Esercizi 2-3 dicembre 2019

Esercizio 1 (20 gennaio 2016) Dimostrare che il metodo di Eulero modificato

$$
\begin{array}{l}
u_0 = y_0 \\
\text{for } i = 0, 1, \ldots, n-1 \\
\quad K_1 = f(t_i, u_i) \\
\quad K_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{h}{2} K_1) \\
\quad u_{i+1} = u_i + h\, K_2
\end{array}
$$

è zero stabile.

Sia dato il problema di Cauchy

$$
\begin{cases} y'(t) = ty^2 & t \in t > 0 \\ y(0) = -1 \end{cases}
$$

che ammette soluzione esatta $y(t) = -\frac{2}{t^2+2}$. Utilizzando il metodo di Eulero modificato con $h = 0.25$ si calcoli un'approssimazione della soluzione esatta in $t = 0.5$ e l'errore commesso utilizzando 5 cifre per il calcolo.

Esercizio 2 (5 febbraio 2016) Dimostrare che il metodo di Adams-Bashforth

$$
u_{n+1} = u_n + \frac{h}{12}[23f(t_n, u_n) - 16f(t_{n-1}, u_{n-1}) + 5f(t_{n-2}, u_{n-2})]
$$

è consistente di ordine 3.

Sia dato il problema di Cauchy

$$
\begin{cases} y'(t) = ty^2 & t \in t > 0 \\ y(0) = -1 \end{cases}
$$

che ammette soluzione esatta $y(t) = -\frac{2}{t^2+2}$. Utilizzando il metodo di Adams-Bashforth a 3 passi con $h = 0.25$, $u_1 = y(t_1)$ e $u_2 = y(t_2)$, si calcoli un'approssimazione della soluzione esatta in $t = 1$ e l'errore commesso utilizzando 5 cifre per il calcolo.

Esercizio 3 (10 luglio 2016) Per approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$
\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in (t0, t0 + T) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}
$$

si consideri il seguente metodo multistep

$$
u_{n+1} = 2u_{n-1} - u_{n-3} + 2h[f(t_n, u_n) - f(t_{n-2}, u_{n-2})]
$$

1. Dire quanti sono i passi del metodo e se è implicito o esplicito, motivando le risposte.
2. Trovare l'ordine di consistenza.

Esercizio 4 (13 gennaio 2018) Per l'approssimazione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \quad t \in (t_0, t_0 + T) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

si consideri il seguente schema numerico: dato $u_0 = y_0$,

$$\begin{aligned} &u_0 = y_0 \\ &\text{for } i = 0, 1, \ldots, n-1 \\ &\quad K_1 = f(t_i, u_i) \\ &\quad K_2 = f(t_i + \tfrac{2}{3}h, u_i + \tfrac{2}{3}hK_1) \\ &\quad u_{i+1} = u_i + \tfrac{h}{4}(K_1 + 3K_2) \end{aligned}$$

Trovare l'ordine di consistenza.