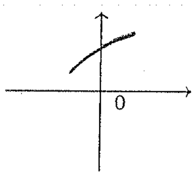
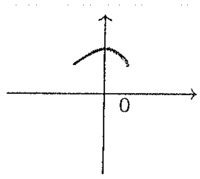
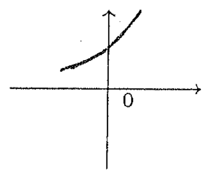
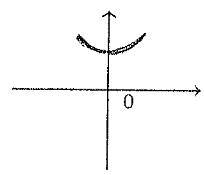
CALCOLO 1		31 agosto 2007
Cognome:	Nome:	Matricola:

- ~~*Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta.*~~ *Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

1. Sia $x > 0$. La somma della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{1+x}\right)^n$ è: $\boxed{a}$ $\frac{1}{x^2+3x+2}$; $\boxed{b}$ $\frac{1}{x^2+5x+6}$; $\boxed{\times}$ $\frac{1}{x^2+x}$; $\boxed{d}$ $\frac{1}{4x^2+2x}$.

2. Sia $f(x)$ una funzione derivabile due volte. Se $f(0) = f(2) = f(4) = 0$ (e non ci sono altri punti di azzeramento), quante volte si annulla $f''(x)$? $\boxed{a}$ almeno due volte; $\boxed{b}$ esattamente due volte; $\boxed{\times}$ almeno una volta; $\boxed{d}$ esattamente una volta.

3. Sia $f(x)$ una funzione derivabile due volte con $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$. Il grafico del polinomio di Taylor di secondo grado e di centro $x_0 = 0$ della funzione f è

$\boxed{a}$  ; $\boxed{\times}$  ; $\boxed{c}$  ; $\boxed{d}$  .

4. Sia $f(t) = -2t^3 + 3$. Allora l'equazione della retta tangente al grafico della funzione inversa $f^{-1}(x)$ nel punto $(1, f^{-1}(1))$ è: $\boxed{a}$ $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$; $\boxed{\times}$ $y = -\frac{1}{6}x + \frac{7}{6}$; $\boxed{c}$ $y = \frac{1}{6}x + \frac{1}{2}$; $\boxed{d}$ $y = \frac{1}{12}x + \frac{17}{12}$.

5. Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile. Se l'estremo a è un punto di massimo relativo, allora è sempre vero che: $\boxed{\times}$ $f'(a) \le 0$; $\boxed{b}$ $f'(a) < 0$; $\boxed{c}$ $f'(a) \ge 0$; $\boxed{d}$ $f'(a) > 0$.

6. Per quali valori dei parametri a e b si ha che

$$\lim_{x\to 0}\left(a\frac{1-\cos x}{2x^2} + 3bx\sin\frac{1}{x}\right) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(a\frac{1-\cos x}{2x^2} + 3bx\sin\frac{1}{x}\right) = 1?$$

$\boxed{a}$ $a = 4$, $b = -1/3$; $\boxed{b}$ $a = 6$, $b = 1/2$; $\boxed{\times}$ $a = 4$, $b = 1/3$; $\boxed{d}$ $a = 6$, $b = -1/2$.

7. Siano $f(x) = \alpha x^2 + 2x$ e $g(x) = \frac{\beta}{(x+3)^2}$. Per quali valori dei parametri α e β si ha $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx$ e $f(0) = g(0)$? $\boxed{\times}$ $\alpha = -3$, $\beta = 0$; $\boxed{b}$ $\alpha = 0$, $\beta = 3$; $\boxed{c}$ $\alpha = 2/3$, $\beta = 0$; $\boxed{d}$ $\alpha = 0$, $\beta = 2/3$.

8. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(1-x)^{1/x^2} =$ $\boxed{a}$ e; $\boxed{b}$ $+\infty$; $\boxed{\times}$ 0; $\boxed{d}$ 1.

1. (6 punti)
Si determinino il massimo assoluto e il minimo assoluto della funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2-2x} & \text{per } x < 0 \\ \log(\frac{x+1}{x+2}) & \text{per } x \geq 0 \end{cases},$$

e se ne disegni il grafico (in modo qualitativo: segno, crescenza/decrescenza; non è richiesto lo studio della convessità/concavità).

Si ha $e^{-x^2-2x} > 0$ per ogni $x<0$, e $\lim_{x\to 0^-} e^{-x^2-2x} = 1$;
$\log(\frac{x+1}{x+2}) > 0$ per $\frac{x+1}{x+2} > 1$, cioè per nessun valore di $x \geq 0$.

Dunque $f(x) > 0$ per $x<0$, e $f(x)<0$ per $x \geq 0$.

Ancora: $f(0) = \log 1/2 = -\log 2$, $\lim_{x\to -\infty} e^{-x^2-2x} = 0$ (poiché $-x^2-2x = -x(x+2) \to -\infty$ per $x \to -\infty$), $\lim_{x\to+\infty} \log(\frac{x+1}{x+2}) = 0$ (poiché $\frac{x+1}{x+2} \to 1$ per $x \to +\infty$).

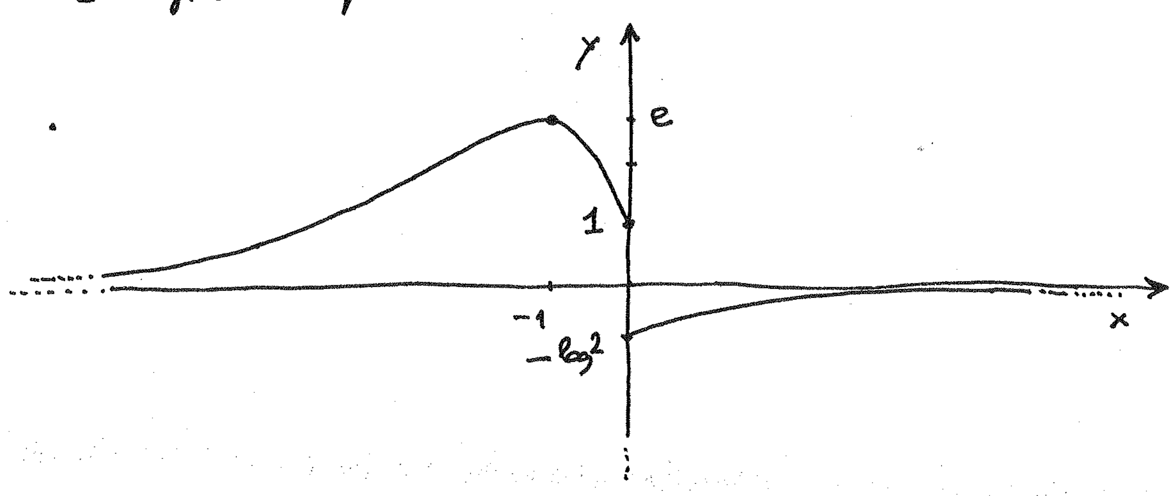
La derivata di $f(x)$ per $x>0$ è $f'(x) = (\log(x+1) - \log(x+2))' =$
$= 1/_{x+1} - 1/_{x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$; che è sempre >0 per $x>0$.

Dunque $f(x)$ cresce per $x>0$.

La derivata di $f(x)$ per $x<0$ è $f'(x) = e^{-x^2-2x}(-2x-2) =$
$= -2e^{-x^2-2x}(x+1)$, che è >0 per $x<-1$, $=0$ per $x=-1$ e <0 per $x>-1$. Dunque $f(x)$ cresce per $-\infty<x<-1$ e decresce per $x>-1$, e quindi $x_0=-1$ è un punto di massimo assoluto, con valore $f(-1) = e^{-1+2} = \underline{e}$.

Il minimo assoluto è invece nel punto $x_0=0$, con valore $f(0) = \underline{-\log 2}$.

Il grafico qualitativo è:



CALCOLO I	31 agosto 2007

2. (6 punti)
Considerare l'integrale

$$\int_4^{+\infty} \frac{(x+1)^{3/2}}{(x^\alpha+1)^{5/2}(x-3)}\,dx\,.$$

Per quali valori del parametro reale α l'integrale è convergente?
Calcolare il valore dell'integrale quando $\alpha = 1$.

Per x grande abbiamo $(x+1)^{3/2} \sim x^{3/2}$, $(x^\alpha+1)^{5/2} \sim x^{5/2\alpha}$, $x-3 \sim x$.
Dunque

$$\frac{(x+1)^{3/2}}{(x^\alpha+1)^{5/2}(x-3)} \sim \frac{x^{3/2}}{x^{5/2\alpha}\,x} = \frac{1}{x^{5/2\alpha - 1/2}}\,.$$

Siccome $\int_4^{+\infty} \frac{1}{x^\beta}dx$ è convergente per $\beta > 1$, si deve avere

$$5/2\,\alpha - 1/2 > 1\,, \quad \text{cioè} \quad \alpha > 3/5\,.$$

Per $\alpha = 1$, l'integrale diventa $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{(x+1)^{3/2}}{(x+1)^{5/2}(x-3)}dx = \int_4^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x-3)}dx$.

Si ha

$$\frac{1}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} = \frac{Ax - 3A + Bx + B}{(x+1)(x-3)}$$

se

$$\begin{cases} A+B = 0 \\ -3A+B = 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} A = -B \\ 3B+B = 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} A = -1/4 \\ B = 1/4 \end{matrix}\,.$$

Dunque

$$\int_4^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x-3)}dx = \int_4^{+\infty} \frac{1}{4}\frac{1}{x-3}dx + \int_4^{+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{x+1}dx = \frac{1}{4}\log(x-3) - \frac{1}{4}\log(x+1)\Big|_4^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{4}\log\frac{x-3}{x+1}\Big|_4^{+\infty} = \frac{1}{4}\log 1 - \frac{1}{4}\log\frac{1}{5} = \frac{1}{4}\log 5\,.$$

$\downarrow$

[più correttamente è $\displaystyle\frac{1}{4}\lim_{b\to+\infty}\left(\log\frac{x-3}{x+1}\Big|_4^b\right) = \frac{1}{4}\lim_{b\to+\infty}\left(\log\frac{b-3}{b+1}\right) +$

$\displaystyle+\frac{1}{4}\log 5 = \frac{1}{4}\log 1 + \frac{1}{4}\log 5 = \frac{1}{4}\log 5$

poiché $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\frac{b-3}{b+1} = 1$ e $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\log\left(\frac{b-3}{b+1}\right) = \log 1$, dalla continuità del logaritmo...]

CALCOLO I	31 agosto 2007

3. (6 punti)
Si determini la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = 3x + 2 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 2 \, . \end{cases}$$

È un'equazione lineare, a coefficienti costanti, non-omogenea, del II° ordine.

Il polinomio associato è $r^2 - 6r + 9$. Cerco le radici:

$$r^2 - 6r + 9 = 0 \quad \text{per} \quad r = 3 \mp \sqrt{9-9} = 3 \, , \text{ doppia.}$$

La soluzione generale dell'omogenea dunque è:

$$y_0 = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} .$$

Cerco una soluzione della non-omogenea del tipo $y_* = Ax + B$.
Dunque $y_*' = A$, $y_*'' = 0$ e impongo l'equazione:

$$0 - 6A + 9(Ax + B) = 3x + 2$$

$$9A = 3 \qquad A = 1/3$$

$$-6A + 9B = 2 \qquad -2 + 9B = 2 \qquad B = 4/9 .$$

Così la soluzione generale dell'equazione è:

$$y = y_0 + y_* = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + 1/3\, x + 4/9 .$$

Impongo i dati di Cauchy: essendo $y' = 3c_1 e^{3x} + 3c_2 x e^{3x} + c_2 e^{3x} + 1/3$, ho:

$$-1 = y(0) = c_1 + 4/9 \qquad c_1 = -13/9$$

$$2 = y'(0) = 3c_1 + c_2 + 1/3 \qquad c_2 = 2 - 1/3 - 3c_1 = 5/3 + \frac{13}{3} = \frac{18}{3} = 6.$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi:

$$y(x) = -\frac{13}{9} e^{3x} + 6x e^{3x} + \frac{1}{3} x + \frac{4}{9} .$$