Equazioni alle derivate parziali

A. Visintin (Trento) — Feb-Mag 2010

1. Equazioni alle derivate parziali lineari [ReRo; chaps. 1,2,4], [Sa; Sect. 2.4]

Principali equazioni lineari del secondo ordine: equazione di Laplace, equazione del calore, equazione delle onde. Derivazione dell'equazione del calore.

Diversi tipi di condizioni al bordo. Risoluzione di problemi ai limiti per equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti mediante separazione di variabili. (Esercizi.)

Principio di Duhamel. Soluzione di D'Alembert dell'equazione delle onde. Confronto tra le proprietà qualitative delle equazioni del calore e delle onde.

Principio variazionale per i problemi di Dirichlet e di Neumann per l'equazione di Laplace. Formulazione debole del problema di Cauchy per le equazioni del calore e delle onde. Integrale dell'energia. Formula di Green. Unicità e dipendenza monotona dai dati.

Principio del massimo in spazi di funzioni continue, per operatori ellittici e per operatori parabolici. Principi del massimo in forma debole e in forma forte.

Passeggiata aleatoria unidimensionale; calcolo della media e della media quadratica. Derivazione del moto browniano. Derivazione dell'equazione di Fokker-Planck con o senza termine di deriva.

Soluzione fondamentale dell'equazione del calore, e suo uso per la risoluzione di problemi di Cauchy non omogenei.

Multiindici. Simbolo e parte principale di un operatore differenziale lineare. Classificazione delle equazioni del secondo ordine. (Iper)superficie caratteristiche. (Esercizi.)

Classificazione delle equazioni non lineari. Teorema di Cauchy-Kovalevskaya (cenni).

2. Distribuzioni [Note in rete], [EgSh; Sects. 2.1, 2.2]

Spazio delle funzioni test, $\mathcal{D}$. Esempi. Nozione di convergenza. Spazi L^p_{loc}.

Spazio delle distribuzioni, $\mathcal{D}'$. Esempi e caratterizzazione delle distribuzioni. (Esercizi.) Convergenza di distribuzioni. Ordine delle distribuzioni.

Derivazione di distribuzioni. Confronto con la derivata classica e con quella quasi ovunque.

Approssimazione delle distribuzioni. Supporto delle distribuzioni. Distribuzioni di ordine finito.

Spazi delle funzioni infinitamente derivabili, $\mathcal{E}$, e delle distribuzioni a supporto compatto, $\mathcal{E}'$.

Spazi delle funzioni rapidamente decrescenti, $\mathcal{S}$, e delle distribuzioni temperate, $\mathcal{S}'$.

Richiami sulla trasformazione di Fourier in L^1 e in L^2. Estensione della trasformazione di Fourier a $\mathcal{S}'$.

Uso della trasformazione di Fourier nello studio di equazioni differenziali a coefficienti costanti.

Nozione di soluzione fondamentale per problemi stazionari ed evolutivi. Soluzione fondamentale degli operatori di Laplace e del calore. Funzione di Green e deduzione di proprietà delle funzioni armoniche.

3. Spazi di Sobolev [Note in rete]

Insiemi euclidei Hölderiani e proprietà di cono. Esempi e controesempi. Spazi di Sobolev $W^{m,p}$ e loro proprietà basilari.

Operatore di estensione. Spazi di funzioni nulle al bordo. Spazi di Sobolev ad esponente negativo e frazionari.

Teorema di Sobolev. Inclusioni tra spazi di Sobolev. Teorema di Morrey e corrispondenti inclusioni. Indici di Sobolev e di Morrey. Teorema di compattezza di Rellich.

Spazi di Sobolev sulle varietà. Teoremi di traccia.

Teorema del rapporto incrementale. Disuguaglianza di Friedrichs.

4. Analisi convessa e minimizzazione [Note in rete]

Introduzione all'analisi convessa. Classe delle funzioni convesse e semicontinue inferiormente. Nozioni di funzione convessa coniugata di Legendre-Fenchel, di sottodifferenziale, e loro proprietà. Diseguaglianza di Fenchel. (Esercizi.)

Minimizzazione di funzionali in uno spazio topologico, e in uno spazio di Banach. Nozione di buona posizione nel senso di Tychonoff dei problemi di minimizzazione.

Operatori massimali monotoni e loro rappresentazione variazionale. Operatori ciclicamente monotoni.

Introduzione alle disequazioni variazionali. Teorema di Lions-Stampacchia.

Introduzione alla Gamma-convergenza. Definizioni, risultati principali, esempi. (Esercizi.)

5. Studio di alcune PDEs nonlineari

Discussione del metodo di dimostrazione dell'esistenza della soluzione di equazioni alle derivate parziali non lineari mediante: (i) approssimazione, (ii) derivazione di stime a priori. (iii) passaggio al limite nel termine non lineare.

Discussione dell'esistenza della soluzione per le equazioni di Landau-Lifshitz.

Introduzione al problema di Stefan: il problema di frontiera libera e la sua formulazione debole.

Formulazione variazionale negli spazi di Sobolev Hilbertiani del problema di Cauchy per il sistema

$$w_t - \Delta u = f, \qquad w \in \alpha(u) \qquad (\alpha\text{: grafo massimale monotono}).$$

Dimostrazione del teorema di esistenza ed unicità.

Alcuni testi sulle PDEs

Yu.V. Egorov, M.A. Shubin: Foundations of the classical theory of partial differential equations. Springer , Berlin 1992

L.C. Evans: Partial differential equations. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998

R.C. McOwen: Partial differential equations. Prentice Hall, 1996

M. Renardy, R. Rogers: An introduction to partial differential equations. Springer-Verlag, New York, 2004

S. Salsa: Equazioni a derivate parziali: metodi, modelli e applicazioni. Springer Italia, Milano 2003.