1 Numeri Complessi, Formula di Eulero, Decomposizioni Notevoli, ... ecc.

In questo breve capitolo richiamiamo le definizioni delle classi numeriche fondamentali, già note al lettore, ed introduciamo alcune nozioni basilari, quali la formula di Eulero e le funzioni iperboliche.

Poniamo:

$\mathbf{N} := \{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$: insieme dei numeri naturali;
$\mathbf{Z} := \{..., -n, ..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., n, ...\}$: insieme dei numeri interi relativi;
$\mathbf{Q} := \{m/n : m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0\}$: insieme dei numeri razionali;
$\mathbf{R}$: insieme dei numeri reali (ovvero razionali o irrazionali); [1]
$\mathbf{C} := \{z = a + ib : a, b \in \mathbf{R}\}$ (ove $i^2 = -1$): insieme dei numeri complessi. [2]

I numeri reali sono rappresentabili in forma decimale (o più in generale rispetto ad una qualsiasi base) come numeri *decimali illimitati.* I numeri razionali corrispondono ai *decimali illimitati periodici,* ad esempio

$$12 = 12{,}000..., \quad 12{,}34 = 12{,}34000..., \quad 1{,}12000 = 1{,}11999...,$$
$$1{,}12343434.... = \frac{112}{100} + \frac{34}{9900} .$$

I numeri irrazionali sono invece rappresentabili come *decimali illimitati aperiodici,* ad esempio

$$1{,}1234567891011..., \quad \sqrt{2} \;\; \pi, \quad e.$$

Questi insiemi sono *inscatolati* come segue:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}.$$

Vi sono poi anche gli spazi vettoriali $\mathbf{R}^N$, $\mathbf{C}^N$ per ogni intero $N \geq 1$.

Ricordiamo che $\mathbf{R}$ è in corrispondenza biunivoca con i punti della retta, detta *retta reale.* I numeri razionali sono distribuiti *densamente* in $\mathbf{R}$, ovvero ogni intervallo $]a, b[$ contiene infiniti razionali; tuttavia lungo la retta $\mathbf{Q}$ presenta infiniti buchi, corrispondenti agli infiniti numeri irrazionali. Per questo motivo in analisi si usano i numeri reali piuttosto che quelli razionali.

Per un qualsiasi sottoinsieme limitato A ($\neq \emptyset$) di $\mathbf{R}$, $\inf A$ e $\sup A$ necessariamente esistono in $\mathbf{R}$ (mentre $\min A$ e $\max A$ possono non esistere), ma possono essere irrazionali. Ad esempio, per $A := \{x \in \mathbf{R} : x > 0, \; x^2 < 2\}$,

$$\inf A = 0, \qquad \sup A = \sqrt{2}, \qquad \min A, \max A \;\text{ non esistono.}^3$$

Una Osservazione sui Numeri Complessi. Tramite la corrispondenza $\mathbf{C} \ni x + iy \leftrightarrow (x, y) \in \mathbf{R}^2$, l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi può essere identificato con un piano, detto *piano complesso* o *piano di Argand-Gauss.*

Tramite la *proiezione stereografica* ogni punto della sfera (ovvero della superficie di una palla) di raggio unitario è proiettato dal polo nord in un punto del piano equatoriale. Convenendo

[1] Ricordiamo che si pone anche $\mathbf{R}^+ := \{x \in \mathbf{R} : x \geq 0\}$.

[2] Per definizione, l*unità immaginaria* i risolve l'equazione $z^2 = 1$ È noto che a questa equazione si può attribuire anche la soluzione $z = -i$. La sostituzione di i con $-i$ corrisponde ad un ribaltamento del piano complesso ed è del tutto ininfluente...

[3] Ricordiamo che il $\max A$ è il piú grande elemento di A (se esiste), mentre $\sup A$ è il piú piccolo dei maggioranti di A, se l'insieme è superiormente limitato, $+\infty$ altrimenti. La distinzione tra $\min A$ e $\inf A$ è analoga.

che il polo nord stesso sia poiettato nel cosiddetto *punto all'infinito* (denotato con ∞), resta così definita una corrispondenza biunivoca e continua tra la sfera e $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$; quest'ultimo insieme è anche denominato *sfera di Riemann.*

Ricordiamo che per ogni numero complesso $z = a + ib$ (con $a, b \in \mathbf{R}$) si definiscono la parte reale $\mathrm{Re}(z)$, la parte immaginaria $\mathrm{Im}(z)$, ed il coniugato z^* come segue:

$$\mathrm{Re}(z) := a, \qquad \mathrm{Im}(z) := b, \qquad z^* := a - ib;$$

pertanto

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + z^*}{2}, \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - z^*}{2i} \qquad z^* = \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z) \qquad \forall z \in \mathbf{C}. \tag{1.1}$$

L'insieme $\mathbf{C}$ può sì essere identificato con $\mathbf{R}^2$, ma è dotato di proprietà algebriche ben più ricche di quelle dello spazio vettoriale $\mathbf{R}^2$, in quanto in $\mathbf{C}$ sono definiti anche un prodotto ed una divisione. Tale prodotto non va confuso con quello tra elementi di $\mathbf{R}^2$ e scalari di $\mathbf{R}$, né con il prodotto scalare ed il prodotto vettoriale di $\mathbf{R}^2$, che forniscono elementi di $\mathbf{R}$. [4] D'altra parte, a differenza di questi altri prodotti, il prodotto di $\mathbf{C}$ è invertibile: l'inverso della moltiplicazione per un qualsiasi complesso $w \neq 0$ è la divisione per w. [5]

In $\mathbf{C}$ vale poi il teorema fondamentale dell'algebra: per ogni $n \geq 1$, ogni equazione della forma

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0 \qquad (\text{con coefficienti } a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbf{C})$$

ha almeno una soluzione $z \in \mathbf{C}$. [6]

La Formula di Eulero e le Funzioni Circolari. I punti del piano, ovvero di $\mathbf{R}^2$, possono essere rappresentati non solo mediante le coordinate cartesiane ma anche mediante le coordinate polari (ρ, θ) (distanza dall'origine ed *anomalia):* ogni $z \in \mathbf{C}$ è della forma $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. È allora conveniente porre la *formula di Eulero*

$$e^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta \qquad \forall \theta \in \mathbf{R}, \tag{1.2}$$

e più in generale [7]

$$e^{a+i\theta} := e^a(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad \forall a, \theta \in \mathbf{R}. \tag{1.3}$$

È chiaro che ogni $z \in \mathbf{C}$ può anche essere scritto nella forma $z = \rho e^{i\theta}$. Grazie alle formule di addizione del seno e del coseno, si verifica facilmente l'identità

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2} \qquad \forall z_1, z_2 \in \mathbf{C}.$$

[4] Il prodotto vettoriale di due elementi di $\mathbf{R}^2$ è considerato come uno scalare, in quanto è perpendicolare ad $\mathbf{R}^2$.

[5] $\mathbf{C}$ può anche essere rappresentato mediante l'insieme $\mathcal{A}$ delle matrici reali antisimmetriche, tramite la corrispondenza

$$\mathbf{C} \to \mathcal{A} : a + ib \mapsto A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix};$$

in effetti le quattro operazioni in $\mathbf{C}$ si traducono nelle stesse operazioni in $\mathcal{A}$.

[6] Più precisamente, ne ha esattamente n, se queste sono considerate con la loro molteplicità (definita opportunamente...).

[7] Nel capitolo dedicato al Calcolo Complesso vedremo che questa formula può essere giustificata esprimendo l'esponenziale e le funzioni seno e coseno come serie di potenze. Comunque l'uso della notazione esponenziale è basato sul fatto che la funzione $h(\theta) := \cos\theta + i\sin\theta$ soddisfa una proprietà tipica dell'esponenziale: $h(\theta_1+\theta_2) = h(\theta_1)h(\theta_2)$, per ogni $\theta_1, \theta_2 \in \mathbf{R}$.

[Es] Si vede quindi come questa rappresentazione esponenziale sia conveniente per moltiplicazioni, divisioni e potenze di numeri complessi.

La (1.2) fornisce la seguente rappresentazione delle funzioni circolari (seno e coseno):

$$\cos\theta := \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta := \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \qquad \forall\theta\in\mathbf{R}; \tag{1.4}$$

quindi

$$\tan\theta := \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{i(e^{i\theta}+e^{-i\theta})} \qquad \forall\theta\in\mathbf{R} \text{ tale che } e^{i\theta}+e^{-i\theta}\neq 0. \tag{1.5}$$

Si noti che queste espressioni soddisfano l'identità

$$(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2 = 1 \qquad \forall\theta\in\mathbf{R}.$$

Quindi al variare di θ in $\mathbf{R}$ il punto $(x,y)=(\cos\theta,\sin\theta)$ percorre la circonferenza di equazione $x^2+y^2=1$ in $\mathbf{R}^2$. Pertanto il punto $z=\cos\theta+i\sin\theta$ appartiene alla circonferenza di equazione $\mathrm{Re}(z)^2+\mathrm{Im}(z)^2=1$ in $\mathbf{C}$, che si può scrivere equivalentemente nella forma $|z|^2=1$ (non $z^2=1$!).

Le Funzioni Iperboliche. Questi risultati suggeriscono di definire le seguenti funzioni, dette coseno iperbolico, seno iperbolico e tangente iperbolica:

$$\begin{aligned}&\cosh\theta := \frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}, \qquad \sinh\theta := \frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2} \qquad \forall\theta\in\mathbf{R},\\ &\tanh\theta := \frac{\sinh\theta}{\cosh\theta} = \frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{e^{\theta}+e^{-\theta}} \qquad \forall\theta\in\mathbf{R}.\end{aligned} \tag{1.6}$$

(Non è necessario richiedere $e^{\theta}+e^{-\theta}\neq 0$ perché la somma di due esponenziali reali non si annulla mai). Queste funzioni soddisfano l'identità

$$(\cosh\theta)^2-(\sinh\theta)^2 = 1 \qquad \forall\theta\in\mathbf{R}. \tag{1.7}$$

Quindi al variare di θ in $\mathbf{R}$ il punto $(x,y)=(\cosh\theta,\sinh\theta)$ corre lungo la curva di equazione $x^2-y^2=1$ in $\mathbf{R}^2$, ovvero l'iperbole equilatera passante per il punti $(1,0)$ e $(-1,0)$. Pertanto il punto $z=\cosh\theta+i\sinh\theta$ percorre l'iperbole equilatera di equazione $\mathrm{Re}(z)^2-\mathrm{Im}(z)^2=1$ in $\mathbf{C}$.

Fin qui abbiamo fatto variare il parametro θ in $\mathbf{R}$. Comunque, grazie agli sviluppi in serie di Taylor in campo complesso, le formule (1.4) valgono per ogni $\theta\in\mathbf{C}$, al pari della formula $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$. Pure le definizioni (1.6) possono essere estese ad ogni $\theta\in\mathbf{C}$, al pari della formula (1.7). (In tal modo si vede come la funzione esponenziale complessa permetta di costruire tutte le funzioni circolari ed iperboliche.)

Dalle formule (1.6) e (1.4) possiamo allora desumere il seguente legame tra funzioni iperboliche e circolari:

$$\begin{aligned}\cosh iz &= \cos z, \quad \sinh iz = i\sin z\\ \cos iz &= \cosh z, \quad \sin iz = i\sinh z\end{aligned} \qquad \forall z\in\mathbf{C}. \tag{1.8}$$

Questo ha interessanti conseguenze; ad esempio lungo l'asse immaginario le funzioni seno e coseno sono illimitate. Inoltre la soluzione generale dell'equazione $y''=my$ con $m>0$ può essere scritta nelle due forme equivalenti

$$\begin{aligned}&y(t) = c_1e^{mt}+c_2e^{-mt} \quad (c_1,c_2\in\mathbf{R}),\\ &y(t) = C_1\cosh(mt)+C_2\sinh(mt) \quad (C_1,C_2\in\mathbf{R}).\end{aligned} \tag{1.9}$$

In analogia con le note formule di *trigonometria circolare* si possono poi derivare le formule della *trigonometria iperbolica:*

$$\begin{aligned} \sinh(\alpha+\beta) &= \sinh\alpha\cosh\beta + \cosh\alpha\sinh\beta, \\ \cosh(\alpha+\beta) &= \cosh\alpha\cosh\beta + \sinh\alpha\sinh\beta, \\ \tanh(\alpha+\beta) &= \frac{\tanh\alpha+\tanh\beta}{1+\tanh\alpha\tanh\beta} \qquad \forall\alpha,\beta\in\mathbf{R}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Pertanto

$$\cosh 2\alpha = (\cosh\alpha)^2 + (\sinh\alpha)^2 = 2(\cosh\alpha)^2 - 1 = 2(\sinh\alpha)^2 + 1 \qquad \forall\alpha\in\mathbf{R}. \tag{1.11}$$

Alcune Decomposizioni Notevoli.

(i) *Reale ed Immaginario.* Come noto ogni numero complesso può essere rappresentato in uno ed un solo modo come somma di una parte reale e di una parte immaginaria, cf. (1.1). Viceversa la parte reale e quella immaginaria possono essere espresse in termini del numero e del suo coniugato. Questa decomposizione si applica quindi anche alle funzioni $f: A \to \mathbf{C}$.

(ii) *Pari e Dispari.* Sia A un sottoinsieme di $\mathbf{R}$ simmetrico rispetto all'origine, ad esempio $A = \mathbf{R}$. Per ogni $f: A \to \mathbf{C}$ si dice che

$$\begin{aligned} &f \text{ è pari} &&\Leftrightarrow && f(-t) = f(t) && \forall t\in A, \\ &f \text{ è dispari} &&\Leftrightarrow && f(-t) = -f(t) && \forall t\in A. \end{aligned} \tag{1.12}$$

È immediato verificare che il prodotto di due funzioni pari o di due funzioni dispari è pari, mentre il prodotto di una funzioni pari ed una dispari è dispari (il che può forse spiegare questa terminologia). Ad esempio la funzione potenza $t \mapsto t^n$ è pari se n è pari, mentre è dispari se n è dispari. Il coseno è pari, seno e tangente sono dispari; lo stesso vale per le corrispondenti funzioni iperboliche.

Ogni funzione $f: A \to \mathbf{C}$ può essere decomposta nella somma di una parte pari e di una parte dispari: $f = f_p + f_d$, ove si è posto

$$f_p(t) := \frac{f(t)+f(-t)}{2} \ \ \text{(parte pari)}, \qquad f_d(t) := \frac{f(t)-f(-t)}{2} \ \ \text{(parte dispari)}. \tag{1.13}$$

Si noti che

$$f \text{ è pari (dispari, risp.)} \quad \Leftrightarrow \quad f_d \equiv 0 \ (f_p \equiv 0, \ \text{risp.}).$$ [8]

Queste nozioni valgono anche per le successioni bilatere (ovvero con indice che varia in $\mathbf{Z}$ invece che in $\mathbf{N}$), che non sono altro che funzioni definite su $A = \mathbf{Z}$.

Si noti che

la parte reale (immaginaria, rispett.) di una funzione pari è pari;
un'analoga affermazione vale le per funzioni dispari.

Inoltre, banalmente,

la parte pari (dispari, rispett.) di una funzione reale è reale;
un'analoga affermazione vale le per funzioni immaginarie.

(iii) *Una Decomposizione Doppia.* Ogni funzione $f: A \to \mathbf{C}$ può essere decomposta univocamente nella somma di una parte pari reale f_{pr}, più una parte dispari reale f_{dr}, più una parte pari immaginaria f_{pi}, più una parte dispari immaginaria f_{di}:

$$f = f_{pr} + f_{dr} + f_{pi} + f_{di}.$$

[8] $g \equiv 0$ significa che g è identicamente nulla, ovvero $g(t) = 0$ per ogni t.

As esempio, la parte pari reale f_{pr} coincide con la parte reale della parte pari, ed anche con la parte pari della parte reale. Analoghe considerazioni valgono per f_{dr}, f_{pi}, f_{di}.

(iv) *Parte Positiva e Parte Negativa.* Posto

$$t^+ = \frac{|t| + t}{2}, \qquad t^- = \frac{|t| - t}{2} \qquad \forall t \in \mathbf{R}, \tag{1.14}$$

si ha

$$t^+, t^- \geq 0, \qquad t^+ t^- = 0, \qquad t = t^+ - t^-, \qquad |t| = t^+ + t^- \qquad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Quindi $t \geq 0$ ($t \leq 0$, risp.) se e solo se $t = t^+$ ($t = t^-$, risp.).

Ovviamente questa decomposizione può anche essere applicata a $t = f(x)$, per qualsiasi funzione a valori reali: $f : A \to \mathbf{R}$:

$$\begin{matrix} f(x)^+, f(x)^- \geq 0, & f(x)^+ f(x)^- = 0 \\ f(x) = f(x)^+ - f(x)^-, & |f(x)| = f(x)^+ + f(x)^- \end{matrix} \qquad \forall x \in A. \tag{1.15}$$

(v) *Parte Simmetrica e Parte Asimmetrica di una Matrice Quadrata.* Data una $A = \{a_{ij}\}$ una matrice di $\mathbf{C}^{N^2}$, poniamo

$$a_{ij}^{(s)} := a_{ij} + a_{ji}, \qquad a_{ij}^{(a)} := a_{ij} - a_{ji} \qquad \forall i, j \in \{1, .., N\}.$$

Le matrici quadrate $A^{(s)} = \{a_{ij}^{(s)}\}$ e $A^{(a)} = \{a_{ij}^{(a)}\}$ sono quindi rispettivamente simmetrica e antisimmetrica; inoltre $A = A^{(s)} + A^{(a)}$.

(vi) *Parte Crescente e Parte Decrescente.* Vediamo ora che un'ampia classe di funzioni reali di una variabile reale può essere rappresentata come differenza di due funzioni non decrescenti.

Sia A un intervallo di $\mathbf{R}$, eventualmente $A = \mathbf{R}$. Per ogni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ di classe C^1, scelto un qualsiasi $a \in A$ e posto

$$g_1(t) = \int_a^t f'(\tau)^+ \, d\tau, \qquad g_2(t) = \int_a^t f'(\tau)^- \, d\tau \qquad \forall t \in \mathbf{R}, \tag{1.16}$$

le funzioni g_1 e g_2 sono entrambe non decrescenti e $f = g_1 - g_2$.

Esercizi.

— Si rappresentino i seguenti numeri complessi [9]

$$3i \exp(iRe^{i\varphi}), \quad (2 + i) \exp(-i2^{i+1}), \quad (3 - i)^{-1} \exp(\pi^\pi / i), \quad ....$$

in forma cartesiana $x + iy$ ed in forma esponenziale e^z.

— Mediante il coniugio e le altre consuete operazioni, si può rapprentare la trasformazione $\mathbf{C} \to \mathbf{C} : x + iy \mapsto -x + iy$?

— Per ogni $a > 0$ si definisca l'esponenziale in base a ponendo $a^z := e^{z \log a}$ per ogni $z \in \mathbf{C}$, e si discutano le proprietà di questa funzione.

— Dall'identità $(e^a)^b = e^{ab}$ valida per ogni $a, b \in \mathbf{C}$ si ricavi la formula di *de Moivre:*

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \qquad \forall \theta \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}.$$

— Si verifichi la formula della radice:

$$\begin{matrix} (\cos\theta + i \sin\theta)^{1/n} = \cos(\theta/n + 2k\pi/n) + i \sin(\theta/n + 2k\pi/n) \\ \text{per } k = 0, ..., n, \ \forall \theta \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N} (n \neq 0). \end{matrix} \tag{1.17}$$

[9] Per ragioni tipografiche a volte è utile porre $\exp \xi := e^\xi$.

— Si verifichino le formule (1.10).

— Si ricavino le formule di bisezione in trigonometria iperbolica, ovvero si esprimano $\sinh(\alpha/2), \cosh(\alpha/2), \tanh(\alpha/2)$ mediante le funzioni iperboliche di α.

— Si determinino la parti pari e dispari di una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ tale che $f(t) = 0$ per ogni $t < 0$.