Il problema di Cauchy

Sia $I = [t_0, t_0 + T]$ con $0 < T < +\infty$.

Sia $f(t, y)$ una funzione assegnata definita in $I \times \mathbb{R}$ continua rispetto ad entrambe le variabili.

Si trata di determinare una funzione $y \in C^1(I)$ soluzione di

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

Esistenza e unicità di soluzione

- Una funzione $f(t, y)$ si dice che è lipschitziana nella variabile y in un insieme $D \subset \mathbb{R}^2$ se esiste una costante $L > 0$ tale che

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

per ogni (t, y_1), $(t, y_2) \in D$.
- Sia $D = \{(t, y) \,|\, t_0 \leq t \leq t_0 + T,\ y \in \mathbb{R}\}$ con $0 < T < +\infty$. Se $f(t, y)$ è continua e lipschitziana nella variabile y in D allora il problema di Cauchy (1) ha una soluzione unica per $t_0 \leq t \leq t_0 + T$.

Funzioni lipschitziane

- Sia $g : \Sigma \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana, cioè, esiste una costante $L > 0$ tale che
$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad \forall\, x_1,\, x_2 \in \Sigma\,,$$
allora g è continua in Σ.
- Non tutte le funzioni continue sono lipschitziane. Per esempio $g(x) = x^{1/3}$ è continua ma non è lipschitziana in $[-1, 1]$.
- Se $g \in C^1(\Sigma)$ e esiste una costante $K > 0$ tale che $|g'(x)| \leq K$ per ogni $x \in \Sigma$ allora g è lipschitziana in Σ perche
$$|g(x_1) - g(x_2)| = |g'(\widehat{x})\,(x_1 - x_2)| \leq K|x_1 - x_2|\,.$$
- La funzione $g(x) = |x| \notin C^1([-1, 1])$ ma è lipschitziana in $[-1, 1]$ perche
$$||x_1| - |x_2|| \leq |x_1 - x_2|\,.$$

.

Buona posizione

Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in I := [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

si dice che è ben posto se

- esiste una unica soluzione del problema;
- chiamando $z(t)$ alla soluzione del problema

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) + \delta(t) & t \in I \\ z(t_0) = y_0 + \delta_0 \end{cases}$$

  dove
  - δ è una funzione continua in I
  - la perturbazione $(\delta_0, \delta(t))$ verifica $|\delta_0| < \epsilon$ e $|\delta(t)| < \epsilon$ per ogni $t \in I$ con ϵ sufficientemente piccolo,

  allora esiste una costante K indipendente da ϵ tale che

$$|y(t) - z(t)| < K\epsilon \quad \forall\, t \in I\,.$$

Buona posizione

Sia $D = \{(t, y) \mid t_0 \leq t \leq t_0 + T,\, y \in \mathbb{R}\}$ con $0 < T < +\infty$. Se $f(t, y)$ è continua e lipschitziana nella varibile y in D allora il problema di Cauchy (1) è ben posto.

Esempi

- $$\begin{cases} y'(t) = 1 + t\sin(ty) & t \in [0,2] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

  $f(t,y) = 1 + t\sin(ty)$ è lipschitziana nella variabile y:

  $$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |t\sin(ty_1) - t\sin(ty_2)|$$

  $$= |t^2\cos(t\widehat{y})||y_1 - y_2| \le 4|y_1 - y_2|\,.$$

- $$\begin{cases} y' = -y + t + 1 & t \in [0,10] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

  $f(t,y) = -y + t + 1$ è lipschitziana nella variabile y:

  $$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |-y_1 + y_2| = |y_1 - y_2|\,.$$

Esempi

In questo secondo esempio possiamo verificare la buona posizione.

- $$\begin{cases} y' = -y + t + 1 & t \in [0, 10] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
  $y(t) = e^{-t} + t$
- Siano δ e δ_0 due costanti.
  $$\begin{cases} z' = -z + t + 1 + \delta & t \in [0, 10] \\ z(0) = 1 + \delta_0 \end{cases}$$
  $$z(t) = (1 + \delta_0 - \delta)e^{-t} + t + \delta$$

Se $|\delta| < \epsilon$ e $|\delta_0| < \epsilon$ allora

$$|z(t) - y(t)| = |(\delta_0 - \delta)e^{-t} + \delta| \leq |\delta| \left(1 - e^{-t}\right) + |\delta_0|e^{-t} \leq 2\epsilon$$

per ogni $t \in [0, 10]$.

Risoluzione numerica del problema di Cauchy

Fissato $0 < T < +\infty$, sia $I = (t_0, t_0 + T)$.

L'intervallo I si divide in N sottointervalli di ampieza $h = T/N$.

Sia $t_n = t_0 + nh$, con $n = 0, 1, \ldots, N$, la successione dei nodi di discretizzazione di I in sottointervalli $I_n = [t_{n-1}, t_n]$, $n = 1, \ldots, N$.

Nella risoluzione numerica del problema di Cauchy calcolaremo una successione di valori u_n, con $n = 0, 1, \ldots, N$ tali che u_n approssimi $y(t_n)$.

Eulero esplicito

Dallo sviluppo di Taylor

$$y(t+h) = y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{2} y''(\xi)$$

usando l'equazione differenziale segue che

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h\, f(t_n, y(t_n)) + O(h^2)$$

Metodo di Eulero esplicito

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h\, f(t_n, u_n) & n = 0, \ldots, N-1 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

Eulero implicito

Usando adesso lo sviluppo di Taylor

$$y(t-h) = y(t) - hy'(t) + \frac{h^2}{2}y''(\xi)$$

segue

$$y'(t) = \frac{y(t) - y(t-h)}{h} + O(h)$$

$$y'(t_{n+1}) = f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} + O(h)$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h\,f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) + O(h^2)$$

Metodo di Eulero implicito

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1}) & n = 0, \ldots, N-1 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

Punto medio

Consideriamo adesso i due sviluppi di Taylor

$$y(t+h) = y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{2}y''(t) + \frac{h^3}{6}y'''(\xi)\,,$$

$$y(t-h) = y(t) - hy'(t) + \frac{h^2}{2}y''(t) - \frac{h^3}{6}y'''(\zeta)\,.$$

Prendendo la differenza

$$y(t+h) - y(t-h) = 2hy'(t) + \frac{h^3}{6}(y'''(\xi) + y'''(\zeta))$$

$$y'(t) = \frac{y(t+h) - y(t-h)}{2h} + O(h^2)$$

Punto medio

$$y'(t) = \frac{y(t+h) - y(t-h)}{2h} + O(h^2)$$

$$y'(t_n) = f(t_n, y(t_n)) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_{n-1})}{2h} + O(h^2)$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_{n-1}) + 2h\, f(t_n, y(t_n)) + O(h^3)$$

Metodo del punto medio

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_{n-1} + 2h\, f(t_n, u_n) \quad n = 1, \dots, N-1 \\ u_0 = y_0 \\ u_1 = y_1 \end{cases}$$

Crank-Nicolson

Dall'equazione differenziale

$$y'(t) = f(t, y(t))\,,$$

integrando fra t_n e t_{n+1}

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)\,dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\,dt\,.$$

Usando il metodo del trapezio per approssimare l'integrale

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \frac{h}{2}\left[f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\right] + O(h^3)$$

Metodo di Crank-Nicolson

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})\right] & n = 0, \dots, N-1 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

Metodi di Taylor

Consideriamo lo sviluppo di Taylor della funzione soluzione (ad esempio fino al termine di secondo ordine)

$$y(t+h) = y(t) + h\,y'(t) + \frac{h^2}{2} y''(t) + O(h^3)$$

Usando l'equazione differenziale

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad y''(t) = f_t(t, y(t)) + y'(t)\, f_y(t, y(t))\,.$$

Quindi

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) = {} & y(t_n) + h\,f(t_n, y(t_n)) \\ & + \frac{h^2}{2} \left[f_t(t_n, y(t_n)) + f(t_n, y(t_n))\, f_y(t_n, y(t_n)) \right] + O(h^3) \end{aligned}$$

Metodi di Taylor

Metodo di Taylor di ordine 2

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h\, f(t_n, u_n) + \frac{h^2}{2} \left[f_t(t_n, u_n) + f(t_n, u_n) f_y(t_n, u_n) \right] \\ \hfill n = 0, \ldots, N-1 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

- Il metodo di Eulero esplicito è il metodo di Taylor di ordine 1.
- Usando lo sviluppo fino al termine di ordine 3, 4, ..., si ottengono i metodi di Taylor di ordine 3, 4, ...

Risoluzione numerica del problema di Cauchy

Metodi ad un passo

- Eulero esplicito
- Eulero implicito
- Crank-Nicolson
- Taylor

Metodi a più passi

- Punto medio

Metodi espliciti

- Eulero esplicito
- Punto medio
- Taylor

Metodi impliciti

- Eulero implicito
- Crank-Nicolson