

06-12-2019

Metodi per l'approssimazione della soluzione di un problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in (t_0, t_0 + T) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Si divide l'intervallo $(t_0, t_0 + T)$ in N sottointervalli di ampiezza $h = \frac{T}{N}$, quindi si definiscono N punti $t_i = t_0 + i h$ $i = 0, \dots, N$ e si cerca una approssimazione $u_i \approx y(t_i)$ $0 \leq i \leq N$.

Come primo esempio abbiamo visto e analizzato il metodo di Eulero e adesso stiamo vedendo come costruire metodi "veloci".

Metodi di Adams-Bashforth.

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} y'(t) dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt$$

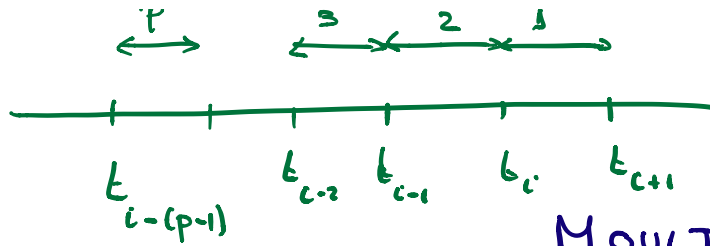
$$y(t_{i+1}) - y(t_i) \approx \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sum_{k=0}^{p-1} f(t_{i-k}, y(t_{i-k})) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{p-1} \frac{t - t_{i-j}}{t_i - t_{i-j}}$$

Polinomio di grado $p-1$ che interpola $f(t, y(t))$ nei punti:

$$t_{i+1}, \quad \underbrace{t_i, t_{i-1}, \dots, t_{i-(p-1)}}_{p-1 \text{ punti}}$$

$$u_{i+1} = u_i + h \sum_{k=0}^{p-1} \beta_k f(t_{i-k}, u_{i-k})$$

Metodo a p passi esplicito



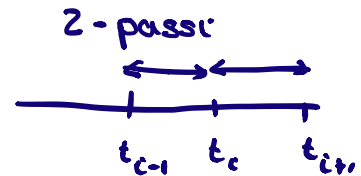
MOULTON

I metodi di Adams - Moulton si derivano analogamente considerando il polinomio di grado p che interpola $f(t, y(t))$ nei punti $\underbrace{t_{i+1}, t_i, t_{i-1}, \dots, t_{i-(p-1)}}_{p+1 \text{ punti}}$

Esempi

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{12} (5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1})$$

$f(t_{i+1}, u_{i+1})$



$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{24} (9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2})$$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{720} (251f_{i+1} + 646f_i - 264f_{i-1} + 106f_{i-2} - 19f_{i-3})$$

(Metodo di Adams - Moulton a 1 passo \leftrightarrow Gank-Nielson)

Sono metodi impliciti

I metodi di Adams sono esempi di metodi a più passi. La forma generale dei metodi a più passi è

$$u_{i+1} = \sum_{k=0}^q a_k u_{i-k} + h \beta_{-1} f_{i+1} + h \sum_{k=0}^q \beta_k f_{i-k}$$

Se $\beta_{-1} \neq 0$ allora il metodo è implicito

Se $\beta_{-1} = 0$ il metodo è esplicito.

Se $a_q \neq 0$ oppure $B_q \neq 0$ il metodo è a $q+1$ passi.

L'errore di troncamento locale $\Sigma_i(h)$ si definisce come

$$\frac{1}{h} \left[y(t_{i+1}) - \sum_{k=0}^q a_k y(t_{i-k}) - h \sum_{k=-1}^q B_k \underbrace{f(t_{i-k}, y(t_{i-k}))}_{y'(t_{i-k})} \right]$$

\uparrow
 $y(t_i) + h y'(t_i) + \dots$

L'errore di troncamento globale $\Xi(h)$ si definisce come.

$$\Xi(h) = \max_{q \leq i \leq N} |\Sigma_i(h)|$$

Il metodo si dice consistente se $\lim_{h \rightarrow 0} \Xi(h) = 0$ cioè se $\Xi(h)$ è un infinitesimo in h . Si dice consistente con ordine r se $\Xi(h)$ è un infinitesimo di ordine r in h .

Si può dimostrare che un metodo a più passi è consistente

se e solo se

$$\sum_{k=0}^q a_k = 1 \quad \text{e} \quad - \sum_{k=0}^q k a_k + \sum_{k=-1}^q B_k = 1$$

Se in più

$$\sum_{k=0}^q (-k)^i a_k + i \sum_{k=-1}^q (-k)^{i-1} B_k = 1$$

per $i=2, \dots, r$ allora il metodo è di ordine r .

I metodi di Adams-Bashforth a p passi hanno ordine di consistenza p .

I metodi di Adams-Moulton a p passi hanno ordine di consistenza $p+1$.

Un metodo per l'approssimazione della soluzione di un problema di Cauchy è convergente se

$$e(h) = \max_{0 \leq i \leq N} |y(t_i) - u_i| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

cioè se l'errore (di approssimazione) è un infinitesimo in h . Si dice che converge con ordine r se l'errore è un infinitesimo di ordine r in h .

Zero-stabilità per i metodi a più passi

$$\begin{cases} u_{i+1} = \sum_{k=0}^q a_k u_{i-k} + h \sum_{k=1}^q \beta_k \underbrace{f(t_{i-k}, u_{i-k})}_{f_{i-k}} \\ u_0 = w_0, u_1 = w_1, \dots, u_q = w_q \end{cases}$$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{12} (5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1})$$

$$u_0 = y(t_0)$$

$$u_1 = u_0 + \frac{h}{2} (5f_1 + 8f_0 - !!!) \leftarrow$$

$$u_2 = u_1 + \frac{h}{2} (5f_2 + 8f_1 - f_0)$$

"

"

$$\left\{ \begin{aligned} z_{i+1} &= \sum_{k=0}^q a_k z_{i-k} + h \left(\sum_{k=1}^q b_k f(t_{i-k}, z_{i-k}) + \delta_{i+1} \right) \\ z_0 &= w_0 + \delta_0, z_1 = w_1 + \delta_1, \dots, z_q = w_q + \delta_q \end{aligned} \right.$$

Il metodo è zero-stabile se $\exists h_0 > 0 \exists c > 0 : \forall h \in (0, h_0]$

$$\max_{0 \leq i \leq N} |u_i - z_i| \leq c \varepsilon$$

$$\text{se } \max_{0 \leq i \leq N} |\delta_i| \leq \varepsilon$$

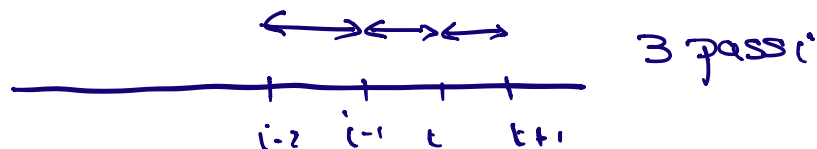
Un metodo a più passi è zero-stabile se e solo se verifica la "condizione delle radici".

$$\underbrace{u_{i+1} - \sum_{k=0}^q a_k u_{i-k}}_{\mathfrak{B}(\lambda)} = h \underbrace{\sum_{k=1}^q b_k f(t_{i-k}, u_{i-k})}_{\sigma(\lambda)}$$

Due polinomi di grado $q+1$ (di grado $\leq q+1$
ma almeno uno dei due di grado $q+1$)

$$\mathfrak{B}(\lambda) = \lambda^{q+1} - \sum_{k=0}^q a_k \lambda^{q-k} \quad \sigma(\lambda) = \sum_{k=1}^q b_k \lambda^{q-k}$$

Esempio $u_{i+1} = u_i + \frac{h}{24} (9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2})$



$$\mathfrak{B}(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 \quad \sigma(\lambda) = \frac{1}{24} (9\lambda^3 + 19\lambda^2 - 5\lambda + 1)$$

Un metodo a più passi verifica la condizione delle radici se tutte le radici di $S(\lambda)$ hanno modulo ≤ 1 e (se esistono) quelle di modulo 1 son radici semplici.

In un metodo di Adams a p passi

$$S(\lambda) = \lambda^p - \lambda^{p-1} = \lambda^{p-1} (\lambda - 1)$$

Le radici sono quindi $\lambda = 0$ con molteplicità $p-1$ e la radice semplice $\lambda = 1$. Quindi i metodi di Adams soddisfano la condizione delle radici.

Un metodo multistep consistente è convergente se e solo se è soddisfatta la condizione delle radici e l'errore sui dati iniziali è un infinitesimo in h . È convergente con ordine r se e solo se è consistente con ordine r , soddisfa la condizione delle radici e l'errore sui dati iniziali è un infinitesimo di ordine r in h .

$$\underbrace{u_{i+1} - \sum_{k=0}^q a_k u_{i-k}}_{=0 \text{ se } h=0} = h \underbrace{\sum_{k=-1}^q b_k f(t_{i-h}, u_{i-k})}_{=0 \text{ se } h=0}$$

$$(*) \quad u_{i+p} + \alpha_{p-1} u_{i+p-1} + \dots + \alpha_1 u_{i+1} + \alpha_0 u_i = 0$$

u_0, \dots, u_{p-1} assegnati

Posso cercare soluzioni di (*) della forma

$$u_i = \bar{\lambda}^i \quad (\bar{\lambda} \text{ è un numero noto})$$

$$(*) \quad \lambda^{i+p} + \alpha_{p-1} \lambda^{i+p-1} + \dots + \alpha_1 \lambda^{i+1} + \alpha_0 \lambda^i = 0$$

$$\lambda^i (\lambda^p + \alpha_{p-1} \lambda^{p-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0) = 0$$

Se $\bar{\lambda}$ è una radice del polinomio

$$\lambda^p + \alpha_{p-1} \lambda^{p-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0$$

allora $u_i = \bar{\lambda}^i$ è soluzione di (*)

Se $\bar{\lambda}$ è una radice multiple allora anche

$$u_i = \bar{\lambda}^i (i \bar{\lambda}^{i-1}) \text{ è soluzione di (*)}$$

Se tutte le radici sono semplici allora

tutte le soluzioni di (*) si possono scrivere

$$\text{come} \quad \sum_{j=1}^p c_j \bar{\lambda}_j^i = u_i$$

I metodi a più passi guadagnano accuratezza incrementando il numero di passi.

Quelli espliciti sono molto economici dal punto di vista computazionale per che richiedono solo una valutazione della funzione $f(t, z)$ ad ogni passo temporale. (Per quelli impliciti vedremo come si fa).

Un'altra buona proprietà dei metodi a più passi è che è molto facile valutare l'errore di troncamento locale.

È necessario avere metodi ad un passo di ordine r per "inizializzare" i metodi a più passi. Il vantaggio dei metodi ad un passo è che si possono implementare facilmente strategie di adattività del passo