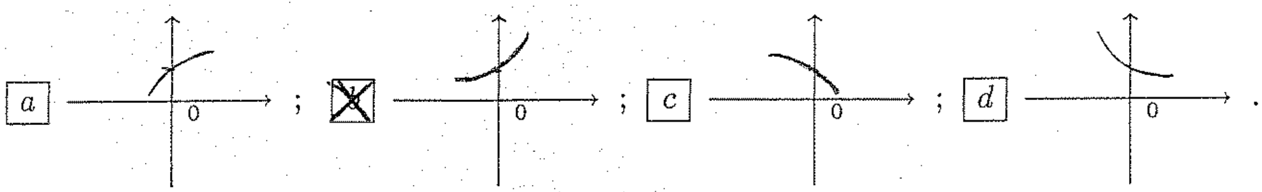
CALCOLO 1		23 febbraio 2007
Cognome:	Nome:	Matricola:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta: +1.5. Risposta errata: −0.25.*

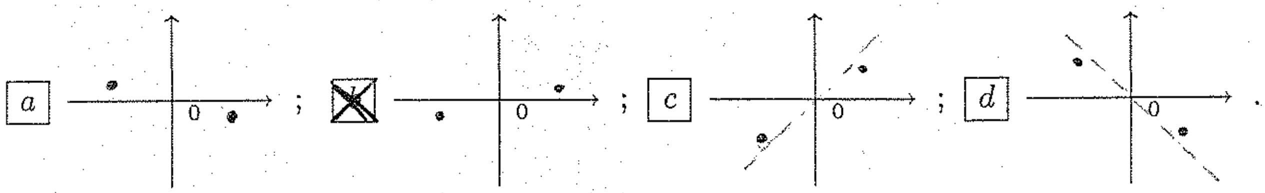
1. L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale $\int_0^1 \frac{x^\alpha \sin\sqrt{x}}{2x^2+x^3}\,dx$ è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente è dato da: $\boxed{a}$ $1 < \alpha < 2$; $\boxed{b}$ $0 < \alpha < 1$; $\boxed{c}$ $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}$; $\boxed{d}$ $\frac{3}{2} < \alpha < \frac{5}{2}$.

2. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = y^2 + xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$. Il grafico di $y(x)$ vicino a $x = 0$ è:



3. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$ se e solo se: $\boxed{a}$ $\forall\epsilon > 0\ \exists M > 0$ tale che $|x| < M$ allora $|f(x) - a| < \epsilon$; $\boxed{b}$ $\forall M > 0\ \exists\delta > 0$ tale che se $0 < |x - a| < \delta$ allora $f(x) < -M$; $\boxed{c}$ $\forall M > 0\ \exists\delta > 0$ tale che se $0 < |x - a| < \delta$ allora $|f(x)| < M$; $\boxed{d}$ $\forall\epsilon > 0\ \exists M > 0$ tale che $x < -M$ allora $|f(x) - a| < \epsilon$.

4. I numeri complessi $z = \sqrt{8 + i}$ sono:



5. L'insieme dei numeri reali $\alpha > 0$ per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(n + 2n^3)(e^{1/n} - 1)^\alpha$ è convergente è dato da: $\boxed{a}$ $\alpha > 3$; $\boxed{b}$ $\alpha < 1/2$; $\boxed{c}$ $\alpha < 1$; $\boxed{d}$ $\alpha > 4$.

6. Quale delle seguenti affermazioni è vera? $\boxed{a}$ Se $a_n > 0$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ per ogni n allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente; $\boxed{b}$ Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente e $a_n > 0$ allora $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} < 1$; $\boxed{c}$ Se $a_n > 0$ per ogni n e $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} < 1$ allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente ; $\boxed{d}$ Se $a_n > 0$ per ogni n e $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} \le 1$ allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente.

7. $\lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x - \log(1 + x)} =$ $\boxed{a}$ -1; $\boxed{b}$ 1; $\boxed{c}$ $+\infty$; $\boxed{d}$ 0.

8. Il polinomio di Taylor di secondo grado (e di centro $x_0 = 0$) della funzione $f(x) = \log(\cos x)$ è: $\boxed{a}$ $-\frac{x^2}{2}$; $\boxed{b}$ $-x - \frac{x^2}{2}$; $\boxed{c}$ $x + \frac{x^2}{2}$; $\boxed{d}$ $x - \frac{x^2}{2}$.

1. (6 punti)
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} x\log(3x^2) & \text{per } x > 0 \\ x^2 e^{2x} & \text{per } x \leq 0 \end{cases}.$$

Se ne determinino, se ci sono, il massimo assoluto, il minimo assoluto, i massimi relativi e i minimi relativi.

Si ha $f(0) = 0$, e $\lim_{x\to 0^+} x\log(3x^2) = \lim_{x\to 0^+}(x\log 3 + 2x\log x) = 0$

(con l'Hopital, $\lim_{x\to 0^+} x\log x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$).

Quindi f è continua in 0.

Poi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\log(3x^2) = +\infty$, e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2e^{2x} = 0$

(scrivendo $t = -x \to +\infty$, si ha $\lim_{t\to+\infty} \frac{t^2}{e^{2t}} = 0$, poiché l'esponenziale va all'infinito più velocemente dei polinomi).

Facendo le derivate, si ha: per $x > 0$, $f'(x) = \log(3x^2) + x\cdot\frac{1}{3x^2}\cdot 6x =$
$= \log(3x^2) + 2$; che è positiva per

$$\log(3x^2) > -2 \iff 3x^2 > e^{-2} \overset{\text{per } x>0}{\iff} x > \frac{1}{e\sqrt{3}}.$$

Dunque $f(x)$ cresce per $x > \frac{1}{e\sqrt3}$, decresce per $0 < x < \frac{1}{e\sqrt3}$, e $x = \frac{1}{e\sqrt3}$ è un punto di <u>minimo</u> relativo, dove si ha $f(1/e\sqrt3) = \frac{1}{e\sqrt3}\log\left(\frac{1}{e^2}\right) =$
$= -\frac{2}{e\sqrt3}$. [Si ha anche $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$, per cui f non è derivabile in 0.]

Per $x \leq 0$, $f'(x) = 2xe^{2x} + 2x^2e^{2x} = 2x(1+x)e^{2x}$, ed è > 0 per $x < -1$ (e $x > 0$, che è fuori intervallo), e < 0 per $-1 < x < 0$.

Dunque $x = -1$ è un punto di <u>massimo</u> relativo, ove si ha

$f(-1) = 1/e^2$.

Siccome f decresce per $-1 < x < 0$ e decresce per $0 < x < \frac{1}{e\sqrt3}$, il punto $x = 0$ non è né di massimo né di minimo.

Siccome $f(x) \geq 0$ per $x \leq 0$, e $f(1/e\sqrt3) = -\frac{2}{e\sqrt3} < 0$, $x = \frac{1}{e\sqrt3}$ è punto di <u>minimo assoluto</u>, non solo relativo.

Poiché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, <u>non c'è massimo assoluto</u>.

CALCOLO I	23 febbraio 2007

2. (6 punti)
Si determini il volume del solido di rotazione ottenuto facendo ruotare l'insieme

$$R := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 1\,,\; 0 \le y \le \sqrt{\log(2+3x)}\}$$

attorno all'asse x.

Il volume di un tale solido di rivoluzione è

$$V = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{\log(2+3x)}\right)^2 dx = \pi \int_0^1 \log(2+3x)\, dx.$$

Integrando per parti

$$V = \pi \left[x \log(2+3x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{3x}{2+3x}\, dx \right]$$

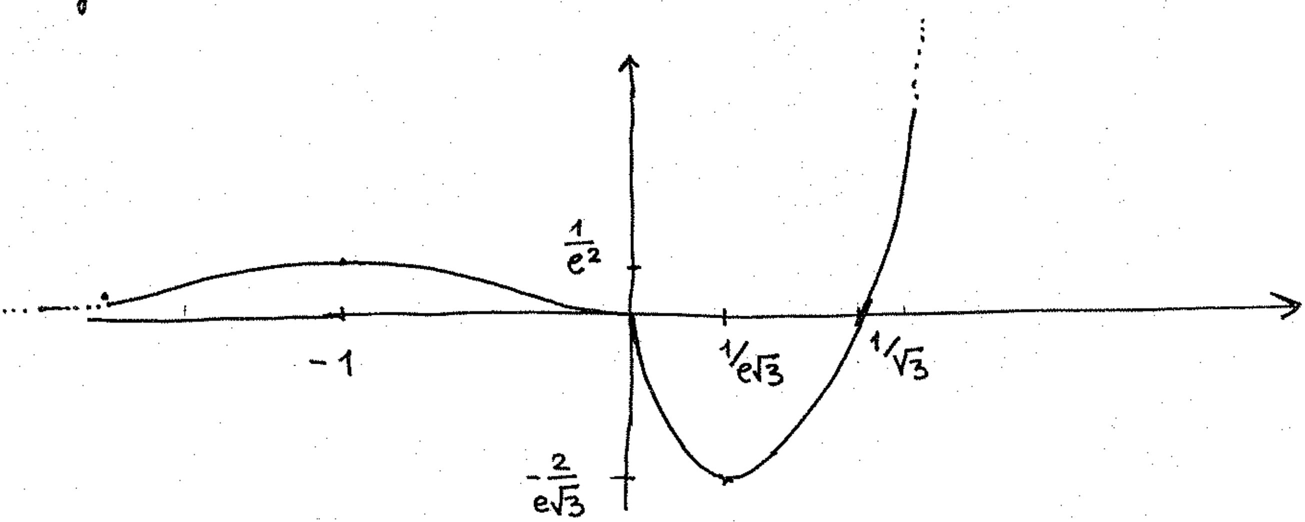
$$= \pi \left[x \log(2+3x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{2+3x}\right) dx \right]$$

$$= \pi \left[x \log(2+3x) - x + \frac{2}{3} \log|2+3x| \right]_0^1$$

$$= \pi \left[1 \log 5 - 1 + \frac{2}{3} \log 5 - \frac{2}{3} \log 2 \right]$$

$$= \pi \left[\frac{5}{3} \log 5 - 1 - \frac{2}{3} \log 2 \right]$$

Grafico della funzione dell'esercizio 1 (non richiesto...)



CALCOLO I	23 febbraio 2007

3. **(6 punti)**
Si determini la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{e^{-x}\sqrt{y+1}}{e^{-x}+1} \\ y(0) = 1 \,. \end{cases}$$

Si tratta di un'equazione a variabili separabili

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\sqrt{y+1}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y+1}} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx \implies \int (y+1)^{-1/2}\,dy = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx$$

$$2\sqrt{y+1} = -\log(e^{-x}+1) + C\,.$$

Poiché $y(0)=1$ $\quad 2\sqrt{1+1} = -\log(e^{-0}+1) + C'$

$$C' = 2\sqrt{2} + \log 2$$

$$2\sqrt{y+1} = -\log(e^{-x}+1) + 2\sqrt{2} + \log 2$$

$$\sqrt{y+1} = \frac{-1}{2}\log(e^{-x}+1) + \sqrt{2} + \frac{1}{2}\log 2$$

$$y = \left[\frac{-1}{2}\log(e^{-x}+1) + \sqrt{2} + \frac{1}{2}\log 2\right]^2 - 1\,.$$