COGNOME | | NOME | |
N. Matricola | |

Firma dello studente ______________________________ **A**

II Prova di Analisi Numerica

21 dicembre 2005

Esercizio 1

Calcolare con errore minor di 10^{-2}

$$\int_0^1 (x+1)e^x \, dx \,.$$

Esercizio 2

Risolvere usando il metodo di Gauss con pivoting

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 3

Studiare la convergenza dei metodi iterativi di Jacobi e di Gauss Seidel per le seguenti matrici:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Esercizio 4

Scrivere una funzione di Octave che implementi il seguente metodo iterativo per sistemi lineari:

$$\mathbf{x}^{(\mathbf{0})} \text{ assegnato}$$

$$x_i^{(k+1)} = (1-w)x_i^{(k)} + \frac{w}{A_{i,i}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} A_{i,j}x_j^{(k)}\right] \quad i = 1, \dots, n$$

Il programma deve ricevere in ingresso la matrice A, il vettore termine noto $\mathbf{b}$ del sistema lineare e il parametro ω e deve restituire la soluzione $\mathbf{x}$ e il numero d'iterazioni `nit`.
Il programma deve eseguire le seguenti istruzioni:

- calcolo del vettore iniziale $\mathbf{x}^0$ (vettore colonna di zeri),
- inizializzazione del contatore dell'iterazioni a zero,
- calcolo del residuo iniziale $res = \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}^0\|$,
- ciclo `while` da fermare se il numero di iterazione supera 200 o il residuo e minore di 10^{-5};
- al interno del ciclo `while`

  aggiornamento del numero d'iterazioni,

  calcolo componente a componente del nuovo vettore $x_i^{(k+1)}$. (**Suggerimento:** procedere come nel programma Jacobi calcolando la prima componente, poi in un ciclo calcolare le componenti dalla 2 alla n-1 e finalmente fuori del ciclo la n-esima componente.)

  calcolo del nuovo residuo.

Risolvere il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

con questo metodo e parametro $\omega = 0.5$, $\omega = 1$ e $\omega = 1.2$.
Riportare nella tabella il numero d'iterazioni.

ω	N. iterazioni
$\omega = 0.7$	
$\omega = 1$	
$\omega = 1.3$	

COGNOME NOME

N. Matricola

Firma dello studente ______________________________ **B**

II Prova di Analisi Numerica

21 dicembre 2005

Esercizio 1

Calcolare
$$\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x+1} dx\,.$$
usando il metodo di Cavalieri Simpson con due sottointervalli e dare una stima dell errore.

Esercizio 2

Calcolare la fattorizzazione LU della matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Esercizio 3

Studiare la convergenza dei metodi iterativi di Jacobi e di Gauss Seidel per le seguenti matrici:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Esercizio 4

Scrivere una funzione di Octave che implementi il metodo di Richardson con parametro α ottimale.

$$\mathbf{x^{(0)}} \text{ assegnato}$$

$$\mathbf{x^{(k+1)}} = \mathbf{x^{(k)}} + \alpha_{ott}(\mathbf{b} - A\mathbf{x^{(k)}})$$

Il programma deve ricevere in ingresso la matrice A e il vettore termine noto **b** del sistema lineare e deve restituire la soluzione `x`, il numero d'iterazioni `nit` e il parametro ottimale α_{ott}.
Il programma deve eseguire le seguenti istruzioni:

- calcolo del vettore iniziale $\mathbf{x}^0$ (vettore colonna di zeri),
- calcolo del parametro ottimale α_{ott},
- inizializzazione del contatore dell'iterazioni a zero,
- calcolo del residuo iniziale $res = \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}^0\|$,
- ciclo `while` da fermare se il numero di iterazione supera 200 o il residuo e minore di 10^{-5};
- al interno del ciclo `while`

  aggiornamento del numero d'iterazioni,
  calcolo del nuovo vettore $\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \alpha_{ott}(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^n)$
  calcolo del nuovo residuo.

Usando questo programma risolvere il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Soluzione :

Numero di iterazioni:

Parametro ottimale: