COGNOME ____________ NOME ____________

N. Matricola ____________

Firma dello studente ______________________________

II Appello di Analisi Numerica

17 febbraio 2006

Esercizio 1

Calcolare con errore minore di 10^{-2}
$$\int_0^1 \frac{e^x}{x+2}\,dx\,.$$

Se si usa la formula dei trapezi con N sottointervalli per approssimare $\int_a^b f(x)\,dx$ l'errore verifica
$$E_N^{TC} = \Big|\int_a^b f(x)\,dx - I_N^{TC}\Big| \le \frac{b-a}{12}\Big(\frac{b-a}{N}\Big)^2 \max_{a\le x\le b}|f''(x)|\;.$$

Sia $f(x)=\frac{e^x}{x+2}$ allora
$$f'(x) = \frac{e^x(x+2)-e^x}{(x+2)^2} = \frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}$$
$$f''(x) = \frac{e^x(x+2)(x+2)^2 - e^x(x+1)2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{e^x(x+2)^2 - 2e^x(x+1)}{(x+2)^3}$$
$$= \frac{e^x(x^2+4x+4-2x-2)}{(x+2)^3} = \frac{e^x(x^2+2x+2)}{(x+2)^3}\,.$$

Nell'intervallo $[0,1]$ il numeratore è minore di $e^1(1^2+2\cdot 1+2)$ e il denominatore maggiore di 2^3, pertanto
$$\max_{0\le x\le 1}|f''(x)| \le \frac{e(1+2+2)}{2^3} = 5e/8$$

Cerchiamo N tale che
$$\frac{1}{12}\frac{1}{N^2}\frac{5e}{8} < 10^{-2}$$
$$\frac{10^2\cdot 5e}{12\cdot 8} < N^2$$
$$N > \frac{10}{4}\sqrt{\frac{5e}{6}} = 3.7627$$

Pertanto approssimiamo $\int_0^1 \frac{e^x}{x+2}\,dx$ usando il metodo dei trapezi con 4 sottointervalli
$$\int_0^1 \frac{e^x}{x+2}\,dx \approx \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{2}f(0) + f(1/4) + f(1/2) + f(3/4) + \frac{1}{2}f(1)\Big)$$
$$= \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{2}0.5 + 0.57068 + 0.65949 + 0.76982 + \frac{1}{2}0.90609\Big) = \mathbf{0.67576}.$$

Esercizio 2

Data l'equazione

$$x^3 + x^2 - 3 = 0$$

i) dimostrare che ha soluzione nell'intervallo (1,2),

ii) usando il metodo della bisezione approssimare la soluzione con errore minore di 0.125,

iii) usando il metodo di Newton e tomando come valore iniziale l'approssimazione calcolata col metodo della bisezione approssimare la soluzione con errore stimato minore di 10^{-4}.

i) La funzione $f(x) = x^3 + x^2 - 3$ è una funzione continua. $f(1) = 1+1-3 < 0$ e $f(2) = 8+4-3 > 0$. Pertanto esiste $\alpha \in (1,2)$ tale che $f(\alpha) = 0$.

ii) Il metodo della bisezione ci da come prima approssimazione di α il punto medio dell'intervallo $[1,2]$. Conosciamo anche una stima dell'errore.

$$x_0 = (1+2)/2 = 3/2, \quad |x_0 - \alpha| < (2-1)/2 = 0.5.$$

Siccome $f(3/2) = \frac{27}{8} + \frac{9}{4} - 3 = \frac{27+18-24}{8} > 0$ allora $\alpha \in (1, 3/2)$, pertanto

$$x_1 = \frac{1+3/2}{2} = 5/4 \text{ e } |x_1 - \alpha| < \frac{3/2-1}{2} = 0.25.$$

Siccome $f(5/4) = \frac{125}{64} + \frac{25}{16} - 3 = \frac{125+100-192}{64} > 0$ allora $\alpha \in (1, 5/4)$, pertanto

$$x_2 = \frac{1+5/4}{2} = 9/8 \text{ e } |x_2 - \alpha| < \frac{5/4-1}{2} = 0.125.$$

iii) Adesso usiamo il metodo di Newton partendo da $z_0 = x_2 = 0.125$

$$z_0 = 0.125$$
$$z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^3+z_n^2-3}{3z_n^2+2z_n} \quad \text{per } n \geq 0$$

$$\text{Se } |z_{n+1} - z_n| = |\tfrac{z_n^3+z_n^2-3}{3z_n^2+2z_n}| < 10^{-4} \text{ STOP}$$

$z_0 = 9/8$

$z_1 = \frac{9}{8} - \frac{(9/8)^3+(9/8)^2-3}{3(9/8)^2+2(9/8)} = \frac{9}{8} + 0.051357 = 1.176357$

$|z_1 - z_0| = 0.051357 \geq 10^{-4}$

$z_2 = 1.176357 - \frac{1.176357^3+1.176357^2-3}{3 \cdot 1.176357^2+2 \cdot 1.176357} = 1.176357 - 0.001795 = 1.174562$

$|z_2 - z_1| = 0.001795 \geq 10^{-4}$

$z^3 = 1.174562 - \frac{1.174562^3+1.174562^2-3}{3 \cdot 1.174562^2+2 \cdot 1.174562} = 1.174562 - 0.000002 = 1.174559$

$|z_3 - z_2| = 0.000002 < 10^{-4}$ STOP .

$$\alpha \approx 1.174559\,.$$

Esercizio 3

Calcolare la fattorizzazione LU della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

e risolvere il sistema lineare

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Tenendo conto che la matrice A è tridiagonale

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = 1 & & \\ \beta_2\alpha_1 = 2 & \rightsquigarrow & \beta_2 = 2 \\ -\beta_2 + \alpha_2 = 0 & \rightsquigarrow & \alpha_2 = 2 \\ \beta_3\alpha_2 = -2 & \rightsquigarrow & \beta_3 = -1 \\ -\beta_3 + \alpha_3 = -1 & \rightsquigarrow & \alpha_3 = -1 + \beta_3 = -2 \\ \beta_4\alpha_3 = -6 & \rightsquigarrow & \beta_4 = 3 \\ 2\beta_4 + \alpha_4 = 3 & \rightsquigarrow & \alpha_4 = 3 - 6 = -3 \end{array}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Si risolvono due sistemi triangolari $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ e $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$y_1 = -1$, $y_2 = 3 - 2y_1 = 3 + 2 = 5$, $y_3 = -3 + y_2 = -3 + 5 = 2$, $y_4 = 6 - 3y_3 = 0$.

$$U\mathbf{x} = \mathbf{y} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_4 = 0$, $x_3 = \frac{-1}{2}(2 - 2x_4) = -1$, $x_2 = \frac{1}{2}(5 + x_3) = 2$, $x_1 = -1 + x_2 = 1$.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 4

Scrivere uno script di Octave che chieda in ingresso due vettori **x** e **y** di uguale lunghezza e:

- calcoli il polinomio interpolatore $p(x)$,
- calcoli la retta di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati $r(x)$,
- disegni un grafico coi dati **x**, **y** (con simbolo puntuale), il polinomio interpolatore $p(x)$, la retta di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati $r(x)$ e la spline cubica interpolatoria $s(x)$, (le tre funzioni $p(x)$, $r(x)$ e $s(x)$ con simbolo "di linea"),
- calcoli l'integrale tra il valore minimo e il valore massimo delle **x** del polinomio interpolatore $p(x)$.

Provare lo script coi seguenti dati

x_i	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
y_i	5.1	4.3	3.7	2.9	2.2	1.5	1	0.4	-0.3	-0.9	-1.5

```
x=input('valori di x: ');
y=input('valori di y: ');
if length(x) ~= length(y)
  disp('error')
  break
end
p=polyfit(x,y,length(x)-1)
r=polyfit(x,y,1)
a=min(x);
b=max(x);
xx=linspace(a,b);
pxx=polyval(p,xx);
rxx=polyval(r,xx);
sxx=spline(x,y,xx);
plot(x,y,'*',xx,pxx,xx,rxx,xx,sxx)
q=polyinteg(p);
int=polyval(q,b)-polyval(q,a)
```

Polinomio interpolatore:
$p(x) = 0.0058131\,x^{10} + 0.0266667\,x^9 - 0.0245503\,x^8 - 0.2253968\,x^7 - 0.0474815\,x^6 + 0.6372222\,x^5$
$+0.2838536\,x^4 - 0.7361111\,x^3 - 0.2676349\,x^2 - 0.9523810\,x + 1.0000000$

Retta di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati:
$r(x) = -1.3091x + 1.0182$

$\int_{-3}^{2} p(x)\,dx \approx 8.0208$