COGNOME NOME

N. Matricola

Firma dello studente ______________________ **A**

I Appello di Analisi Numerica

17 gennaio 2006

Esercizio 1

Calcolare il polinomio interpolatore e la retta di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati dei seguenti dati

x_i	-2	-1	0	2	3
y_i	2	1	-1	-1	1

Per calolare il polinomio interpolatore uso la forma di Newton. Costruisco la tabella delle differenze divise:

$x_0 = -2 \quad y_0 = 2$

$x_1 = -1 \quad y_1 = 1 \quad f[x_0, x_1] = \frac{1-2}{-1+2} = -1$

$x_2 = 0 \quad y_2 = -1 \quad f[x_1, x_2] = \frac{-1-1}{0+1} = -2 \quad f[x_0, x_1, x_2] = \frac{-2+1}{0+2} = -1/2$

$x_3 = 2 \quad y_3 = -1 \quad f[x_2, x_3] = \frac{-1+1}{2-0} = 0 \quad f[x_1, x_2, x_3] = \frac{0+2}{2+1} = 2/3$

$x_4 = 3 \quad y_4 = 1 \quad f[x_3, x_4] = \frac{1+1}{3-2} = 2 \quad f[x_2, x_3, x_4] = \frac{2-0}{3-0} = 2/3$

$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{2/3+1/2}{2+2} = 7/24$

$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{2/3-2/3}{3+1} = 0 \qquad f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{0-7/24}{3+2} = -7/120$

Il polinomio interpolatore risulta:

$$P(x) = 2 - (x+2) - \frac{1}{2}(x+2)(x+1) + \frac{7}{24}(x+2)(x+1)x - \frac{7}{120}(x+2)(x+1)x(x-2).$$

Per calcolare la retta di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati $r(x) = a_0 + a_1 x$ si risolve il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^4 1 & \sum_{i=0}^4 x_i \\ \sum_{i=0}^4 x_i & \sum_{i=0}^4 x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^4 y_i \\ \sum_{i=0^4} x_i\, y_i \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$5a_0 + 2a_1 = 2\,, \quad a_1 = 1 - \frac{5}{2}a_0$$

$$2a_0 + 18\big(1 - \frac{5}{2}a_0\big) = -4\,, \quad 2a_0 - 45a_0 = -4 - 18 = -22\,, \quad a_0 = \frac{22}{43}$$

$$a_1 = 1 - \frac{5}{2}\frac{22}{43} = 1 - \frac{55}{43} = -\frac{12}{43}$$

La retta di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati è: $r(x) = \frac{1}{43}(22 - 12x)$.

Esercizio 2

Calcolare
$$\int_0^1 \frac{\cos(\pi x)}{2-x} dx\,.$$
usando il metodo dei trapezi con quattro sottointervalli e dare una stima dell'errore.

Per usare il metodo dei trapezi con quattro sottointervalli devo conoscere il valore della funzione nei punti $x_0 = 0$, $x_1 = 1/4$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = 3/4$ e $x_4 = 1$.

$$f(0) = \frac{\cos 0}{2} = 1/2\,, \quad f(1/4) = \frac{\cos(\pi/4)}{2-1/4} = \frac{\sqrt{2}/2}{7/4} = \frac{2\sqrt{2}}{7}\,,$$

$$f(1/2) = \frac{\cos(\pi/2)}{2-1/2} = 0\,, \quad f(3/4) = \frac{\cos(3\pi/4)}{2-3/4} = \frac{-\sqrt{2}/2}{5/4} = -\frac{2\sqrt{2}}{5}\,, \quad f(1) = \frac{\cos\pi}{1} = -1.$$

$$I_4^{TC} = \frac{1}{4}\Big[\frac{1}{2}f(0)+f(1/4)+f(1/2)+f(3/4)+\frac{1}{2}f(1)\Big] = \frac{1}{4}\Big[\frac{1}{4}+\frac{2\sqrt{2}}{7}-\frac{2\sqrt{2}}{5}-\frac{1}{2}\Big] = -\frac{1}{4}\Big[\frac{1}{4}+\frac{4\sqrt{2}}{35}\Big] = -0.10291$$

Per dare una stima dell'eerore uso l'integrale approssimato con due sottointervalli:

$$I_2^{TC} = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}f(0) + f(1/2) + \frac{1}{2}f(1)\Big] = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\Big] = -1/8$$

Possiamo stimare l'errore mediante la formula

$$\Big|\int_0^1 \frac{\cos(\pi x)}{2-x} dx - I_4^{TC}\Big| \approx \frac{|I_4^{TC} - I_2^{TC}|}{3} = 0.073633$$

.

Esercizio 3

Calcolare la fattorizzazione LU della matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

e risolvere il sistema lineare

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Tenendo conto che la matrice A è tridiagonale

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{lcl} \alpha_1 = -1 & & \\ \beta_2\alpha_1 = 2 & \rightsquigarrow & \beta_2 = 2/\alpha_1 = -2 \\ 2\beta_2 + \alpha_2 = -1 & \rightsquigarrow & \alpha_2 = -1 - 2\beta_2 = -1 + 4 = 3 \\ \beta_3\alpha_2 = 3 & \rightsquigarrow & \beta_3 = 1 \\ -2\beta_3 + \alpha_3 = 0 & \rightsquigarrow & \alpha_3 = 2\beta_3 = 2 \\ \beta_4\alpha_3 = 6 & \rightsquigarrow & \beta_4 = 3 \\ 2\beta_4 + \alpha_4 = 5 & \rightsquigarrow & \alpha_4 = 5 - 2\beta_4 = -1 \end{array}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Si risolvono due sistemi triangolari $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ e $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$y_1 = 1$, $y_2 = 2y_1 = 2$, $y_3 = 4 - y_2 = 2$, $y_4 = 4 - 3y_3 = 4 - 6 = -2$.

$$U\mathbf{x} = \mathbf{y} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$x_4 = 2$, $x_3 = \frac{1}{2}(2 - 2x_4) = -1$, $x_2 = \frac{1}{3}(2 + 2x_3) = 0$, $x_1 = -(1 - 2x_2) = -1$.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Esercizio 4

Siano $f(x) = x^2 + x$ e $g(x) = \frac{2x+3}{x^2-x+3}$. L'equazione $f(x) = g(x)$ ha due radici $x_1 < x_2$. Scrivere un script di Octave che disegni i grafici sovraposti delle due funzioni in modo di visualizare le due radici e calcoli l'area della regione compresa tra le due curve da x_1 a x_2.
Lo script deve

- disegnare il grafico della funzione $f(x)$ e della funzione $g(x)$;
- calcolare x_1 e x_2;
- calcolare l'integrale fra x_1 e x_2 della funzione $g - f$.

```
x=linspace(-2,2);
f=x.^2+x;
g=(2*x+3)./(x.^2-x+3);
plot(x,f,x,g);
fun='(2*x+3)./(x.^2-x+3)-x.^2-x';
x1=fsolve(fun,-2)
x2=fsolve(fun,2)
I=quad(fun,x1,x2)
```

$x_1 = -1.1241$

$x_2 = 0.87605$

$\int_{x_1}^{x_2} (g - f)(x)\, dx = 1.3353$