textit{)}. \tag{1.7}$$

Dimostrazione. Grazie alla (1.3) si ha

$$\|\hat{u}_n - \hat{u}\|_{C_b^0} := \max_{\mathbf{R}} |\hat{u}_n - \hat{u}| = \max_{\mathbf{R}} |(u_n - u)\hat{}\,| \leq \|u_n - u\|_{L^1} \qquad \forall n \in \mathbf{N},$$

da cui segue la tesi. □

Le seguenti proprietà seguono facilmente dalla definizione (1.1). Premettiamo una notazione che useremo spesso in questo capitolo:

$$v_-(s) := v(-s) \qquad \forall s \in \mathbf{R}, \forall v : \mathbf{R} \to \mathbf{R}.$$

Proposizione 1.3 *Per ogni $u \in L^1$,*

$$v(t) = u(t-s) \quad \Rightarrow \quad \hat{v}(\xi) = e^{-2\pi i \xi s} \hat{u}(\xi) \qquad \forall \xi, s \in \mathbf{R}, \tag{1.8}$$

$$v(t) = e^{2\pi i t \eta} u(t) \quad \Rightarrow \quad \hat{v}(\xi) = \hat{u}(\xi - \eta) \qquad \forall \xi, \eta \in \mathbf{R}, \tag{1.9}$$

$$v(t) = u(\lambda t) \quad \Rightarrow \quad \hat{v}(\xi) = \hat{u}(\xi/\lambda)/|\lambda| \qquad \forall \xi, \lambda \in \mathbf{R} \ (\lambda \neq 0). \tag{1.10}$$

Queste tre formule sono rispettivamente denominate formula del ritardo (o della traslazione nel tempo), della modulazione (o della traslazione in frequenza), del cambiamento di scala.

Dimostrazione Parziale. La verifica delle (1.8) e (1.9) è immediata; ad esempio per la prima abbiamo

$$\hat{v}(\xi) := e^{-2\pi i \xi s} \int_{\mathbf{R}} u(t-s) e^{-2\pi i \xi (t-s)}\, dt = e^{-2\pi i \xi s} \hat{u}(\xi) \qquad \forall \xi \in \mathbf{R}.$$

Pure la (1.10) è basata su un semplice cambiamento di variabile di integrazione se $\lambda > 0$ [Es]. □

Nel seguente enunciato riuniamo alcune semplici proprietà algebriche della trasformazione di Fourier. (In vista del seguente enunciato, diciamo che una funzione $u = u(t)$ è reale se $u(t) \in \mathbf{R}$ per ogni t; le funzioni immaginarie si definiscono analogamente.)

Proposizione 1.4 *Per ogni $u \in L^1$,*

$$(u^*)\hat{} = \hat{u}^*_-, \tag{1.11}$$

$$u \text{ è pari (dispari, rispett.)} \quad \Rightarrow \quad \hat{u} \text{ è pari (dispari, rispett.)}, \tag{1.12}$$

$$u \text{ è reale} \quad \Rightarrow \quad Re(\hat{u}) \text{ è pari, } Im(\hat{u}) \text{ è dispari}, \tag{1.13}$$

$$u \text{ è immaginaria} \quad \Rightarrow \quad Re(\hat{u}) \text{ è dispari, } Im(\hat{u}) \text{ è pari}, \tag{1.14}$$

$$u \text{ è reale e pari} \quad \Rightarrow \quad \hat{u} \text{ è reale e pari}, \tag{1.15}$$

$$u \text{ è reale e dispari} \quad \Rightarrow \quad \hat{u} \text{ è immaginaria e dispari}, \tag{1.16}$$

$$u \text{ è immaginaria e pari} \quad \Rightarrow \quad \hat{u} \text{ è immaginaria e pari}, \tag{1.17}$$

$$u \text{ è immaginaria e dispari} \quad \Rightarrow \quad \hat{u} \text{ è reale e dispari}. \tag{1.18}$$

Vale l'inversa di tutte queste implicazioni.

[Ex]

La scrittura $\hat{u}^*_-$ non è ambigua, poiché $(\hat{u}^*)_- = (\hat{u}_-)^*$.

Per la dimostrazione si può procedere verificando innanzitutto le (1.11) e (1.12). Poiché la parte reale della funzione $\xi \mapsto e^{-2\pi i\xi t}$ è pari e quella immaginaria è dispari, si verificano facilmente le (1.13) e (1.14). Le formule (1.15)—(1.18) seguono direttamente da (1.12)—(1.14).

Il seguente importante risultato afferma che $\mathcal{F}$ trasforma l'operazione di derivazione nel senso delle distribuzioni in quella di moltiplicazione per la variabile indipendente (a meno di una costante moltiplicativa ed eventualmente di un cambiamento di segno), e viceversa.

Teorema 1.5 *(Trasformazione di Fourier e Derivazione) Per ogni $n \in \mathbf{N}$,*

$$u, Du \in L^1 \quad \Rightarrow \quad [\mathcal{F}(Du)](\xi) = 2\pi i\xi[\mathcal{F}(u)](\xi) \quad \forall \xi \in \mathbf{R}, \tag{1.19}$$

$$u, tu \in L^1 \quad \Rightarrow \quad -2\pi i[\mathcal{F}(tu)](\xi) = D[\mathcal{F}(u)](\xi) \quad \forall \xi \in \mathbf{R}. \tag{1.20}$$

Dimostrazione. Per verificare la (1.19) utilizziamo la seguente proprietà di approssimazione (che non dimostriamo):

$$\text{per ogni } u \in L^1, \text{ esiste una successione } \{u_n\} \text{ in } \mathcal{D} \text{ tale che } u_n \to u \text{ in } L^1; \tag{1.21}$$

ovvero ogni funzione integrabile di può essere approssimata in L^1 mediante funzioni test. Per ogni n esiste un $R > 0$ tale che $\text{supp}(u_n) \subset]-R, R[$; pertanto $u_n(-R) = u_n(R) = 0$, ed integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned}
[\mathcal{F}(Du_n)](\xi) &= \int_{-R}^{R} Du_n(t)e^{-2\pi i\xi t}\, dt = \int_{-R}^{R} 2\pi i\xi u_n(t)e^{-2\pi i\xi t}\, dt \\
&= 2\pi i\xi \int_{\mathbf{R}} u_n(t)e^{-2\pi i\xi t}\, dt = 2\pi i\xi[\mathcal{F}(u_n)](\xi) \qquad \forall \xi \in \mathbf{R}, \forall n.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Inoltre, (1.7) e (1.21) forniscono

$$[\mathcal{F}(Du_n)](\xi) \to [\mathcal{F}(Du)](\xi), \qquad [\mathcal{F}(u_n)](\xi) \to [\mathcal{F}(u)](\xi) \qquad \forall \xi \in \mathbf{R};$$

passando al limite nella (1.22) perveniamo quindi alla (1.19).

La verifica della (1.20) è immediata, e non richiede il ricorso all'approssimazione: basta derivare sotto integrale grazie al teorema di Lebesgue della convergenza dominata. □

Questo risultato si estende facilmente alle derivate di ordine superiore, e più in generale agli *operatori differenziali polinomiali.* Questi sono costruiti semplicemente sostituendo la variabile in un polinomio (di grado finito e a coeffcienti complessi) con l'operatore di derivazione D: per ogni $m \in \mathbf{N}$ e $a_0, ..., a_n \in \mathbf{C}$,

$$P(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n x^n \quad \to \quad P(D) = \sum_{n=0}^{m} a_n D^n. \tag{1.23}$$

Corollario 1.6 *Per ogni $n \in \mathbf{N}$,*

$$u, D^n u \in L^1 \quad \Rightarrow \quad [\mathcal{F}(D^n u)](\xi) = (2\pi i\xi)^n[\mathcal{F}(u)](\xi) \quad \forall \xi \in \mathbf{R}, \tag{1.24}$$

$$u, t^n u \in L^1 \quad \Rightarrow \quad (-2\pi i)^n[\mathcal{F}(t^n u)](\xi) = D^n[\mathcal{F}(u)](\xi) \quad \forall \xi \in \mathbf{R}. \tag{1.25}$$

Più in generale abbiamo il seguente corollario del corollario.

Corollario 1.7 *Per ogni* $m \in \mathbf{N}$ *ed ogni polinomio* $P(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n x^n$ *a coefficienti complessi,*

$$u, D^1 u, ..., D^m u \in L^1 \quad \Rightarrow \quad [\mathcal{F}(P(D)u)](\xi) = P(2\pi i \xi)[\mathcal{F}(u)](\xi) \quad \forall \xi \in \mathbf{R}, \tag{1.26}$$

$$u, t^n u \in L^1 \quad \Rightarrow \quad [\mathcal{F}(P(-2\pi i t)u)](\xi) = P(D)[\mathcal{F}(u)](\xi) \quad \forall \xi \in \mathbf{R}. \tag{1.27}$$

Circa le ipotesi delle implicazioni (1.25) e (1.27) si noti che se $u, t^n u \in L^1$ allora $tu, ..., t^{n-1}u \in L^1$. [Ex]

Il Teorema 1.1 fornisce il seguente risultato:

Corollario 1.8 *Per ogni* $u \in L^1$ *ed ogni* $n \in \mathbf{N}$,

$$D^n u \in L^1 \quad \Rightarrow \quad \xi^n \hat{u}(\xi) \in C_b^0, \quad \xi^n \hat{u}(\xi) \to 0 \ \text{ per } \ \xi \to \pm\infty, \tag{1.28}$$

$$t^n u \in L^1 \quad \Rightarrow \quad D^n \hat{u} \in C_b^0 \quad D^n \hat{u} \to 0 \ \text{ per } \ \xi \to \pm\infty. \tag{1.29}$$

Poiché "$D^n u \in L^1$" è una condizione di regolarità per u (tanto maggiore quanto più grande è n), grazie alla (1.28) possiamo affermare che

quanto più u è regolare, tanto più rapidamente $\hat{u}$ si annulla all'infinito.

La (1.29) può essere interpretata come il viceversa "in un certo senso"

quanto più rapidamente u "decade all'infinito", tanto più $\hat{u}$ è regolare;

Questo va precisato: la condizione $t^n u \in L^1$ rappresenta effettivamente una sorta di decadimento all'infinito per la funzione u (tanto più rapido quanto n è grande), ma non implica $u(t) \to 0$ per $t \to \pm\infty$. [Ex]

A conferma di queste considerazioni, si noti che, se u è nulla fuori da un intervallo limitato, allora $\hat{u} \in C^\infty$, ancora per via della (1.29).

Teorema 1.9 *(di Parseval)*

$$\int_{\mathbf{R}} \hat{u}(x)\, v(x)\, dx = \int_{\mathbf{R}} u(x)\, \hat{v}(x)\, dx \qquad \forall u, v \in L^1. \tag{1.30}$$

Qui si moltiplica una funzione non trasformata con una trasformata; non è quindi chiaro se la variabile x rappresenti il tempo o la frequenza. In effetti questa formula non ha una interpretazione naturale in termini di segnali, tuttavia dal punto di vista matematico è particolarmente importante, e nel prossimo paragrafo vedremo che ha anche importanti ricadute applicative.

Dimostrazione. Grazie alla limitatezza di $\hat{u}$ e $\hat{v}$, entrambi gli integrali della (1.30) esistono finiti. Per ogni $u, v \in L^1$, invertendo l'ordine di integrazione (operazione che andrebbe giustificata...) si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} \hat{u}(x) v(x)\, dx &= \int_{\mathbf{R}} \Big(\int_{\mathbf{R}} u(t) e^{-2\pi i x t}\, dt \Big) v(x)\, dx \\ &= \iint_{\mathbf{R}^2} u(t) v(x) e^{-2\pi i x t}\, dx dt \\ &= \int_{\mathbf{R}} \Big(\int_{\mathbf{R}} v(x) e^{-2\pi i x t}\, dx \Big) u(t)\, dt = \int_{\mathbf{R}} u(t) \hat{v}(t)\, dt. \end{aligned} \tag{1.31}$$

□

Teorema 1.10 *(della Convoluzione)*

$$u*v \in L^1, \qquad (u*v)\hat{} = \hat{u}\,\hat{v}\ (\in C_b^0) \qquad \forall u, v \in L^1. \tag{1.32}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
(u*v)\hat{}(\xi) &= \int_{\mathbf{R}} \Big(\int_{\mathbf{R}} u(t-s)v(s)\,ds \Big) e^{-2\pi i\xi t}\,dt \\
&= \iint_{\mathbf{R}^2} u(t-s)v(s)e^{-2\pi i\xi t}\,dsdt \\
&= \int_{\mathbf{R}} u(t-s)e^{-2\pi i\xi(t-s)}\,dt \int_{\mathbf{R}} v(s)e^{-2\pi i\xi s}\,ds \\
&= \int_{\mathbf{R}} u(z)e^{-2\pi i\xi z}\,dz \int_{\mathbf{R}} v(s)e^{-2\pi i\xi s}\,ds = \hat{u}(\xi)\hat{v}(\xi) \qquad \forall \xi \in \mathbf{R}.
\end{aligned} \tag{1.33}$$

□

Esempi. Grazie alla (1.11), $(v_-^*)\hat{}= (\hat{v})^*$; quindi, per la (1.32),

$$(u*v_-^*)\hat{} = \hat{u}\,(v_-^*)\hat{} = \hat{u}\,(\hat{v})^*, \qquad (u*u_-^*)\hat{}= |\hat{u}|^2 \qquad \forall u, v \in L^1; \tag{1.34}$$

ovvero

$$\left.\begin{aligned}
&\Big(\int_{\mathbf{R}} u(t-\tau)v(-\tau)^*\,d\tau \Big)\hat{}(\xi) = \hat{u}(\xi)\,\hat{v}^*(\xi) \\
&\Big(\int_{\mathbf{R}} u(t-\tau)u(-\tau)^*\,d\tau \Big)\hat{}(\xi) = |\hat{u}(\xi)|^2
\end{aligned}\right\} \qquad \forall \xi \in \mathbf{R}, \forall u, v \in L^1. \tag{1.35}$$

Inversione della Trasformazione di Fourier. Si definisce la *trasformazione di Fourier coniugata:*

$$[\tilde{\mathcal{F}}(u)](t) := \int_{\mathbf{R}} u(\xi)e^{2\pi i\xi t}\,d\xi \qquad \forall t \in \mathbf{R}, \forall u \in L^1, \tag{1.36}$$

o anche, con scrittura del tutto equivalente,

$$[\tilde{\mathcal{F}}(u)](\xi) := \int_{\mathbf{R}} u(t)e^{2\pi i\xi t}\,dt \qquad \forall \xi \in \mathbf{R}, \forall u \in L^1. \tag{1.37}$$

Si noti che

$$\tilde{\mathcal{F}}(u^*) = [\mathcal{F}(u)]^*, \qquad \tilde{\mathcal{F}}(u) = [\mathcal{F}(u^*)]^*, \qquad \tilde{\mathcal{F}}(u) = \mathcal{F}(u)_- \quad [Es]. \tag{1.38}$$

Lemma 1.11

$$\mathcal{F}(e^{-\pi x^2}) = e^{-\pi\xi^2}, \tag{1.39}$$

e più in generale

$$\mathcal{F}(s^{-1/2}e^{-\pi t^2/s}) = e^{-\pi s\xi^2}, \qquad \mathcal{F}(e^{-\pi st^2}) = s^{-1/2}e^{-\pi\xi^2/s} \qquad \forall s > 0. \tag{1.40}$$

Dimostrazione. Posto $u(t) := e^{-\pi t^2}$, abbiamo $Du(t) := -2\pi t u(t)$; le (1.19) e (1.20) quindi forniscono

$$D\hat{u}(\xi) = -2\pi i \widehat{tu}(\xi) = i\widehat{Du}(\xi) = -2\pi\xi\hat{u}(\xi) \qquad \forall\xi \in \mathbf{R}.$$

Posto $w(\xi) := \hat{u}(\xi)e^{\pi\xi^2}$, abbiamo

$$Dw(\xi) = [D\hat{u}(\xi) + 2\pi\xi\hat{u}(\xi)]e^{\pi\xi^2} = 0 \qquad \forall\xi \in \mathbf{R},$$

quindi w è costante e, ricordando (1.2) e la formula dell'integrale di Poisson $\int_{\mathbf{R}} e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi}$,

$$w(\xi) = w(0) = \hat{u}(0) = \int u(t)\,dt = \int e^{-\pi t^2}\,dt = 1 \qquad \forall\xi \in \mathbf{R},$$

ovvero $\hat{u}(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$. La (1.39) è quindi verificata; la (1.40) discende allora dalla (1.10). $\square$

L'operatore $\tilde{\mathcal{F}}$ è anche detto *antitrasformazione di Fourier* (o *trasformazione di Fourier inversa)* in virtù del seguente teorema.

Teorema 1.12 *(Formula di Inversione) Per ogni $u \in L^1 \cap C^0_b$,*

$$\hat{u} = \mathcal{F}(u) \in L^1 \quad \Rightarrow \quad u = \tilde{\mathcal{F}}(\hat{u}). \tag{1.41}$$

Ovvero, se $u \in L^1 \cap C^0_b$ e $\hat{u} \in L^1$, allora

$$u(t) := \int_{\mathbf{R}} d\xi \int_{\mathbf{R}} u(\tau)e^{2\pi i\xi(t-\tau)}\,d\tau \; \Big(= \int_{\mathbf{R}} u(t) * e^{2\pi i\xi t}\,d\xi \Big) \qquad \forall t \in \mathbf{R}. \tag{1.42}$$

È chiaro che per la trasformazione di Fourier coniugata $\tilde{\mathcal{F}}$ valgono proprietà analoghe a quelle della trasformazione $\mathcal{F}$; in particolare $\tilde{\mathcal{F}} : L^1 \to C^0_b$. Comunque sia $\mathcal{F}$ che $\tilde{\mathcal{F}}$ non trasformano C^0_b in L^1. Pertanto le formule $\hat{u} = \mathcal{F}(u)$ e $u = \tilde{\mathcal{F}}(\hat{u})$ possono valere simultaneamente solo se $u, \hat{u} \in L^1 \cap C^0_b$; comunque nella (1.41) non è necessario richiedere $\hat{u} \in C^0_b$, poiché questo discende da $\hat{u} = \mathcal{F}(u)$.

Il Teorema di inversione fornisce anche un'interpretazione della trasformazione di Fourier: la formula

$$u(t) = \int_{\mathbf{R}} \hat{u}(\xi)e^{2\pi i\xi t}\,d\xi \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

rappresenta il segnale u come media pesata della sue componenti armoniche $t \mapsto e^{2\pi i\xi t}$: per ogni $\xi \in \mathbf{R}$, $\hat{u}(\xi)$ è l'ampiezza della componente di frequenza ξ. Il segnale può quindi essere equivalentemente rappresentato specificando i valori puntuali $u(t)$, oppure fornendone lo spettro $\hat{u}(\xi)$. In analogia con quanto visto per le serie di Fourier, l'operatore $\mathcal{F}$ ed il suo inverso $\tilde{\mathcal{F}}$ possono essere rispettivamente interpretati come *analisi* e *sintesi.*

Confronto tra le trasformate. Abbiamo indicato con la stessa lettera la trasformazione di Fourier nei diversi spazi, anche se a rigore queste trasformazioni andrebbero distinte proprio perché agiscono su spazi diversi ...

Il caso di L^1 è quello più semplice e naturale, poiché la funzione trasformata è definita in ogni punto e può essere rappresentata mediante un integrale convergente. Il caso di L^1 è quello più ricco di proprietà: l'integrale di Fourier converge solo nel senso del valore principale di Cauchy, ma la trasformazione trasforma lo spazio di L^2 in se stesso, è una isometria, quindi conserva distanze ed angoli ed è invertibile su tutto lo spazio.

Esercizi.

— Sia $u \in L^1$. Indicando con A il modulo di $\hat{u}$ e con φ la sua fase, ovviamente si ha $\hat{u} = Ae^{i\varphi}$. Grazie a (1.13) si verifichi che

$$u \text{ è reale} \quad \Rightarrow \quad A \text{ è pari, } \varphi \text{ è dispari} \quad \Rightarrow \quad \hat{u}(\xi)^* = \hat{u}(-\xi) \quad \forall \xi \in \mathbf{R}. \tag{1.43}$$

Se u è immaginaria, cosa si può dedurre in termini delle funzioni A e φ?

— Le formule (1.8), (1.9), (1.10) possono valere anche per $s, \eta, \lambda \in \mathbf{C}$?

— Ricordando il Teorema 1.5, si verifichi che

$$u, tu \in L^1 \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbf{R}} \mathcal{F}(tu)(\xi)\, d\xi = 0, \quad D[\mathcal{F}(u)](0) = -2\pi i \int_{\mathbf{R}} tu(t)\, dt. \tag{1.44}$$

— Si definiscano la *trasformata coseno* e la *trasformata seno:*

$$\begin{aligned} &[\mathcal{F}_c(u)](\xi) := 2 \int_{\mathbf{R}^+} u(x) \cos(2\pi x\xi)\, dx \qquad \forall \xi \in \mathbf{R}, \forall u \in L^1, \\ &[\mathcal{F}_s(u)](\xi) := 2 \int_{\mathbf{R}^+} u(x) \sin(2\pi x\xi)\, dx \qquad \forall \xi \in \mathbf{R}, \forall u \in L^1. \end{aligned} \tag{1.45}$$

Queste sono anche dette *trasformate trigonometriche,* e possono essere utilizzate per lo studio delle funzioni pari e dispari. Si verifichi che

$$\mathcal{F}_c^{-1} = \mathcal{F}_c\,, \qquad \mathcal{F}_s^{-1} = \mathcal{F}_s \qquad \text{(sotto le ipotesi del Teorema 1.12)}, \tag{1.46}$$

$$u \;\text{ è pari } \Rightarrow \;\hat{u} = \mathcal{F}_c(u), \qquad u \;\text{ è dispari } \Rightarrow \;\hat{u} = -i\mathcal{F}_s(u). \tag{1.47}$$

Si confrontino queste formule con quelle analoghe per le serie di Fourier.

2 Trasformazione di Fourier in L^2

Per ogni $u \in L^2$, si definisce la trasformata di Fourier (nel senso di L^2) sostituendo l'integrale su $\mathbf{R}$ con il suo *valore principale nel senso di Cauchy:*

$$\hat{u}(\xi) := \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} u(t) e^{-2\pi i \xi t}\, dt. \tag{2.1}$$

In generale, questo limite esiste finito solo per quasi ogni $\xi \in \mathbf{R}$; ad esempio non è detto che $\hat{u}(0) := \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} u(t)\, dt$ esista finito. In particolare, se $u \in L^2 \setminus L^1$ e $u \geq 0$ a.e. in $\mathbf{R}$,

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} u(t)\, dt = \int_{\mathbf{R}} u(t)\, dt = \int_{\mathbf{R}} |u(t)|\, dt = +\infty;$$

questo è il caso, ad esempio, per $u(t) = |\operatorname{sinc} t| := |\sin(\pi t)|/|\pi t|$.

Si noti l'analogia tra la definizione (2.1) e quella della serie di Fourier in forma complessa.

È immediato verificare che $\mathcal{F}$ è lineare anche in L^2. La (2.1) può essere confrontata con la definizione (1.1) della trasformazione di Fourier per $u \in L^1$, che si può riscrivere come

$$\hat{u}(\xi) := \int_{\mathbf{R}} u(t) e^{-2\pi i \xi t}\, dt = \lim_{R_1, R_2 \to +\infty} \int_{-R_1}^{R_2} u(t) e^{-2\pi i \xi t}\, dt \qquad \forall \xi \in \mathbf{R}. \tag{2.2}$$

Per $u \in L^2$, $\hat{u}$ può non essere né limitata né continua. Viene quindi meno il Teorema 1.1, mentre continuano a valere i Teoremi 1.4, 1.5 (con i corollari) e di Parseval.

Per ogni $u \in L^2$ definiamo la *trasformazione di Fourier coniugata* (nel senso di L^2):

$$[\tilde{\mathcal{F}}(u)](\xi) := \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} u(t)e^{2\pi i\xi t}\,dt \qquad q\forall\xi \in \mathbf{R}. \tag{2.3}$$

È chiaro che $\tilde{\mathcal{F}}$ gode di proprietà del tutto analoghe a quelle di $\mathcal{F}$; in particolare il limite in (2.3) esiste per quasi ogni $\xi \in \mathbf{R}$.

Teorema 2.1 *(Formula di Inversione) Per ogni $u \in L^2$,*

$$\hat{u} = \mathcal{F}(u) \quad \Leftrightarrow \quad u = \tilde{\mathcal{F}}(\hat{u}). \tag{2.4}$$

Quindi $\tilde{\mathcal{F}}$ è proprio l'inversa della trasformazione di Fourier, questa volta senza restrizioni:

$$\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^{-1} \qquad \text{in } L^2; \tag{2.5}$$

ovvero

$$u(t) := \lim_{R\to+\infty} \iint_{[-R,R]^2} u(\tau)e^{2\pi i\xi(t-\tau)}\,d\xi d\tau \qquad q\forall t \in \mathbf{R}, \forall u \in L^2. \tag{2.6}$$

La (1.38) vale anche in L^2; quindi

$$\mathcal{F}^2(u) = u_-\ , \qquad \mathcal{F}^4(u) = u \qquad \forall u \in L^2. \tag{2.7}$$

Il seguente teorema garantisce che la trasformazione di Fourier conserva l'energia.

Teorema 2.2 *(di Plancherel)*

$$\int_{\mathbf{R}} \hat{u}(\xi)\hat{v}^*(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbf{R}} u(t)v^*(t)\,dt \qquad \forall u, v \in L^2, \tag{2.8}$$

$$\int_{\mathbf{R}} |\hat{u}(\xi)|^2\,d\xi = \int_{\mathbf{R}} |u(t)|^2\,dt \qquad \forall u \in L^2. \tag{2.9}$$

Ovvero, rispettivamente,

$$(\hat{u}, \hat{v}) = (u, v) \qquad \forall u, v \in L^2, \tag{2.10}$$

$$\|\hat{u}\|_{L^2} = \|u\|_{L^2} \qquad \forall u \in L^2. \tag{2.11}$$

Dimostrazione. Verifichiamo la (2.8):

$$\int_{\mathbf{R}} \hat{u}(\hat{v})^*\,dt = \int_{\mathbf{R}} u[(\hat{v})^*]^\wedge\,dt = \int_{\mathbf{R}} u(t)\hat{\hat{v}}(-t)^*\,dt = \int_{\mathbf{R}} uv^*\,dt. \tag{2.12}$$

(La prima uguaglianza discende dall'estensione ad L^2 del Teorema di Parseval, la seconda segue dalla (1.11), la terza dalla (2.7).) La (2.9) è una conseguenza diretta della (2.8). □

Intrepretazioni del Teorema di Plancherel. In teoria dei segnali la formula (2.8) può essere interpretata nel modo seguente: l'energia del segnale u è distribuita lungo l'asse dei tempi con densità temporale $|u(t)|^2$, e lungo l'asse delle frequenze con densità spettrale $|\hat{u}(\xi)|^2$.

Le funzioni $\mathbf{R} \to \mathbf{R} : t \mapsto |u(t)|^2$ e $\xi \mapsto |\hat{u}(\xi)|^2$ sono rispettivamente denominate *potenza istantanea* e *spettro di potenza.*

Dal punto di vista analitico il teorema di Plancherel significa che la trasformazione di Fourier conserva certe proprietà *geometriche* dello spazio L^2:

(i) La trasformazione $\mathcal{F}$ conserva le lunghezze, come espresso dalla (2.11). Questo implica che $\mathcal{F}$ conserva le distanze:

$$\|\hat{u} - \hat{v}\|_{L^2} = \|(u - v)\hat{\ }\|_{L^2} = \|u - v\|_{L^2} \qquad \forall u, v \in L^2;$$

pertanto, per ogni successione $\{u_n\}$ in L^2 ed ogni $u \in L^2$,

$$u_n \to u \quad \text{in } L^2 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{u}_n \to \hat{u} \quad \text{in } L^2. \tag{2.13}$$

Quindi in L^2 sia $\mathcal{F}$ che la sua inversa $\tilde{\mathcal{F}}$ sono continue. Quest'ultima affermazione può essere confrontata con il Corollario 1.1, che esprime la continuità di $\mathcal{F}$ da L^1 a L^∞.

(ii) La trasformazione $\mathcal{F}$ conserva gli angoli. L'angolo $\theta(u, v)$ tra due elementi $u, v \in L^2$ è definito come

$$\theta(u, v) = \arccos \frac{(u, v)}{\|u\|\|v\|} \ ;$$

grazie alle (2.10) e (2.11), $\theta(\hat{u}, \hat{v}) = \theta(u, v)$. In particolare se $u, v \in L^2$ sono ortogonali, ovvero se $(u, v) = 0$, allora lo stesso vale per $\hat{u}, \hat{v}$.

3 * Trasformazione di Fourier ed Equazioni Differenziali

Siano $a_0, ..., a_n \in \mathbf{C}$ ($a_n \neq 0$) ed $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ una funzione data. Vogliamo studiare l'equazione differenziale

$$\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell D^\ell u(t) = f(t) \qquad t \in \mathbf{R}, \tag{3.1}$$

ovvero $P(D)u = f$ usando la notazione (1.23). Al fine di semplificare la trattazione, qui prescinderemo da ogni discorso sulla regolarità delle funzioni.

Applichiamo la trasformazione di Fourier ad entrambi i membri della (3.1). Grazie al Corollario 1.6,

$$P(D)u = f \qquad \Leftrightarrow \qquad P(2\pi i\xi)\hat{u} = \hat{f}; \tag{3.2}$$

l'equazione differenziale (3.1) è pertanto equivalente all'equazione algebrica [1]

$$\Big(\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell (2\pi i\xi)^\ell\Big)\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi).$$

Quindi, se

$$p(\xi) := \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell (2\pi i\xi)^\ell \neq 0 \qquad \forall \xi \in \mathbf{R}, \tag{3.3}$$

allora l'equazione (3.1) è equivalente a

$$\hat{u}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell (2\pi i\xi)^\ell} \ . \tag{3.4}$$

[1] Ovvero un'equazione in cui alla funzione incognita sono applicate solo le quattro operazioni elementari, senza derivate o integrali.

A questo punto basta invertire la trasformazione di Fourier: la (3.4) è equivalente a

$$u = \mathcal{F}^{-1}(\hat{u}) = \mathcal{F}^{-1}\biggl(\frac{\hat{f}(\xi)}{\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell (2\pi i\xi)^\ell}\biggr). \tag{3.5}$$

Infine, grazie alla formula della convoluzione,

$$u = \mathcal{F}^{-1}\biggl(\frac{1}{\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell (2\pi i\xi)^\ell}\biggr) * [\mathcal{F}^{-1}\hat{f}] = \mathcal{F}^{-1}\biggl(\frac{1}{\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell (2\pi i\xi)^\ell}\biggr) * f. \tag{3.6}$$

Possiamo quindi concludere che la soluzione della equazione differenziale (3.1) può essere rappresentata in questa forma, sotto opportune ipotesi di regolarità dei dati. Si noti che qui non sono state imposte condizioni ai limiti, poiché l'equazione è posta su tutto $\mathbf{R}$; in questo caso la soluzione non contiene costanti arbitrarie.

La Funzione di Trasferimento. Lo studio dell'equazione differenziale (3.1) può anche essere impostato dal punto di vista della teoria dei sistemi, secondo un approccio che sarà illustrato in un capitolo successivo. L'equazione differenziale definisce un operatore $L : f \mapsto u$, che è ovviamente lineare ed invariante nel tempo (dal momento che i coefficienti $\{a_\ell\}$ non dipendono da t). Ponendo $f = \delta$ in (3.6) si ottiene la risposta all'impulso unitario, che è anche detta *soluzione fondamentale* dell'equazione differenziale data:

$$\tilde{h} = \mathcal{F}^{-1}\biggl(\frac{1}{\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell (2\pi i\xi)^\ell}\biggr) * \delta = \mathcal{F}^{-1}\biggl(\frac{1}{\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell (2\pi i\xi)^\ell}\biggr). \tag{3.7}$$

Quindi la (3.6) si può riscrivere nella forma

$$u = \tilde{h} * f, \qquad \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell D^\ell \tilde{h} = \delta. \tag{3.8}$$

Due Esempi. Si considerino le equazioni differenziali

$$u - u'' = f(t), \qquad u + u'' = f(t),$$

queste sono rispettivamente associate agli operatori

$$P_1(D) := I - D^2, \qquad P_2(D) := I + D^2 \qquad (I\text{: operatore identità}),$$

i quali corrispondono ai polinomi

$$p_1(\xi) := P_1(2\pi i\xi) = 1 + 4\pi\xi^2, \qquad p_2(\xi) := P_1(2\pi i\xi) = 1 - 4\pi\xi^2 \qquad (\xi \in \mathbf{R}).$$

L'ipotesi (3.3) è soddisfatta da $p_1(D)$, ma non da $p_2(D)$. Quindi il discorso precedente può essere applicato solo alla prima equazione.