GIORNALE
DI MATEMATICHE
DI BATTAGLINI

PER IL PROGRESSO DEGLI STUDI

NELLE UNIVERSITÀ ITALIANE

FONDATO NEL 1863

PROSEGUITO DAL PROFESSORE

ALFREDO CAPELLI

Volume XLI — (10° della 2ª Serie)
1903.

NAPOLI
LIBRERIA SCIENTIFICA ED INDUSTRIALE
di BENEDETTO PELLERANO
Via Gennaro Serra, 20
1903.

NOTE ON ABELIAN GROUPE

BY

G. A. MILLER

(*Stanford University Californ*)

The theorem published by Vincenzo D' Escamard, « Giornale di Matematiche di Battaglini», vol. 41, (1903) p. 203 is found in the Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 9, (1903) p. 295. It is also found in the « Annals of Mathematics », vol. 4, (1903) p. 189. In the latter place a complete and very simple proof is given.

Both of these publications, especially the former, are somewhat earlier than that of D' Escamard. It is very singular that such an elementary theorem shoud not have been given in a clear and explicit form before. What seems still more remarkable is the fact that a number of different men shoud have discovered it independently at almost the same time, for H. L. Riety communicated the same theorem to me before he had seen it in a journal.

Con piacere diamo pubblicità alla comunicazione, qui sopra riportata, del signor Miller. Al tempo stesso siamo lieti di poter dichiarare che il teorema del Dott. d' Escamard è stato estratto dalla tesi di laurea che il medesimo ha presentato alla facoltà di Matematiche della Università di Napoli nel mese di Giugno 1902, cioè allo incirca un anno prima della sua pubblicazione in questo giornale.

Nota della Direzione

SULLE SUPERFICIE DI RIEMANN

CON DATI PUNTI DI DIRAMAZIONE

MEMORIA

DI

A. HURWITZ

(*in Zurigo*)

VERSIONE ITALIANA DI ALBERTO BRAMBILLA

con note dell' Autore.

Dai Math. Annalen, vol. 39.

(*Contin. e fine, v. vol.* XXXI, *pag.* 229-270)

PARTE TERZA

QUESTIONI DI REALITÀ.

§ 1.

Superficie Riemanniane coniugate.

Imaginiamo nel piano E dei numeri complessi w punti qualunque $a_1, a_2, \ldots, a_w$, da un punto qualunque O tiriamo a questi (come nel § 1, parte I) le linee $l_1, l_2, \ldots, l_w$ e consideriamo una qualunque delle superficie Riemanniane

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} l_1, & l_2, & \ldots, & l_w \\ S_1, & S_2, & \ldots, & S_w \end{pmatrix}$$

che sono diramate in $a_1, a_2, \ldots, a_w$. Costruendo la figura simmetrica di questa superficie rispetto all' asse reale del piano E, ne nasce una nuova superficie $\overline{F}$, che diremo superficie *coniugata* di F.

Se per questa simmetria i punti $a_1, a_2, \ldots, a_w$ e le linee $l_1, l_2, \ldots, l_w$ si trasformano rispettivamente in $\bar a_1, \bar a_2, \dots, \bar a_w$ ed $\bar l_1, \bar l_2, \dots, \bar l_w$, sarà, come ci

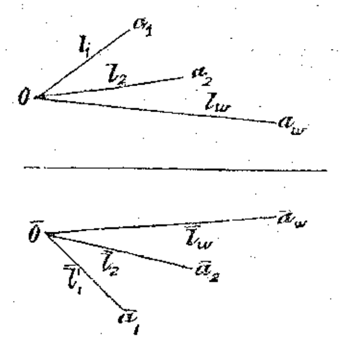


fig. 7.

si convince senza difficoltà (cfr. fig. 7),

$$(2) \qquad \bar F = \begin{pmatrix} \bar l_w, & \bar l_{w-1}, & \dots, & \bar l_2 & \bar l_1 \\ S_w^{-1}, & S_{w-1}^{-1}, & \dots, & S_2^{-1} & S_1^{-1} \end{pmatrix}.$$

Le superficie $\bar F$ ed F sono riferite una all' altra in modo univoco e *conforme*; però la *conformità* è tale, per cui ha luogo un rovesciamento dell' angolo. A schiarimento si osservi quanto segue. Se i punti del piano E rappresentano i valori della variabile complessa x, e la superficie F è definita dall'equazione algebrica $f(y, x) = 0$, la equazione $\bar f(y, x) = 0$ definirà la superficie $\bar F$, quando $\bar f(y, x)$ sia dedotta da $f(y, x)$ sostituendo ciascun coefficiente della ultima funzione col proprio valore imaginario coniugato.

Se la superficie F coincide colla propria coniugata $\bar F$, essa è «simmetrica» nel senso del signor Klein (1). (L' equazione $f(y, x) = 0$ può allora esser scelta in modo che essa possieda coefficienti reali).

Questo caso può avvenire soltanto, se i valori $a_1, a_2, \dots, a_w$ sono in parte reali, in parte imaginari a coppie coniugati.

Noi supporremo che i valori $a_1, a_2, \dots, a_w$ soddisfacciano a questa condizione, e, precisamente, che la successione di questi valori sia scelta in guisa che riescano coniugati

$$a_1 \text{ ed } a_w = \bar a_1,$$
$$\bar a_2 \text{ ed } a_{w-1} = \bar a_2,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$a_\mu \text{ ed } a_{w-\mu-1} = \bar a_\mu,$$

(1) "Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale", pag. 72.

mentre

$$a_{\mu+1} = b_1, \quad a_{\mu+2} = b_2, \dots, a_{\mu+\rho} = b_\rho$$

sono reali. I punti di diramazione sono quindi

$$(3) \qquad a_1, \dots, a_\mu, \quad b_1, \dots, b_\rho, \quad \bar a_\mu, \dots, \bar a_1.$$

Supponiamo inoltre

$$b_1 > b_2 > \dots > b_\rho,$$

scegliamo il punto O sull' asse reale, e propriamente in guisa che sia $0 > b_1$, e tiriamo finalmente le linee $l_1, l_2, \dots, l_w$ per modo che $l_1, l_2, \dots, l_\mu$, per simmetria rispetto all' asse reale si trasformino in (cfr. fig. 8)

$$l_w = \bar l_1, \quad l_{w-1} = \bar l_2, \dots, l_{w-\mu+1} = \bar l_\mu.$$

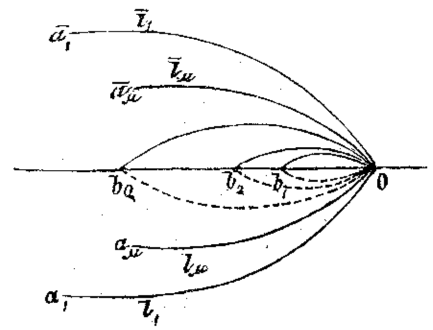


fig. 8.

Fissando una volta per sempre questo sistema di linee, noi possiamo indicare la superficie (1) brevemente con

$$F = (S_1, S_2, \dots, S_w),$$

oppure, alterando un poco la notazione delle sostituzioni, con

$$(4) \qquad F = (S_1, \dots, S_\mu, T_1, \dots, T_\rho, \Sigma_\mu, \dots, \Sigma_1).$$

Se ora riferiamo al medesimo sistema di linee la superficie coniugata $\bar F$, troviamo

$$(5) \qquad \bar F = (\bar S_1, \dots, \bar S_\mu, \bar T_1, \dots, \bar T_\rho, \bar\Sigma_\mu, \dots, \bar\Sigma_1)$$

dove, per brevità, si sono posti

$$
(6) \quad \begin{cases} \bar{S}_1 = \Sigma_1^{-1}, \ldots, \bar{S}_\mu = \Sigma_\mu^{-1} \; ; \; \bar{T}_k = U_k^{-1} T_k^{-1} U_k \,, \; (k = 1,2, \ldots, \rho), \\ \bar{\Sigma}_1 = S_1^{-1}, \ldots, \bar{\Sigma}_\mu = S_\mu^{-1} \; ; \; U_k = T_k . T_{k+1} \ldots T_\rho, \; (k = 1,2, \ldots, \rho). \end{cases}
$$

Ciò si conferma sulla scorta della fig. 8. La condizione perchè le superficie (4) e (5) siano una sola, consiste ora nella trasformabilità di uno nell' altro dei due corrispondenti sistemi di sostituzioni. In riguardo alle (6) si ha quindi, dietro facile calcolo, il teorema:

La superficie Riemanniana è coniugata a sè medesima quando, e soltanto allora che, esista una sostituzione U *soddisfacente alle equazioni*

$$
(7) \quad \begin{cases} S_i U \Sigma_i = \Sigma_i U S_i = U \,, \; (i = 1,2, \ldots, \mu), \\ U_k U U_k = U \,, \; (k = 1,2, \ldots, \rho), \end{cases}
$$

dove, per brevità, si è posto

$$
(8) \quad T_\rho = U_\rho \,, \; T_{\rho-1} T_\rho = U_{\rho-1} T_{\rho-2} T_{\rho-1} T_\rho = U_{\rho-2} \,, \ldots, T_1 T_2 \ldots T_\rho = U_1 .
$$

Consideriamo un qualunque punto P sull'asse reale e diciamo $P_1, P_2, \ldots, P_n$ gli n punti della superficie Riemanniana (h) situati su P, cosicchè per la trasformazione simmetrica della superficie questi punti subiscono una permutazione, corrispondendo ai punti

$$
P_1 \,, P_2 \,, \ldots, P_n
$$

i medesimi punti, ma eventualmente in ordine diverso:

$$
P_{\alpha_1} \,, P_{\alpha_2} \,, \ldots, P_{\alpha_n} .
$$

La sostituzione

$$
(9) \quad V = \begin{pmatrix} 1 \,, & 2 \,, & \ldots \,, & n \\ \alpha_1 \,, & \alpha_2 \,, & \ldots \,, & \alpha_n \end{pmatrix}
$$

possederà il periodo *due*, perchè una ripetizione della trasformazione simmetrica conduce alla identità.

Se designiamo con

$$
(10) \quad (0) \,, (1) \,, (2) \,, \ldots, (\rho)
$$

i segmenti

$$
b_\rho 0 \,, 0 b_1 \,, b_1 b_2 \,, \ldots, b_{\rho-1} b_\rho
$$

nei quali viene diviso l'asse reale dai punti $0, b_1, b_2, \ldots, b_{\rho-1}, b_\rho$, troviamo per la sostituzione V rispettivamente

$$
(11) \quad V = U \,, \; V = U_1 U \,, \; V = U_2 U \,, \ldots, V = U_\rho U \,,
$$

secondo che il punto P sia stato preso sul segmento (0), oppure sul segmento (1) o sopra (2), ..., ovvero sovra (ρ). Le equazioni

$$
(12) \quad U^2 = 1 \,, \; (U_1 U)^2 = 1 \,, \; (U_2 U)^2 = 1 \,, \ldots, (U_\rho U)^2 = 1
$$

sono, come facilmente si riconosce, in accordo colle equazioni (7).

Le sostituzioni (11) servono anzitutto per determinare in qual modo si connettano i singoli segmenti dell' asse reale alle linee di passaggio [1] della superficie F.

Osserviamo ancora che le equazioni (7) si potrebbero rimpiazzare colle equazioni (12) e colle equazioni

$$
(13) \quad S_i U \Sigma_i = U \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, \mu).
$$

§ 2.

Superficie con punti semplici di diramazione a due a due imaginarii conjugati.

Se consideriamo le superficie Riemanniane ad n fogli coi dati punti di diramazione

$$
a_1 \,, a_2 \,, \ldots, a_w
$$

esse, in parte saranno coniugate a sè medesime, ed in parte saranno a coppie coniugate l' una all' altra, qualora supponiamo che $a_1, a_2, \ldots, a_w$ siano in parte reali ed in parte imaginari a coppie coniugati. (Se facessimo dipendere la determinazione di quelle superficie da una equazione algebrica, per opportuna scelta delle incognite, corrisponderebbero alle superficie autoconiugate le radici reali dell' equazione).

Le considerazioni dei paragrafi precedenti ci pongono in grado di poter distinguere le superficie coniugate a sè stesse dalle rimanenti e di distinguerle in gruppi in corrispondenza alle diverse specie di linee di passaggio.

Io non posso qui dare lo svolgimento generale delle ricerche a ciò necessarie; piuttosto mi devo appagare di discutere i punti essenziali in un caso semplice.

Sia questo il caso, in cui i $w = 2\mu$ valori di diramazione siano imaginari a

---

(1) Vedi Klein, l. c.

coppie coniugati, come fosse

$$a_w = \bar{a}_1\ ,\ a_{w-1} = \bar{a}_2\ ,\ .\ .\ .\ ,\ a_{\mu+1} = \bar{a}_\mu$$

ed in cui, inoltre, considereremo soltanto quelle superficie che nei punti $a_1, a_2, \dots, a_w$ sono diramate semplicemente.

Queste superficie sono, per la fissazione delle linee

$$l_1\ ,\ l_2\ ,\ .\ .\ .\ ,\ l_\mu\ ,\ \bar{l}_\mu\ ,\ .\ .\ .\ ,\ \bar{l}_2\ ,\ \bar{l}_1\ ,$$

coordinate una ad una ai sistemi di $w = 2\mu$ trasposizioni

$$(1)\qquad t_1\ ,\ t_2\ ,\ .\ .\ .\ ,\ t_\mu\ ,\ \tau_\mu\ ,\ .\ .\ .\ ,\ \tau_2\ ,\ \tau_1$$

le quali soddisfano alle condizioni più volte menzionate (cfr. Parte prima, § 1). Ad un sistema corrisponde una superficie autoconiugata, se le equazioni

$$(2)\qquad \tau_1 = U t_1 U\ ,\ \tau_2 = U t_2 U\ ,\dots,\ \tau_\mu = U t_\mu U\ ,\ U^2 = 1$$

possono essere soddisfatte da una sostituzione U. Una superficie autoconiugata potrà quindi essere già caratterizzata mediante il sistema delle $\mu + 1$ sostituzioni

$$(3)\qquad t_1\ ,\ t_2\ ,\ .\ .\ .\ ,\ t_\mu\ ,\ U\ ,$$

e, corrispondentemente potrà indicarsi con

$$(4)\qquad F = (t_1\ ,\ t_2\ ,\ .\ .\ .\ ,\ t_\mu\ ,\ U).$$

Ora, le condizioni, cui deve soddisfare il sistema (1), si traducono pel sistema (3) nel seguente modo. In primo luogo, in corrispondenza alla condizione

$$t_1 t_2 \ .\ .\ .\ t_\mu \tau_\mu \ .\ .\ .\ \tau_2 \tau_1 = 1,$$

deve essere

$$(5)\qquad TU = UT,$$

quando si ponga, per brevità,

$$(6)\qquad T = t_1 t_2 \ .\ .\ .\ t_\mu.$$

Inoltre, poichè mediante

$$t_1\ ,\ t_2\ ,\ .\ .\ .\ ,\ t_\mu\ ,\ U t_1 U\ ,\ .\ .\ .\ ,\ U t_\mu U$$

deve esser possibile un passaggio da ogni elemento ad ogni altro, le sostituzioni (3) mettono tutti gli elementi l'un l'altro in relazione, ossia, il chè è lo stesso, le sostituzioni (3) devono generare un gruppo transitivo. Allora si osservi come non possa ad un tempo

$$U_1 = (a_1\, b_1)\,(a_2\, b_2)\ .\ .\ .\ \left(a_{\frac{n}{2}}\, b_{\frac{n}{2}}\right)$$

con una parte $t_1, \dots, t_\mu$ delle trasposizioni essere capace di porre in relazione fra loro soltanto gli elementi $a_1, a_2, \dots, a_{\frac{n}{2}}$, e, con un' altra parte, di mettere in relazione soltanto gli elementi $b_1, b_2, \dots, b_{\frac{n}{2}}$. Perchè altrimenti

$$t_1\ ,\ .\ .\ .\ ,\ t_\mu\ ,\ U t_1 U\ ,\ .\ .\ .\ ,\ U t_\mu U$$

collegherebbero soltanto gli elementi a tra loro e soltanto gli elementi b tra loro. Si riconosce ora senza difficoltà, che queste condizioni necessarie per il sistema (3), sono anche sufficienti. In altri termini:

Le superficie F coniugate a sè stesse sono coordinate una ad una ai sistemi (3) che pongono in relazione tutti gli elementi (ossia che generano un gruppo transitivo) e che soddisfano alle equazioni

$$(7)\qquad U^2 = 1\ ,\ TU = UT,$$

dove si è posto

$$T = t_1 t_2 \ .\ .\ .\ t_\mu.$$

In ciò sono da escludere (nel caso di n pari) quei sistemi, per i quali

$$U = (a_1\, b_1)\ .\ .\ .\ \left(a_{\frac{n}{2}}\, b_{\frac{n}{2}}\right)\quad \text{e}\quad t_1\ ,\ t_2\ ,\ .\ .\ .\ ,\ t_\mu$$

colleghino tra loro soltanto gli elementi b (¹). Del resto sono naturalmente da considerarsi come non diversi tra loro i sistemi (3) trasformabili tra loro.

L' espressione generale di una sostituzione U, che soddisfa all' equazione $U^2 = 1$, è evidentemente questa:

$$(8)\qquad U = (a_1\, b_1)\,(a_2\, b_2)\ .\ .\ .\ (a_r\, b_r)\,(c_1)\,(c_2)\ .\ .\ .\ (c_s)\ ,$$

dove $a_1, a_2, \dots, a_s, b_1, b_2, \dots, b_r, c_1, c_2, \dots, c_s$ indicano gli n elementi in

(¹) È questo cioè l'*unico* caso, in cui il gruppo generato mediante $t_1, t_2, \dots, t_{\mu-1}, U$ è transitivo, mentre il gruppo generato da $t_1, \dots, t_\mu, U t_1 U, \dots, U t_\mu U$ è intransitivo.

un ordine qualunque di successione. Qui sono r ed s due interi qualunque non negativi che soddisfano all'equazione

$$s + 2r = n.$$

Per il caso di $r = 0$, U si riduce alla identità.

Significhino ora α_i e β_i i due elementi a_i e b_i in un qualunque ordine di successione, cosicchè sia quindi $\alpha_i = a_i$ e $\beta_i = b_i$, oppure $\alpha_i = b_i$ e $\beta_i = a_i$. Allora

$$(9) \qquad T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & \dots & a_r & b_r \\ \alpha_{i_1} & \beta_{i_1} & \alpha_{i_2} & \beta_{i_2} & \dots & \alpha_{i_r} & \beta_{i_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1, & c_2, & \dots, & c_s \\ c_{k_1}, & c_{k_2}, & \dots, & c_{k_s} \end{pmatrix}$$

rappresenterà la più generale sostituzione permutabile con U, essendo $i_1, i_2, \dots i_r$ e $k_1, k_2, \dots, k_s$, rispettivamente gli indici $1, 2, \dots, r$ ed $1, 2, \dots, s$ in un ordine qualunque di successione

Quelle superficie autoconiugate, per le quali sono U e T le medesime sostituzioni, noi le ascriveremo ad una classe [U, T]. Ogni superficie appartenente alla classe [U, T] possiede tante linee di passaggio, quanti cicli ha la sostituzione

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & , \dots, & c_s \\ c_{k_1} & c_{k_2} & , \dots, & c_{k_s} \end{pmatrix}.$$

Poichè i punti dell'asse reale, che giacciono nei fogli $c_1, c_2, \dots, c_s$, rimangono fissi per la trasformazione simmetrica e per un valico dal punto O, da cui escono le linee $l_1, l_2, \dots, l_w, \bar{l}_w, \dots, \bar{l}_2, \bar{l}_1$, i fogli della superficie subiscono precisamente la sostituzione $t_1 t_2 \dots t_\mu = T$.

Il numero delle superficie appartenenti alla classe [U, T], noi lo troviamo determinando il numero delle soluzioni di

$$(10) \qquad t_1 t_2 \dots t_\mu = T$$

dovendosi tuttavia soltanto tener conto di quelle soluzioni, che rispondono alle condizioni date più sopra. La determinazione di questo numero si può effettuare mediante considerazioni simili a quelle che abbiamo impiegate nella Prima Parte. Per altro io ho studiato più da vicino il solo caso di

$$w = 2\mu = 2n - 2,$$

nel quale si tratta perciò delle superficie di genere *zero*, e voglio qui comunicare i risultati ottenuti.

3.

Superficie di genere zero

Considerando gli assi reali degli n fogli di una superficie Riemanniana, essi comporranno una o più linee chiuse. Queste linee, io le chiamerò "*linee di realità*". Le medesime si possono incontrare, o scambievolmente od ognuna con se stessa, soltanto nei punti di diramazione. Se nessuno dei punti di diramazione è reale, le singole linee di realità si compongono degli assi di certi fogli, ciascun asse preso in tutta la sua estensione. Il numero di questi assi può allora chiamarsi la *multiplicità* della linea di realità. La molteplicità indica manifestamente quante volte si trova il singolo valor reale sopra la linea di realità.

Sopra una superficie autoconiugata, le linee di passaggio appartengono alle linee di realità. Quelle linee di realità le quali non sono di passaggio, o saranno autosimmetriche o saranno simmetriche due a due reciprocamente.

Se consideriamo adesso una superficie autoconiugata di genere *zero*, i cui $w=2\mu$ valori di diramazione siano imaginari a due a due coniugati, si presentano i soli casi seguenti di possibilità:

1) Esiste una linea di passaggio, la quale, come linea di realità possiede la multiplicità s. Si hanno inoltre $2\mu_1$, $2\mu_2$, $2\mu_3, \dots,$ linee di realità simmetricamente accoppiate rispettivamente delle multiplicità 1, 2, 3, ...

La superficie la chiameremo, in questo caso, del "carattere"

$$(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots).$$

I "caratteri" $\mu_1, \mu_2, \dots,$ possono avere valori qualunque, interi, non negativi e che soddisfino all'equazione

$$s + 2(\mu_1 + 2\mu_2 + 3\mu_3 + \dots) = n.$$

2) Non esiste alcuna linea di passaggio; ma si ha al contrario una linea di realità autosimmetrica di multiplicità 2ϱ, ed inoltre $2\mu_1, 2\mu_2, 2\mu_3, \ldots$ linee di realità simmetricamente accoppiate di multiplicità $1, 2, 3, \ldots$

In questo caso la superficie si dirà di carattere

$$(\varrho; \mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots).$$

I "caratteri" $\varrho, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ possono avere valori qualunque, interi, non negativi e che soddisfino l'equazione

$$s\varrho + 2(\mu_1 + 2\mu_2 + 3\mu_3 + \ldots) = n.$$

Per il numero ϱ è escluso il valor <u>zero</u>. I summenzionati risultati relativi a computi di numeri, io riassumo nel seguente teorema:

<u>Tra le superficie Riemanniane ad n fogli di genere zero con date coppie coniugate di valori di diramazione</u>, ne esistono

$$(n-1)!(r+s)^{\lambda-2} \cdot \frac{s^s}{s!} \cdot \prod_k \frac{1}{\mu!}\left(\frac{k^{2k-1}}{k!k!}\right)^{\mu_k}, (k=1,2,3,\ldots),$$

di autoconiugate di carattere $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots)$.

Per brevità qui si è posto

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \ldots = \lambda,$$

$$\mu_1 + 2\mu_2 + 3\mu_3 + \ldots = r,$$

e sussiste inoltre l'equazione

$$s + 2r = n.$$

Nel caso di n pari, si hanno poi, tra quelle superficie,

$$(n-1)!(r+\varrho)^{\lambda-2} \cdot \frac{(2\varrho)^{2\varrho}}{(2\varrho)!} \cdot \prod_k \frac{1}{\mu!}\left(\frac{k^{2k-1}}{k!k!}\right)^{\mu_k}, (k=1,2,3,\ldots)$$

superficie autoconiugate di carattere $(\rho;\mu_1,\mu_2,\mu_3,\ldots)$, dove, per brevità, si sono posti

$$\mu_1+\mu_2+\mu_3+\ldots=\lambda\,,$$

$$\rho+\mu_1+2\mu_2+3\mu_3+\ldots=r=\frac{n}{2}\,.$$

PARTE QUARTA

DETERMINAZIONE ANALITICA DELLE SUPERFICIE A TRE ED A QUATTRO FOGLI.

Nei casi di n=3 ed n=4 si riesce,come ha mostrato il signor Thomae(1), coll'aiuto delle funzioni ϑ, a costruire una tale funzione algebrica ad n valori, i cui w valori di diramazione siano dati. Ora il numero delle superficie Riemanniane ad n fogli (cfr. Parte Prima, par.5) nei casi n=3 ed n=4 rispettivamente ammonta ad

$$N=\frac{3^{w-2}-1}{2}\quad\text{ed}\quad N=(2^{w-4}-1)\,\frac{3^{w-2}-1}{2}\,,$$

ed altrettante funzioni algebriche diverse devono effettivamente esistere in questi casi (secondo i teoremi di esistenza di Riemann)(2).

Mi sembra ora interessante il cercare se, tenendo il cammino del signor Thomae, si ottenga esattamente il numero N di funzioni.

Che appunto sia così, voglio mostrarlo in ciò che segue. Io esporrò qui al tempo stesso il procedimento del signor Thomae in modo più conveniente allo scopo attuale.

(1) Math. Annalen, vol.6, pag.612 e vol.18,pag. 443.

(2) Questi teoremi, che in seguito non presupporrò,sono stati dimostrati,come è noto,dai signori Neumann e Schwarz.

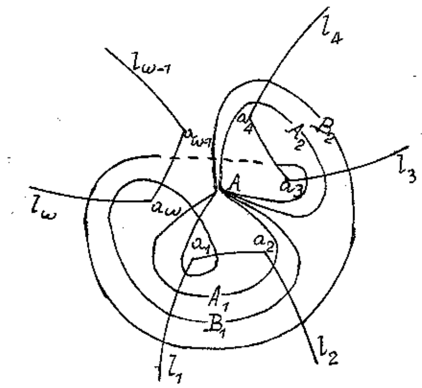
pra la superficie F, e lasciamoceli costantemente, mentre facciam muovere il posto sulla F'.

Se giriamo intorno ad un punto arbitrariamente scelto sulla superficie F', i valori $y_1, y_2, \ldots, y_n$ si trasformano ognuno in se stesso. Ciò è evidente senz'altro se il punto non è di diramazione. Ma, se il punto fosse di diramazione, un giro intorno ad esso sopra la superficie F' richiederebbe un doppio giro nel piano della x, epperò, anche in questo caso, ognuno dei valori $y_1, y_2, \ldots, y_n$ si riprodurrebbe. Ciò potrà esprimersi dicendo:

Una funzione algebrica y diramata come la superficie F è, sopra la superficie iperellettica F', bensì plurivalente (cioè n valente), ma non diramata.

Se tagliamo la superficie F' in una semplicemente connessa, e proseguiamo su questa uno degli n valori di y con continuità, a partire da un qualunque posto, otteniamo un ramo univoco della funzione y.

Gli n rami della funzione y, coll'attraversare un taglio, subiscono allora una determinata permutazione. Si ottiene una superficie sulla quale y è ad un sol valore, sovrapponendo n esemplari della superficie tagliata F' e connettendoli lungo ciascun orlo corrispondentemente alla permutazione ad esso relativa.



(fig.9)

Dovranno adesso determinarsi queste permutazioni nella ipotesi di un determinato ritaglio della superficie F' (1). La linea chiusa L si condurrà come prima per i punti $a_1, a_2, \ldots, a_W$ in modo che le linee $l_1, l_2, \ldots, l_W$ scorrano interamente in una parte G del piano, che sia limitata da L. I due fogli della superficie F' si vengano a connettere lungo i tratti $a_1 a_2, a_3 a_4, \ldots, a_{W-1}\ a_W$ della linea L.

Assumiamo ora nella parte G' del piano un punto A, e facciamo incominciare e finire i tagli in esso. Corrispondentemente ad ogni linea di passaggio

$$a_{2i-1}\ a_{2i},\ (i = 1, 2, \ldots, \mu = \frac{W}{2} - 1)$$

conduciamo due tagli A_i, B_i. Il taglio A_i scorre interamente sul foglio superiore e circonda i punti $a_{2i-1}\ a_{2i}$. Il taglio B_i incomincia sul foglio superiore, passa, attraverso il punto a_{2i-1}, nel foglio sottostante, scorre in questo fino alla linea di passaggio $a_{W-1}\ a_W$, passa allora nuovamente nel foglio superiore, nel quale stesso, attraversando le linee $l_W, l_1, l_2, \ldots, l_{2i}$ raggiunge di nuovo il punto A.

Colla introduzione di questi tagli

$$A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_\mu, B_\mu, (\mu = \frac{W}{2} - 1),$$

la superficie F' è trasformata in una semplicemente connessa.

Il taglio B_i conduce dal lato positivo al negativo di A_i, il taglio A_i ci porta dal lato negativo al positivo di B_i. Se in verso positivo si circonda il punto A sul foglio superiore, si incontrano i tagli nel seguente ordine di successione:

$$A_1^+ B_1^+ A_1^- B_1^- A_2^+ B_2^+ A_2^- B_2^- \ldots A_\mu^+ B_\mu^+ A_\mu^- B_\mu^- \ ;$$

qui gli indici + e − indicano che il passaggio avviene rispettivamente dal lato negativo al positi=

(1) Cfr. per ciò che segue la fig. 9.

vo e dal lato positivo al negativo.

Consideriamo adesso sopra la superficie tagliata F' gli n rami $y_1, y_2, \dots, y_n$ della funzione y, di cui ognuno singolarmente è univocamente disteso sulla superficie ritagliata. Se indicano $y_1, y_2, \dots y_n$ i valori assunti dagli n rami in un punto P del lato negativo di una delle linee A_i, B_i, e se inoltre sono $y'_1, y'_2, \dots, y'_n$ i valori presi nel medesimo P sul lato positivo della relativa linea, i valori $y'_1, y'_2, \dots, y'_n$ differiranno dai valori $y_1, y_2, \dots, y_n$ soltanto per l'ordine di successione.

Col passaggio di quella linea dal lato negativo al lato positivo i rami subiscono la sostituzione

$$S = \begin{pmatrix} y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix},$$

cioè si perviene dal ramo y'_k al ramo y_k ($k=1, 2, \dots, n$). Poichè la linea A_i conduce dal lato negativo al positivo della linea B_i, così otteniamo la sostituzione S corrispondente a B_i, determinando quale permutazione subiscono $y_1, y_2, \dots, y_n$ per il percorso della linea A_i.

Similmente determiniamo la sostituzione corrispondente ad A_i, stabilendo come si permutano $y_1, y_2, \dots, y_n$ per il percorso della linea B_i.

In questo modo noi troviamo le seguenti sostituzioni corrispondenti alle linee $A_1, B_2, \dots, A_\mu, B_\mu$:

Formiamo colle trasposizioni $t_1, t_2, \dots, t_w$ le seguenti sostituzioni:

$$\begin{aligned}
S_1 &= t_1 t_2 t_3 \dots t_{w-1} = t_w \\
S_2 &= t_2 t_3 \dots t_{w-1} = t_1 t_w \\
S_3 &= t_3 \dots t_{w-1} = t_2 t_1 t_w \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
S_{w-1} &= t_{w-1} = t_{w-2} \dots t_2 t_1 t_w .
\end{aligned}$$

Per il passaggio dal lato negativo al positivo, gli n rami y_1, y_2, ..., y_n subiscon quindi

lungo A_i, la sostituzione $S^{-1}_{2i-1} . S^{-1}_{2i+1} . S_{2i} = U_i$,
lungo B_i, la sostituzione $S^{-1}_{2i+1} . S_{2i-1} = V_i$.

Si dimostra facilmente la relazione

$$U_1 V_1 U_1^{-1} V_1^{-1} U_2 V_2 U_2^{-1} V_2^{-1} \ldots U_\mu V_\mu U_\mu^{-} V_\mu^{-1} = 1,$$

la quale non esprime altro, se non che per un accerchiamento del punto A ogni ramo si trasforma in sè medesimo.

Le sostituzioni U_i e V_i possono prendersi nella forma

$$U_i = S^{-1}_{2i-1} \; (t_W t_1 t_2 \ldots t_{2i} \, t_{2i-1}) \; S_{2i-1} ,$$
$$V_i = S^{-1}_{2i+1} \; (t_{2i-1} \, t_{2i}) \; S_{2i+1} ,$$

da cui risulta che la prima è simile ad un prodotto di 2i+2 trasposizioni, l'ultima ad un prodotto di due.

Il gruppo generato dalle sostituzioni U_i, V_i, cioè il gruppo di monodromia di y sulla superficie F', è perciò contenuto nel gruppo alterno. Ma si può facilmente provare che esso è identico al gruppo alterno. Infatti, per il teorema di L ü r o t h, le linee l_1, l_2, ..., l_W possono sempre scegliersi in modo, che risultino

$$t_W = (y_1 \, y_2), t_1 = (y_1 \, y_2), t_2 = (y_1 \, y_3), t_3 = (y_1 \, y_3), \ldots$$
$$\ldots, t_{2n-6} = (y_1 \, y_n), t_{2n-5} = (y_1 \, y_{n-1})$$

e le seguenti trasposizioni t tutte eguali ad $(y_1 \, y_n)$. Ma, per questa scelta di linee l, troviamo

$$(1) \begin{cases} U_1 = (y_1 \, y_2 \, y_3), U_2 = (y_1 \, y_3 \, y_4), \ldots, U_{n-2} = (y_1 \, y_{n-1} \, y_n), \\ V_1 = (y_1 \, y_3 \, y_2), V_2 = (y_1 \, y_4 \, y_3), \ldots, V_{n-2} = (y_1 \, y_n \, y_{n-1}), \end{cases}$$

mentre tutte le rimanenti sostituzioni U_i, V_i si riducono alla identità. Ora tutte le sostituzioni (1) generano, come è facile vedere, il gruppo alterno, dal che segue la verità della nostra asserzione.

Le considerazioni da noi fatte potranno alcun poco modificarsi introducendo fin da principio la superficie F' come quella superficie che rappresenta la diramazione del prodotto di differenze $\prod_{i \gtrless k} (y_i - y_k)$. E' anche da osservarsi che il presupposto ipotetico di una funzione y diramata secondo la F, si sarebbe anche potuto evitare, in quanto i teoremi di questo paragrafo non esprimono in fondo che delle semplici relazioni topologiche fra le superficie F ed F'.

2.

Il caso n = 3.

Se ora la superficie F viene supposta a tre fogli, quindi n=3; le sostituzioni U_i, V_i saranno tutte quante potenze della sostituzione ciclica

$$S = (y_1 y_2 y_3).$$

Perciò l'espressione Langraniana

$$z = y_1 + \alpha y_2 + \alpha^2 y_3, \tag{1}$$

dove α indica una radice terza immaginaria dell'unità, è una funzione non diramata sulla superficie F', la quale, per il passaggio di una delle linee A_i, B_i acquista un fattore α^k(k=0, 1, 2).

La funzione z è quindi una funzione radicale del terzo grado sopra la superficie F'. Ma questa funzione si sa notoriamente esprimere mediante integrali di terza specie, oppure anche mediante funzione ϑ (1). Noi tentiamo la rappresentazione nel

(1) R i e m a n n , Theorie der Abel'schen Functionen, art. 25 e 26

caso, in cui y diventi semplicemente infinita in p+1 punti di diramazione $a_1, a_2, \ldots, a_{w+1}$ sopra la superficie F. La somma $y_1+y_2+y_3$ è allora una funzione razionale di x, che può diventare infinita, e propriamente dell'ordine $\frac{1}{2}$ al più, soltanto per $x=a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}$, e che perciò si riduce ad una costante. Aumentando y di una opportuna costante, otteniamo che diventi

$$(2) \qquad y_1 + y_2 + y_3 = 0.$$

Il genere μ della superficie a due fogli F' è

$$\mu = \frac{w}{2} - 1 = p + 1.$$

Indichiamo ora

$$u_1, u_2, \ldots, u_\mu$$

gli integrali normali di prima specie della superficie F', determinati secondo R i e m a n n, ponendo a base il suindicato ritaglio della superficie F'. Siano inoltre

$$u_\nu^{(k)} (k = 1, 2, \ldots, p + 1)$$

i valori dell'integrale u_ν nei punti di diramazione $a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}$, e sia, finalmente,

$$e_\nu = \Sigma_k u_\nu^{(k)}.$$

La funzione radicale (1) si esprime allora per quoziente di funzioni ϑ nella forma

(1) Cfr. C. N e u m a n n: Vorlesungen über R i e m a n n ' s Theorie der A b e l ' s c h e n Integrale (Leipzig, 1884) pag. 367.

$$(4)\quad y_1+\alpha y_2+\alpha^2 y_3 = c.\frac{\vartheta(u_\nu-e_\nu-h_\nu\pi i-\sum_{\varrho}^{\mu} h_\varrho a_{\nu\varrho})}{\vartheta(u_\nu-e_\nu)}.e^{-2\sum_{1}^{\mu} h_\nu(u'_\nu-e_\nu)},$$

dove è c una costante, e $g_1,\dots,g_\mu$, $h_1,\dots,h_\mu$ deno tano terze parti di numeri interi.

Per via opportuna, la quale conduca da un posto della superficie al posto corrispondente sull'altro foglio, si scambieranno y_2 ed y_3 fra loro. Se contemporaneamente si trasformano $u_1,\dots,u_\mu$ in $u'_1,\dots,u'_\mu$, otteniamo dalla (1)

$$(5)\quad y_1+\alpha^2 y_2+\alpha y_3 = c.\frac{\vartheta(u'_\nu-e_\nu-g_\nu\pi i-\sum_{1}^{\mu} h_\varrho a_{\nu\varrho})}{(u' \ -e\ )}.e^{-2\sum_{1}^{\mu} h_\nu(u'_\nu-e_\nu)}.$$

Ora è, notoriamente,

$$(6)\quad u_\nu+u'_\nu-2u_\nu^{(1)} \equiv 2u_\nu^{(2)} \equiv\dots\equiv 2u_\nu^{(p+1)} \equiv 2u_\nu^{(p+2)}, \quad (\nu=1,2,\dots,\mu),$$

dove il segno di congruenza si riferisce ai periodi degli integrali ed $u_\nu^{(p+2)}$ indica il valore di u_ν nel punto di diramazione a_{p+2}. Inoltre noi possiamo supporre (1).

$$(7)\qquad e_\nu = \sum_{k=1}^{p+1} u_\nu^{(k)} = u_\nu^{(p+2)}.$$

Dalle (6) e (7) segue:

$$(8)\qquad u'_\nu-e_\nu \equiv -(u_\nu-e_\nu)-2(e_\nu-u_\nu^{(p+2)}) \equiv -(u_\nu-e_\nu).$$

E con ciò, poichè ϑ è una funzione pari, la equazione (5) si trasforma in

$$(9)\quad y_1+\alpha^2 y_2+\alpha y_3 = c\cdot\alpha'\cdot\frac{\vartheta(u_\nu-e+g_\nu\pi i+\sum_{1}^{\mu} h_\varrho a_\varrho)}{(u\ -e\ )}.e^{2\sum_{1}^{\mu} h_\nu(u_\nu-e_\nu)},$$

dove indica α' una radice cubica dell'unità.

---

(1) Cfr. C. N e u m a n n: Vorlesungen über R i e m a n n ' s Theorie der A b e l ' s c h e n Integrale (Leipzig, 1884) pag. 367

3.

Il caso n = 4.

Consideriamo adesso il caso di $n=4$. Il proble= ma è quello di determinare una funzione algebrica y, la quale sia diramata come una data superficie F a quattro fogli coi punti di diramazione a_1, a_2, $\dots, a_w$. Noi supporremo ancora che la funzione y da determinare divenga infinita del primo ordine nei punti

$$a_1,\ a_2, \dots, a_{p+1}\ (\rho = \frac{w}{2} - 3).$$

Se indichiamo con y_1, y_2, y_3, y_4, i valori che y acquista in quattro punti sovrapposti della super= ficie F, i quadrati delle quantità

$$(1) \qquad \begin{cases} z = z_1 = y_1 - y_2 - y_3 + y_4, \\ \quad z_2 = y_1 - y_2 + y_3 - y_4, \\ \quad z_3 = y_1 + y_2 - y_3 - y_4, \end{cases}$$

per un giro intorno ad uno dei punti a_1, $a_2, \dots, a_n$ subiscono una permutazione, la quale consiste in u no scambio tra due di essi. Perciò z_2 è diramata co me una superficie F'' a tre fogli, coi punti di di= ramazione semplici a_1, $a_2, \dots$, a_w, e z medesima è, sopra F'', una funzione radicale del secondo grado, la quale diviene infinita del primo ordine nei $p+1$ punti a_1, $a_2, \dots, a_{p+1}$. Il genere γ della superficie F'' è uguale a $p+1$. Se u_1, $u_2, \dots, u_\gamma$ indicano gli integrali normali di prima specie della superficie F'', per una conveniente determinazione delle co = stanti e_1, $e_2, \dots$, e_γ, risulta

$$(2) \quad z=z_1=c.\frac{\vartheta(u_\nu - e_\nu - g_\nu \pi i - \sum_1^\gamma h_\rho a_{\nu\rho})}{(u - e)}.e^{-2\sum_1^\gamma h_\nu (u_\nu - e_\nu)},$$

dove è c una costante, e g_1, $g_2, \dots$, g_γ, $h_1, h_2, \dots$,

$\ldots, h_\gamma$ designano metà di numeri interi. Per brevità, indicherò con $\psi(u_\nu)$ il membro a destra della (2), e con $u_1, \ldots, u_\gamma$, $u'_1, \ldots, u'_\gamma$, $u''_1, \ldots, u''_\gamma$ i valori degli integrali della prima specie in punti sovrapposti della superficie F". Allora, per ripetizione della equazione (2), risulta

$$\begin{aligned} z_1 &= \psi(u_\nu), \\ z_2 &= \psi(u'_\nu), \\ z_3 &= \psi(u''_\nu). \end{aligned} \tag{3}$$

Ora, poichè $y_1+y_2+y_3+y_4$ è una costante, che noi possiamo supporre eguale a zero, seguirà finalmente, con riguardo alle (1)

$$y = y_1 = \frac{1}{4}\left[\psi(u_\nu) + \psi(u'_\nu) = \psi(u''_\nu)\right]. \tag{4}$$

Ci si convince facilmente, che questa espressione trovata per y soddisfa a tutte le condizioni; cioè, se consideriamo una qualunque superficie F" a tre fogli semplicemente diramata nei punti $a_1, a_2, \ldots, a_W$, e costruiamo su di essa la funzione $\frac{1}{4}\left[\psi(u_\nu)+\psi(u'_\nu)+\psi(u''_\nu)\right.$, sarà questa una funzione algebrica a quattro valori, la quale è semplicemente diramata nei punti $a_1, a_2, \ldots, a_W$. Possiamo ora facilmente computare il numero di queste funzioni. Il numero delle superficie a tre fogli, che possiamo assumere come superficie F", ascende a

$$\frac{3^{W-2}-1}{2}.$$

Inoltre, le metà di numeri interi $g_1, g_2, \ldots, g_\gamma$, $h_1, h_2, \ldots, h_\gamma$ che entrano in $\psi(u_\nu)$, comportano $2^{2\gamma}-1=2^{W-4}-1$ determinazioni essenzialmente diverse. Otteniamo quindi, per il numero cercato, il valore

$$\frac{(2^{W-4}-1)(2^{W-2}-1)}{2},$$

il quale coincide col numero già prima determinato (Parte I, par.5), delle superficie a quattro fogli con w punti dati di diramazione.

4.

Osservazioni affini all'argomento.

Le precedenti considerazioni vanno evidentemente debitrici del loro successo a quei medesimi fatti che rendono possibile la risoluzione algebrica delle operazioni generali del 3° e 4° grado. Considerazioni analoghe si potrebbero fare per quelle superficie ad n fogli i cui gruppi di monodromia godano di particolari proprietà, su di che però non vogliamo entrare ulteriormente. Soltanto va ancora rilevata un'altra circostanza, che si rende manifesta nei nostri sviluppi. Essa consiste nel legame fra il problema, di determinare le superficie a 3 e 4 fogli con dati punti semplici di diramazione, e la trisezione delle funzioni iperellittiche. Tale legame si è già presentato, nella storia del soggetto, in un caso speciale, Il problema di determinare i fasci di forme binarie di 4° grado il cui discriminante sia una data funzione (del 6° grado nel parametro del fascio) ricade evidentemente in quello della determinazione delle superficie Riemanniane a 4 fogli di genere nullo con dati punti di diramazione. Ora quel problema si può ricondurre, come ha dimostrato H i l b e r t (l.c.), ad un problema trattato da C l e b s c h (1). Quest'ul=

---

(1) Zur Theorie der binären Formen sechster Ordnung und zur Dreitheilung der hyperelliptischen Functionen. Math. Annalen Bd. 2, pag. 193. Cfr. anche B u r k h a r d t: "Grundzüge einer allgemeinen Systematik der hyperelliptischen Functionen I. Ordnung. Nach Vorlesungen von F. Klein". Math. Annalen Bd. 35, pag. 255.

sioni di connessione (2p+1)-pla(1). L'ipotesi della superficie anulare è particolarmente comoda per talune considerazioni che appartengono all'Analysis Situs.

Passo ora a svolgere più da vicino la succitata generalizzazione del nostro problema. Tagliamo la superficie Φ coi tagli Riemanniani

$$A_1,\ B_1,\ A_2,\ B_2, \ldots,\ A_p,\ B_p$$

in una superficie semplicemente connessa. Questi tagli noi faremo cominciare a terminare tutti quanti in un medesimo punto O della superficie. Indichiamo cogli indici + e - rispettivamente un passaggio dal lato negativo al positivo e dal lato positivo al negativo: così, per un giro positivo intorno al punto O, i tagli saranno oltrepassati nell'ordine

$$A_1^+ B_1^+ A_1^- B_1^- A_2^+ B_2^+ A_2^- B_2^-, \ldots, A_p^+ B_p^+ A_p^- B_p^- .$$

E' questa la medesima scelta di tagli, la quale venne più sopra (Parte IV, par.1) applicata alla superficie iperellittica F'.

Sulla superficie Φ siano ora dati w punti

(1) $$a_1,\ a_2, \ldots,\ a_w.$$

Supponiamo scelto il punto O in modo che esso non coincida con alcuno di questi w punti e congiungiamo O coi punti a_1, $a_2, \ldots$, a_w mediante i tagli l_1, $l_2, \ldots$, l_w, i quali nè s'incontrino tra loro, nè incontrino uno dei tagli A_i, B_i. Per un giro positivo intorno al punto O, i tagli siano oltrepassati nell'ordine di successione

(2) $$l_1^+ l_2^+ \ldots\ l_w^+ A_1^+ B_1^+ A_1^- B_1^- \ldots\ A_p^+ B_p^+ A_p^- B_p^- .$$

(1) F. K l e i n: "Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie" Math. Annalen, Bd. 21, p. 141.

La superficie Φ sia trasformata nella superficie Φ^* dalla effettuazione di tutti i tagli. La superficie Φ^* è semplicemente connessa, il suo limite è formato dai bordi dei tagli l, A, B.

Supponiamo ora n esemplari della superficie Φ^* tra loro coincidenti, i quali noi indichiamo in una successione qualunque come primo, secondo,...., n^{mo} foglio.

Coordiniamo inoltre alle linee

$$(3) \qquad l_1, l_2, \ldots, l_w, A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_p, B_p$$

una rispettiva sostituzione su n elementi

$$(4) \qquad S_1, S_2, \ldots, S_w, U_1, V_1, U_2, V_2, \ldots, U_p, V_p,$$

e colleghiamo finalmente gli n esemplari Φ^* lungo le linee (3) per modo che gli n fogli, per un passaggio dal lato negativo al positivo di una delle linee (3), subiscano appunto la sostituzione (4) corrispondente a questa linea. I fogli Φ^* in questo modo connessi formano una superficie n-pla distesa sulla superficie Φ , che noi indichiamo con

$$(5) \qquad F = \begin{pmatrix} l_1, l_2, \ldots, l_w, A_1, B_1, \ldots, A_p, B_p \\ S_1, S_2, \ldots, S_w, U_1, V_1, \ldots, U_p, V_p \end{pmatrix}$$

Affinchè questa superficie sia chiusa in sè(consti di un sol pezzo) poniamo alle sostituzioni (4) la condizione di generare un gruppo transitivo, il quale ultimo si chiama il gruppo di monodromia di F per rispetto a Φ. Affinchè poi soltanto i punti a_1, $a_2, \ldots, a_w$, e non anche il punto O siano punti di diramazione su di F, limitiamo la scelta delle sostituzioni (4) maggiormente, collo stabilire che debba essere

$$(6) S_1 S_2 \ldots S_w U_1 V_1 U_1^{-1} V_1^{-1} U_2 V_2 U_2^{-1} V_2^{-1} \ldots U_p V_p U_p^{-1} V_p^{-1} = 1.$$

Se sopra la superficie Φ , tiriamo da un punto A diverso da a_1, $a_2, \ldots$, a_w una qualunque linea L, che, evitando i punti a_1, $a_2, \ldots, a_W$, ritorni ad A, per il percorso di questa linea i fogli F dovranno subire una certa sostituzione S. (La totalità delle sostituzioni S forma il suddetto gruppo di monodromia di F). Tenendo fissi i punti $a_1, a_2, \ldots, a_W$, mutiamo ora il punto O, le linee (3) in esso concorrenti e le sostituzioni (4), e sia F' la superficie appartenente agli elementi alterati. Allora noi concepiremo le due superficie F ed F' come non diverse tra loro, se ad ogni linea L che incominci e termini al punto A corrisponde la medesima sostituzione S, sia rispetto alla superficie F, che alla superficie F', oppure se questa condizione può esser raggiunta mediante un opportuno cambiamento della enumerazione dei fogli di F.

Questa definizione è, come facilmente si vede, indipendente dalla scelta del punto A.

2.

Calcolo del genere della superficie F.

Se consideriamo la superficie F definita nel paragrafo precedente, noi attribuiamo a ciascuno de' suoi punti di diramazione, per es. a_i, come si usa, una determinata multiplicità.

Se cioè denota c_i il numero dei cicli della sostituzione S_i, il punto di diramazione a_i si dice di multiplicità $n-c_i$. Allora il punto a_i si trova, sulla superficie F, c_i volte di più, mentre ogni altro punto di Φ comparisce sopra la superficie F esattamente n volte.

L'espressione

$$W = \sum_{i=1}^{\infty} (n - c_i) \tag{1}$$

si chiama il numero delle diramazioni semplici della superficie F. Conformemente alla sua generazione la superficie F ammette una divisione in

$$f = n$$

campi semplicemente connessi di cui ognuno singo = larmente è un esemplare della superficie Φ^*.

I vertici di questa divisione in campi risultano costituiti dai punti a_i e dai punti 0, il loro numero quindi ammonta ad

$$e = \sum c_i + n.$$

Il numero dei lati della divisione in campi si trova facilmente uguale a

$$k = n \cdot w + 2pn.$$

Ora, per il teorema di E u l e r o generalizzato è

$$e + f = k + 2 - 2P,$$

dove P indica il genere della superficie F. Se calcoliamo P dalle precedenti equazioni, otteniamo questo risultato:

"Il genere P della superficie F possiede il valore

$$P = \frac{1}{2} W + n(p - 1) + 1, \tag{2}$$

dove W designa il numero delle diramazioni semplici, n il numero dei fogli F e p il genere della superficie Φ".

3.

Il problema generalizzato ed il suo gruppo di monodromia.

Il Problema generalizzato suona ora così:

Sono dati una superficie Riemanniana Φ e su di essa w punti a_1, a_2,..., a_W. Si vogliono determinare quelle superficie Riemanniane le quali siano distese secondo n fogli sulla superficie Φ e siano diramate nei posti a_1, a_2,..., a_W.

Le superficie da determinarsi, per quanto pre=cede, sono coordinate singolarmente ai sistemi di $w+2p$ sostituzioni

$$(1)\qquad S_1, S_2, \ldots, S_w, U_1, V_1, U_2, V_2, \ldots, U_p, V_p,$$

che sono formate con n elementi e che soddisfano alle seguenti condizioni:

1) Il gruppo generato dalle sostituzioni (1) è transitivo.

2) Le sostituzioni soddisfano la equazione

$$(2)\qquad S_1 S_2 \ldots S_w U_1 V_1 U_1^{-} \ldots U_p V_p U_p^{-1} V_p^{-1} = 1.$$

Qui due sistemi (1) sono da reputarsi come non diversi, quando uno può esser dedotto dall'altro per mezzo di una trasformazione (cambiamento di nome degli elementi).

Se il genere p della superficie Φ è nullo, noi siamo ricondotti al primitivo problema.

Per ottenere il gruppo di monodromia del pro = blema generalizzato, si pensino i $3p-3$(1) moduli della superficie Φ e contemporaneamente i posti a_1, $a_2, \ldots, a_w$ muoversi a partire da una posizione iniziale qualunque in modo continuo fino a ritornare nella posizione di origine.

Però in ciascuno stadio del movimento i posti a_1, $a_2, \ldots, a_w$ devono restare fra loro distinti e la superficie Φ deve rimanere irriducibile. Se du=rante il movimento noi seguiamo le modificazioni delle superficie F, quando la posizione iniziale è di nuovo raggiunta, esse hanno subito soltanto uno scambio fra loro. La totalità di queste permutazioni forma il gruppo di monodromia in discorso. Ora, durante il movimento per una determinata superfi=cie F, soltanto le linee l_1, $l_2, \ldots, l_w$, $A_1, \ldots, B_p$ risultano di mano in mano mutate, ma non le corri=

(1) Questo numero è, notoriamente, da sostituir=si con 0 quando sia $p=0$, e con 1 quando sia $p=1$.

spondenti sostituzioni S_1, $S_2, \ldots$, S_w, $U_1, \ldots, V_p$.

Da ciò segue:

Una sostituzione del gruppo di monodromia del nostro problema sostituisce la superficie

$$F = \begin{pmatrix} l_1, & l_2, \ldots, & l_w, & A_1, & B_1, \ldots, & A_p, & B_p \\ S_1, & S_2, \ldots, & S_w, & U_1, & V_1, \ldots, & U_p, & V_p \end{pmatrix}$$

mediante la superficie

$$F' = \begin{pmatrix} l'_1, & l'_2, \ldots, & l'_w, & A'_1, & B'_1, \ldots, & A'_p, & B'_p \\ S_1, & S_2, \ldots, & S_w, & U_1, & V_1, \ldots, & U_p, & V_p \end{pmatrix}$$

dove l', A', B' denotano un qualunque sistema di linee soddisfacenti alle medesime condizioni delle l, A, B.

Si otterranno tutte le sostituzioni del gruppo di monodromia, se si sceglieranno per l', A', B' di mano in mano tutti i possibili sistemi di linee soddisfacenti a quelle condizioni.

Il problema generalizzato può evidentemente specializzarsi col prescrivere la specie di diramazione nei punti a_1, $a_2, \ldots$, a_w, ovvero più in generale, coll'imporre alle sostituzioni $S_1, S_2, \ldots, S_w, U_1, V_1, \ldots, U_p, V_p$ certe limitazioni. Siffatte specializzazioni sono già designate dalla circostanza che il problema generalizzato è in generale riducibile.

4.

Superficie e funzioni non diramate.

In questo e nei paragrafi seguenti io voglio considerare il caso particolare in cui i punti a_1, $a_2, \ldots$, a_w vengano a mancare così che si tratti di superficie ad n fogli

$$F = \begin{pmatrix} A_1, & B_1, \ldots, & A_p, & B_p \\ U_1, & V_1, \ldots, & U_p, & V_p \end{pmatrix},$$

le quali siano non diramate sulla superficie Φ. Queste superficie sembrano avere un particolare interesse, poichè esse appartengono in modo speciale alle superficie Φ di genere più alto e dovrebbero essere chiamate a rappresentare una parte importante nella costruzione delle funzioni automorfe più semplici.(1)

Indichiamo, come prima, con Φ^* la superficie semplicemente connessa, che nasce da Φ colla introduzione dei tagli A, B. La superficie F consta di n esemplari Φ^* sovrapposti l'un l'altro, i quali sono connessi lungo le linee A, B corrispondentemente alle sostituzioni U, V. Se y denota una funzione algebrica uniforme del posto sovra la superficie F e se $y_1, y_2, \dots, y_n$ sono i valori in generale diversi fra loro, che y assume negli n punti di F sovrapposti, ciascuno degli n valori $y_1, y_2, \dots, y_n$, si lascia univocamente proseguire sulla superficie Φ^* e l'insieme dei valori della funzione y apparisce allora decomposto in n rami semplici. Questi ultimi, per il passaggio delle linee A, B, subiscono le permutazioni U, V. La determinazione della superficie F è quindi equivalente alla determinazione delle funzioni algebriche ad n valori non diramate sulla superficie Φ. Se in genere della superficie Φ è eguale ad uno, tutte queste superficie si ottengono per mezzo della teoria della trasformazione delle funzioni ellittiche ed il caso p=1 può quindi considerarsi come trattato completamente e lasciarsi, in seguito, da parte. Per un valore arbitrario di p è stata considerata nella teo

(1) Io mi attengo, per quanto riguarda le denominazioni, alle più recenti pubblicazioni di F. K l e i n. Si vedano: "Zur Theorie der Lamé'schen Functionem" (Göttinger Nachrichten del 1° marzo 1890). Inoltre "Ueber Normirung der linearen Differential gleichungen zweiter Ordnung" Math. Annalen, vol. 38, I, e le "Vorlesungen über elliptische Modulfunctionen" pubblicate dal sig. F r i c k e (Lipsia, 1890), vol. I, pag. 763.

ria delle funzioni Abeliane una particolare specie di funzioni non diramate, cioè le funzioni radicali. Io caratterizzerò in seguito più da vicino la posizione di queste particolari funzioni rispetto alle funzioni generali non diramate. Anzitutto vogliamo brevemente discutere il caso di $n=2$, il quale si lascia facilmente e completamente espletare.

5.

Determinazione di tutte le funzioni algebriche a due valori non diramate.

Si tratta della determinazione di tutte le superficie F, le quali sono a due fogli e non diramate sopra una data superficie Φ di genere p.

Queste superficie, una volta fissati i tagli A, B, sono coordinate una per una ai sistemi di $2p$ sostituzioni U_1, V_1, U_2, $V_2, \dots$, U_p, V_p, le quali sono formate con due elementi, soddisfano alla equazione

$$(1)\quad U_1V_1U_1^{-1}V_1^{-1},\dots,\ U_pV_pU_p^{-1}V_p^{-1}=1$$

e generano un gruppo transitivo. Se i due elementi sono 1 e 2, si hanno soltanto le due sostituzioni

$$S_1 = (1)(2);\ S_2 = (12)$$

e chiaramente noi possiamo scegliere ad arbitrio l'una o l'altra di queste sostituzioni per U_i, V_i. Soltanto è da escludere il caso, in cui $U_1, V_1, \dots, U_p, V_p$ tutte quante si identificano con S_1.

Il numero delle funzioni F raggiunge quindi $2^{2p}-1$ (1).

---

(1) Cfr. per il caso $p=2$: W. D y c k "Ueber Aufstellung und Untersuchung von Gruppen und Irrationalität regulärer Riemann'scher Flächen" Math. Annalen, Bd. 17, pag. 493.

Si riesce facilmente anche a determinare le funzioni algebriche appartenenti a queste superficie. Sia F una di quelle $2^{2p}-1$ superficie, inoltre sia y una funzione algebrica uniforme di luogo sopra F e siano y_1, y_2 i due rami univoci di y sopra Φ^*. La funzione y_1-y_2 prende allora per il passaggio di uno dei tagli A, B, il fattore +1 o -1, è quindi una funzione radicale di 2° grado. La somma y_1+y_2 è una funzione algebrica uniforme di luogo sopra la superficie Φ. Se formiamo ora, coll'applicazione delle note denominazioni Riemanniane, per la superficie Φ i ϑ-quozienti.

$$(2)\quad \psi = \psi(g_1,g_2,\dots,g_p;\ h_1,h_2,\dots,h_p) = \frac{\vartheta(u_\nu-e_\nu-g_\nu\pi i-\sum h_\rho a_{\nu\rho})}{\vartheta(u_\nu-e_\nu)}.e^{-2\sum h_\nu(u_\nu-e_\nu)},$$

dove $g_1,\dots,g_p,h_1,\dots,h_p$ denotano metà di numeri interi, sarà

$$y_1 + y_2 = 2R_1,\quad y_1 - y_2 = 2\psi R_2,$$

e di conseguenza sarà

$$(3)\qquad y = R_1 + \psi R_2$$

l'espressione generale di una funzione algebrica univoca sulla superficie F. Qui designano R_1, R_2 delle funzioni algebriche monodrome della superficie Noi otteniamo le $2^{2p}-1$ diverse superficie F, scegliendo per $(g_1,\dots, g_p, h_1,\dots, h_p)$ uno dopo l'altro tutti i sistemi essenzialmente diversi di metà di numeri interi. Del resto è evidente che la singola superficie F può esser già definita mediante la funzione (1)

---

(1) Le superficie a due fogli ammettono evidentemente tutte quante una trasformazione univoca in se stesse di periodo 2 e cadono quindi tra le su=

(3') $$y = \psi(g_1,\dots,g_p;\ h_1,\dots,h_p).$$

I casi di n=3 ed n=4 si possono pure esaurire coi metodi della Parte precedente, su di che io non entrerò qui in maggiori particolari.

6.

Le funzioni algebriche non diramate, che si sostituiscono linearmente per un cammino chiuso.

Si può ora rilevare anche una particolare specie di funzioni non diramate, delle quali le più semplici sono le funzioni radicali. Vogliamo considerare quelle funzioni non diramate sulla superficie Φ, i cui n rami univocamente distesi sopra Φ^* sono funzioni lineari (intere o fratte) l'uno dell'altro. Le funzioni lineari, che rappresentano gli n rami mediante un medesimo, formano evidentemente un gruppo. Ma ora si conoscono, dietro le ricerche di F. K l e i n, tutti i gruppi di funzioni lineari(1). Questi, se consideriamo come non diversi i gruppi fra loro trasformabili, sono:

---

perficie che io ho studiate nel lavoro "Ueber diejenigen algebraischen Gebilde, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen"(Göttinger Nachr. del 5 febbraio 1887, oppure Math. Ann. Bd. 32). Io approfitto dell'occasione per citare la Nota, a me comunicata più tardi, del sig. S. K a n t o r, che concerne questi stessi campi algebrici. Questa è intitolata: "Sur une théorie des courbes et des surfaces admettant des correspondances univoques" e si trova nei Comptes rendus dell'Accademia delle Scienze di Parigi, vol.100, pag.343-345.

(1) F. K l e i n, Vorlesungen über das Icosaeder (Leipzig, 1884),pag.115 e segg. Le sostituzioni del tetraedro, dell'ottaedro, dell'icosaedro, che nel testo io non do per brevità, si trovano a pag. 42 e 43 dell'opera suddetta.

1) I gruppi ciclici: $y' = e^{\frac{2ik\pi}{n}} y (k=0,1,\ldots,n-1)$.

2) I gruppi diedrici: $y' = e^{\frac{2ik\pi}{n}} y$,

$$y' = -\frac{e^{\frac{-2ik\pi}{n}}}{y} (k=0,1,\ldots,n-1).$$

3) Il gruppo del tetraedro.
4) Il gruppo dell'ottaedro.
5) Il gruppo dell'icosaedro.

Ai gruppi ciclici corrispondano le funzioni radicali. Le ultime esistono su tutte le superficie Φ, il cui genere è maggiore di zero, ed è notoriamente facile di trovare l'espressione generale di queste funzioni mediante funzioni ϑ. Le funzioni non diramate, le quali corrispondono ai rimanenti gruppi, esistono soltanto sopra quelle superficie Φ, il cui genere è maggiore di uno. Fa eccezione il gruppo diedrico n=2 (Vierergruppe, secondo la denominazione del signor K l e i n), a cui corrispondono anche per p=1 funzioni non diramate (1).

Per dimostrare questa affermazione, consideriamo sopra la superficie Φ la superficie non diramata.

$$F = \begin{pmatrix} A_1, & B_1, \ldots, & A_p, & B_p \\ U_1, & V_1, \ldots, & U_p, & V_p \end{pmatrix},$$

e supponiamo, che sopra F corrisponda ad uno dei detti gruppi una funzione algebrica monodroma. A questo gruppo G è allora riferito isomorficamente il gruppo di permutazioni generato da U_1, $V_1, \ldots,$ U_p, V_p. Ora, se è p=1, questo gruppo di permutazioni, in virtù della relazione $U_1V_1U_1^{-1}V_1^{-1}=1$, ossia $U_1V_1=V_1U_1$ consiste di sole sostituzioni fra loro permutabili. Di conseguenza devono essere tutte fra loro permutabili anche le sostituzioni del gruppo G.

(1) Si confronti per il caso p=1 una Nota di E. P i c a r d nei Comptes rendus, vol.90, pag.1479.

Perciò il gruppo G può essere soltanto un gruppo ciclico od il gruppo diedrico n=2. Sulla superficie Φ di genere p=1 possono dunque corrispondere funzioni non diramate solamente a questi gruppi.

Per quanto riguarda la dimostrazione della esistenza di funzioni non diramate, le quali corrispondano ai gruppi sopra enumerati, ci basti considerare un caso particolare. Si riconosce facilmente che il metodo seguìto in questo caso si può trasportare subito al caso più generale (1).

Sia data una superficie Riemanniana Φ di genere 2. Si vuol determinare su questa superficie una funzione algebrica a sessanta valori non diramata, i cui sessanta valori situati in un punto di Φ si connettano tra loro mediante le sessanta sostituzioni icosaedrali.

Designiamo con

$$(1) \qquad S_i (i = 1, 2, \ldots, 120)$$

le 120 sostituzioni omogenee dell'icosaedro,con z_1 e z_2 le variabili omogenee, alle quali si riferiscono le sostituzioni. Inoltre, formiamo un gruppo di scambi tra gli n elementi

$$(2) \qquad T_i (i = 1, 2, \ldots, 120),$$

il quale sia isomorfo al gruppo delle sostituzioni S_i. Un tale gruppo di scambi, e precisamente per n=120,elementi, lo si ottiene p.es., quando si riguardino come elementi i simboli S_i e ad ogni sostituzione icosaedrale S_k si faccia corrispondere lo scambio rappresentato dalla successione $S_k S_i (i = 1, 2, \ldots, 120)$.

Prendiamo adesso nel gruppo (2) quattro sostituzioni qualunque U_1, V_1, U_2, V_2, le quali soddisfacciano alla condizione che esse generino l'intero gruppo e soddisfacciano all'equazione

(1) Il medesimo è applicabile anche al caso delle superficie diramate.

$$U_1V_1U_1^{-1}V_1^{-1}U_2V_2U_2^{-1}V_2^{-1} = 1.$$

Ciò è evidentemente possibile. Infatti il gruppo (1), e per conseguenza il gruppo (2), si può generare mediante due sostituzioni opportunamente scelte.

Se T_α, T_β sono due tali sostituzioni, basterà porre

$$U_1=T_\alpha,\ V_1=1,\ U_2=T_\beta,\ V_2=1.$$

Ciò premesso, distendiamo sopra una superficie la superficie ad n fogli

$$F = \begin{pmatrix} A_1, & B_1, & A_2, & B_2 \\ U_1, & V_1, & U_2, & V_2 \end{pmatrix}$$

e designiamo con $y_1, y_2, \dots, y_n$ gli n valori che una funzione algebrica monodroma su F possiede in un punto della superficie Φ. Se descriviamo tutti i possibili cammini chiusi di questo punto sopra la superficie Φ le $y_1, y_2, \dots, y_n$ subiranno le permutazioni del gruppo (2). Ora poichè i gruppi (2) e (1) sono isomorfi, per un teorema del sig. Klein(1) si possono formare due funzioni omogenee:

$$Z_1 = \varphi_1(y_1, y_2 \dots, y_n), \quad Z_2 = \varphi_2(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

le quali per una permutazione T_i delle grandezze $y_1, y_2, \dots, y_n$ subiscono esattamente la medesima sostituzione, che z_1, z_2 per S_i.

Corrispondentemente è

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\varphi_1(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\varphi_2(y_1, y_2, \dots, y_n)} ,$$

---

(1) "Ueber die Auflösung gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grade" Math. Annalen, Bd. 15, pag. 253, e seguenti.

una funzione algebrica a sessanta valori non dira=
mata sopra la superficie Φ , la quale soddisfa al=
le condizioni poste.

Koningsberg (in Pr.), 27 gennaio 1891.

A P P E N D I C E (1)

Num.1; § 3.

Per dimostrare che il numero f appartenente allo spezzamento $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_i, \ldots, \nu_k, \ldots, \nu_r)$ è più piccolo del numero f' appartenente allo spezzamento contiguo $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_i+1, \ldots, \nu_k-1, \ldots, \nu_r)$, supponiamo che sia

$$\nu_1 \geq \nu_2 \geq \ldots \geq \nu_{j-1} > \nu_f = \nu_{j+1} = \ldots = \nu_i \geq \nu_{i+1} \geq \ldots \geq \nu_h = \nu_{k+1} = \ldots = \nu_l > \nu_{l+1} \geq \ldots \geq \nu_r .$$

Allora, evidentemente, è

$$f' = \binom{\nu_1}{2} + \ldots + \binom{\nu_1+1}{2} + \ldots + \binom{\nu_k-1}{2} + \ldots + \binom{\nu_r}{2}$$

$$-[\nu_1 + 2\nu_2 + \ldots + (j-1)\nu_{j-1} + j(\nu_i+1) + (j+1)\nu_j + \ldots + i\nu_{i-1} + (i+1)\nu_{i+1}$$

$$+ \ldots + (k-1)\nu_{k-1} + k\nu_{k+1} + \ldots + (l-1)\nu_1 + l(\nu_k - 1) + \ldots + r\nu_r] + n ,$$

e, se da f' si sottrae il valore di f, dopo un facile calcolo, si ottiene

$$f' - f = \nu_i - \nu_k + 1 - j + l .$$

Ma si ha

$$\nu_i \geq \nu_k \quad \text{ed} \quad l > j ,$$

quindi f'-f sarà almeno eguale a 2, epperò, in ogni caso sarà f' > f.

---

(1) Le seguenti Note si riferiscono tutte alla PARTE PRIMA.

Num. 2; § 4.

L'inversione della formola (3), che noi scri = viamo nel seguente modo:

$$\frac{f(w|n)}{w!n!}=\sum\frac{1}{r!}\cdot\frac{1}{n_0!}\cdot\frac{\varphi(w_1|n_1)}{w_1!n_1!}\cdot\ldots\cdot\frac{\varphi(w_r|n_r)}{w_r!n_r!}\,, \tag{3'}$$

si effettua nel modo più facile, se ne moltipli = chiamo dapprima i due membri per

$$x^w y^n=x^{w_1}y^{n_1}.x^{w_2}y^{n_2}.\,\ldots\,.x^{w_r}y^{n_r}.y^{n_0},$$

e sommiamo poi per i valori

$$w_1=1,\ 2,\ldots,n=2,\ 3,\ldots$$

In questo modo otteniamo l'equazione identica

$$\sum_{w,n}\frac{f(w|n)}{w!n!}\,x^w y^n=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r!}e^y\Big(\sum_{w,n}\frac{\varphi(w|n)}{w!n!}\,x^w y^n\Big)^r\,,$$

ossia

$$\sum_{w,n}\frac{f(w|n)}{w!n!}\,x^w y^n=e^y\left\{e^{\sum_{w,n}\frac{\varphi(w|n)}{w!n!}x^w y^n}-1\right\}.$$

Di qui ricaviamo

$$\sum_{w,n}\frac{\varphi(w|n)}{w!n!}\,x^w y^n=\log\Big[\,1+e^{-y}\sum_{w,n}\frac{f(w|n)}{w!n!}\,x^w y^n\Big],$$

e, sviluppando il logaritmo del secondo membro e ordinando secondo le potenze di x ed y, si ottiene per $\varphi(w|n)$ la espressione, che è data nella formu la (5) del par.4.

Num. 3; § 4.

Per dimostrare l'identità in discorso si sviluppi ciascun termine dell'equazione identica

$$(e^{x_1 u}-1)(e^{x_2 u}-1)\dots(e^{x_r u}-1)=e^{su}-\sum_i e^{(s-x_i)u}+\sum_{i,k} e^{(s-x_i-x_k)u}-\dots$$

secondo le potenze ascendenti di u e si eguaglino i coefficienti di u^W di sinistra a quelli di destra.

Num. 4; § 6.

Si indichi con σ_0 l'espressione

$$r+k_{\alpha_1}+\dots+k_{\alpha_\lambda}+\lambda-1$$

e con τ_0 la espressione

$$s+k_{\beta_1}+\dots+k_{\beta_\mu}+\mu-1.$$

Allora σ non può essere minore di σ_0, perchè altrimenti esisterebbe una superficie Riemanniana connessa di genere negativo, corrispondentemente alla prima delle equazioni (5). E' quindi $\sigma\geq\sigma_0$. Parimente si ha $\tau\geq\tau_0$.

Ora, poichè $\sigma+\tau=\sigma_0+\tau_0$, deve necessariamente essere $\sigma=\sigma_0$ e $\tau=\tau_0$.

Num. 5; § 6.

La dimostrazione da darsi qui esige una serie di lemmi che qui premetto.

I. "Se f indica una funzione simmetrica delle ϱ variabili $x_1,x_2,\dots,x_\varrho$, e se le derivate $\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_\varrho}$ sono dipendenti soltanto dalla somma $x_1+x_2+\dots+x_\varrho$, anche la stessa f è funzione di $x_1+x_2+\dots+x_\varrho$".

Per l'ipotesi si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=g_1(s),\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=g_2(s),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_\rho}=g_\rho(s),$$

dove è $s=x_1+x_2+\ldots+x_\rho$. Ora, siccome è

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\qquad (i=1,2,\ldots,\rho)$$

e quindi

$$g'_1(s)=g'_i(s),$$

così $g_i(s)$ differisce da $g_1(s)$ soltanto per una costante additiva, cioè si ha

$$g_2(s)=g_1(s)+c_2,\quad g_3(s)=g_1(s)+c_3,\ldots,g_\rho(s)=g_1(s)+c_\rho.$$

Le derivate parziali della funzione f sono perciò le stesse che le derivate parziali della funzione

$$\int g_1(s)ds+c_2x_2+\ldots+c_\rho w_\rho+c,$$

epperò ha da essere

$$f=\int g_1(s)ds+c_2x_2+c_3x_3+\ldots+c_\rho x_\rho+c$$

dove c indica una costante. Ora, la funzione f è, per ipotesi, simmetrica rispetto ad x_1, $x_2,\ldots,x_\rho$: perciò deve essere $c_2=c_3=\ldots=c_\rho=0$, e quindi dev'essere f una funzione di $s=x_1+x_2+\ldots+x_\rho$.

II. Si separino le ρ variabili $x_1,x_2,\ldots,x_\rho$ in tutti i modi possibili in due gruppi $x_{\alpha_1},x_{\alpha_2},\ldots,x_{\alpha_\lambda}$ ed $x_{\beta_1},x_{\beta_2},\ldots,x_{\beta_\mu}$, ammettendo anche la separazione, in cui un gruppo contenga tutte le variabili e l'altro nessuna. Per esempio, nei casi di $\rho=1$ e $\rho=2$, le separazioni sono le seguenti:

I° gruppo	II° gruppo	I° gruppo	II° gruppo
nessuna variabile	x_1	nessuna variabile	x_1, x_2
x_1	nessuna variabile	x_1	x_2
		x_2	x_1
		x_1 , x_2	nessuna variabile

Consideriamo ora la somma

(1)
$$\psi_{a,b}(u,v|\,x_1,x_2,\dots,x_\varrho)=\sum(u+x_{\alpha_1}+\dots+x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-a}(v+x_{\beta_1}+\dots+x_{\beta_\mu})^{\mu-b},$$

dove la sommatoria è da estendersi a tutte le separazioni delle variabili x_1, $x_2,\dots,x_\varrho$ in due gruppi e dove u, v, a, b indicano pure delle variabili. Evidentemente è

$$\psi_{a,b}(u,v|\,x_1,x_2,\dots,x_\varrho)=$$
$$=\sum(u+x_{\alpha_1}+\dots+x_{\alpha_\lambda})(u+x_{\alpha_1}+\dots+x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-a-1}(v+x_{\beta_1}+\dots+x_{\beta_\mu})^{\mu-b}$$
$$=u\sum(u+x_{\alpha_1}+\dots+x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-a-1}(v+x_{\beta_1}+\dots+x_{\beta_\mu})^{\mu-b}$$
$$+\sum x_{\alpha_1}(u+x_{\alpha_1}+\dots+x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-a-1}(v+x_{\beta_1}+\dots+x_{\beta_\mu})^{\mu-b}$$
$$+\;.$$
$$+\sum x_{\alpha_\lambda}(u+x_{\alpha_1}+\dots+x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-a-1}(v+x_{\beta_1}+\dots+x_{\beta_\mu})^{\mu-b}.$$

Se ora si raccolgono nelle ultime somme quei termini che posseggono come fattore una determinata delle variabili x_1, $x_2,\dots,$ x_ϱ, ad esempio la variabile x_i, si ottiene

$$x_i\sum(u+x_i+x_{\alpha_2}+\dots+x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-a-1}(v+x_{\beta_1}+\dots+x_{\beta_\mu})^{\mu-b},$$

dove la sommatoria è da estendersi a tutte le separazioni delle $\rho-1$ variabili

$$x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_\rho$$

in due gruppi $x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_\lambda}$ ed $x_{\beta_1}, \dots, x_{\beta_\mu}$. L'insieme dei termini moltiplicati per x_i risulta così

$$x_i \psi_{a,b}(u+x_i, v \mid x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_\rho)$$

ed otteniamo quindi la equazione

$$(2)\quad \psi_{a,b}(u,v \mid x_1, x_2, \dots, x_\rho) = u.\psi_{a+1,b}(u,v \mid x_1, x_2, \dots, x_\rho) + \sum_{i=1}^{\rho} x_i \psi_{a,b}(u+x_i, v \mid x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_\rho).$$

In modo analogo si ha l'equazione

$$(3)\quad \psi_{a,b}(u,v \mid x_1, x_2, \dots, x_\rho) = v.\psi_{a+1,b}(u,v \mid x_1, x_2, \dots, x_\rho) + \sum_{i=1}^{\rho} x_i \psi_{a,b}(u, v+x_i \mid x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_\rho).$$

III. Dimostriamo adesso il seguente teorema: "La somma

$$(4)\quad \psi_{1,1}(u,v \mid x_1, x_2, \dots, x_\rho) = \sum (u+x_{\alpha_1}+\dots+x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-1} (v+x_{\beta_1}+\dots+x_{\beta_\mu})^{\mu-1},$$

considerata come funzione delle variabili $x_1, x_2, \dots, x_\rho$, dipende soltanto dalla somma $x_1+x_2+\dots+x_\rho$".

La somma (4) si può indicare, per brevità, con $F(x_1, x_2, \dots, x_\rho)$. Allora si ha:

$$\frac{\partial F(x_1, x_2, \dots, x_\rho)}{\partial x_1} =$$

$$= \sum (\lambda-1) u+x_{\alpha_1}+x_{\alpha_2}+\dots+x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-2} (v+x_{\beta_1}+\dots+x_{\beta_\mu})^{\mu-1}$$

$$= \sum (\mu-1)(u+x_{\alpha_1}+\dots+x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-1} (v+x_1+x_{\beta_2}+\dots+x_{\beta_\mu})^{\mu-2}.$$

Ma la medesima espressione si ottiene per la somma

$$F(x_2+x_1,x_3,\dots,x_\rho)+F(x_2,x_3+x_1,\dots,x_\rho)+\dots+$$
$$+\dots+F(x_2,x_3,\dots,x_\rho+x_1)$$

quando si introduca per ciascuna delle funzioni F la propria espressione sommatoria (4). Sussiste perciò la equazione

$$(5)\quad \frac{\partial F(x_1,\dots,x_\rho)}{\partial x_1} =$$
$$=F(x_2+x_1,x_3, \quad ,x_\rho)+F(x_2,x_3+x_1,\dots,x_\rho)+ \quad +F(x_2,x_3,\dots,x_\rho+x_1)$$

ed equazioni consimili valgono evidentemente per le derivate di $F(x_1,\dots,x_\rho)$ prese rispetto alle $x_2,x_3,\dots,x_\rho$. Ora, queste equazioni mostrano che le derivate di $F(x_1,\dots,x_\rho)$ dipendono soltanto da $x_1+x_2+\dots+x_\rho$, se noi supponiamo che ciò avvenga per il caso di $\rho-1$ variabili. Ora, poichè $F(x_1,x_2,\dots,x_\rho)$ è una funzione simmetrica di $x_1,x_2,\dots,x_\rho$, si riconosce in virtù del lemma I, che il nostro teorema vale per ρ variabili, supposta la sua validità per $\rho-1$ variabili. Ma il teorema è vero per il caso di $\rho=1$, e di conseguenza è vero in generale.

Il valore di una funzione di $x_1+x_2+\dots+x_\rho$ rimane inalterato se si pone $x_2=x_3=\dots=x_\rho=0$ ed $x_1+x_2+\dots+x_\rho$, in luogo di x_1. Applicando questa osservazione alla funzione (4) si ottiene

$$\psi_{1,1}(u,v|x_1,x_2,\dots,x_\rho)=\sum\binom{\rho-1}{\mu}(u+x_1+x_2+\dots+x_\rho)^{\lambda-1}\,v^{\mu-1}$$
$$+\sum\binom{\rho-1}{\lambda}u^{\lambda-1}(v+x_1+x_2+\dots+x_\rho)^{\mu-1},$$

e, per conseguenza,

$$\psi_{1,1}(u,v|x_1,x_2,\dots,x_\rho)=\frac{1}{v}(u+x_1+\dots+x_\rho+v)^{\rho-1}+\frac{1}{u}(v+x_1+\dots+$$
$$+\dots+x_\rho+u)^{\rho-1}.$$

Con ciò è dimostrata la seguente notevole identità:

$$(6)\quad \sum (u+x_{\alpha_1}+\ldots+x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-1}(v+x_{\beta_1}+\ldots+x_{\beta_\mu})^{\mu-1} = $$

$$=(u+v+x_1+x_2+\ldots+x_\rho)^{\rho-1}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)$$

Se in questa identità si pone $x_1=x_2=\ldots=x_\rho=1$, si ottiene

$$(7)\quad \sum \frac{\rho!}{\lambda!\,\mu!}(u+\lambda)^{\lambda-1}(v+\mu)^{\mu-1}=(u+v+\rho)^{\rho-1}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right),$$

dove, nel membro a sinistra è $\mu=\rho-\lambda$ e la sommatoria si estende a $\lambda=0,1,2,\ldots,$.

Se si portano a destra i termini della (7) corrispondenti a $\lambda=0$ ed a $\lambda=\rho$, e si pone quindi $u=v=0$, si ottiene:

$$(8)\qquad \sum_{\lambda=1}^{\rho-1}\frac{\lambda^{\lambda-1}}{\lambda!}\,\frac{\mu^{\mu-1}}{\mu!}=2(\rho-1)\cdot\frac{\rho^{\rho-2}}{\rho!}\,.$$

IV. Consideriamo ora inoltre la somma

$$(9)\quad \psi_{1,0}(u,v\,|\,x_1,x_2,\ldots,x_\rho)=\sum(u+x_{\alpha_1}+\ldots+x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-1}(v+x_{\beta_1}+\ldots+x_{\beta_\mu})^{\mu}$$

e dimostriamo che essa possiede il valore $(u+v+x_1+\ldots+x_\rho)^{\rho}\cdot\frac{1}{u}$, cosicchè sussista l'uguaglianza

$$(10)\quad \sum(u+x_{\alpha_1}+\ldots+x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-1}(v+x_{\beta_1}+\ldots+x_{\beta_\mu})^{\mu}=(u+v+x_1+\ldots+x_\rho)^{\rho}\cdot\frac{1}{u}$$

Se supponiamo come già dimostrata questa eguaglianza per il caso di $\rho-1$ variabili $x_1,x_2,\ldots,x_{\rho-1}$, dalla formola (3), scegliendo a=1, b=0 segue

$$\psi_{1,0}(u,v|x_1,x_2,\ldots,x_\rho)=$$

$$=v\cdot\psi_{1,1}(u,v|x_1,\ldots,x_\rho)+\sum x_i\psi_{1,0}(u,v+x_i,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_\rho)$$

$$=v(u+v+x_1+\ldots+x_\rho)^{\rho-1}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)+\sum x_i\,(u+v+x_i+x_1+\ldots+x_\rho)^{\rho-1}\cdot\frac{1}{u}$$

$$=(u+v+x_1+x_2+\ldots-x_\rho)^{\rho}\cdot\frac{1}{u}\,.$$

Dall'ipotesi che la eguaglianza (10) sia vera per $\rho-1$ variabili, segue dunque anche la sua vali= dità per ρ variabili. Ora, siccome per $\rho=1$ si ha

$$\psi_{1,0}(u,v|x_1)=u^{-1}\,(v+x_1)+(u+x_1)^{0}\,v^{0}=(u+v+x_1)\,.\,\frac{1}{u}\;,$$

così l'equazione (10) ha luogo per ogni valore di ρ.

Se in questa equazione si pongono $x_1=x_2=\ldots=x_\rho=1$ si ha

$$(11)\quad \sum_{\lambda=0}^{\rho}\frac{\rho!}{\lambda!\,\mu!}(u+\lambda)^{\lambda-1}\;(v+\mu)^{\mu}=(u+v+\rho)^{\rho}\cdot\frac{1}{u}\;,\quad(\mu=\rho-\lambda).$$

Se si portano dall'altra banda i termini del= la somma (11), che corrispondono a $\lambda=0$ ed a $\lambda=\rho$, e quindi si pone $v=0$, si trova

$$(12)\quad \sum_{\lambda=1}^{\rho-1}\frac{(u+\lambda)^{\lambda-1}}{\lambda\,!}\,\frac{\mu^{\mu}}{\mu!}=\frac{1}{\rho!}\left[\left((u+\rho)^{\rho}-\rho^{\rho}\right)\frac{1}{u}-(u+\rho)^{\rho-1}\right].$$

V. In virtù delle formole (2) e (3) si possono esprimere $\psi_{a+1,b}$ e $\psi_{a,b+1}$ mediante $\psi_{a,b}$. Colla repli cata applicazione di quelle formole si può perciò esprimere $\psi_{a,b}$ mediante $\psi_{1,1}$ quando a e b sono dei numeri interi positivi. Così, p.es., esprimendo $\psi_{2,2}$ mediante $\psi_{1,1}$, e ricavando dalla formola (6) il va= lore di $\psi_{1,1}$:

$$(13)\quad u.v\psi_{2,2}=u.v\sum(u+x_{\alpha_1}+\dots+x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-2}\;(v+x_{\beta_1}+\dots+x_{\beta_\mu})^{\mu-2}$$

$$=(u+v+x_1+\dots+x_\varrho)^{\varrho-2}\frac{(u+v)^2}{uv}-(u+v+x_1+\dots+x_\varrho)^{\varrho-3}\sum_{i=1}^{\varrho}x_i(u+v+x_i)\left[\frac{1}{u+x_i}+\frac{1}{v+x_i}\right]$$

VI. Le formole sviluppate ci permettono ora di mostrare che l'equazione (8) del par.6 della Parte Prima della memoria si muta in una identità, se per $f(k_1,k_2,\dots,k_\varrho)$ introduciamo l'espressione (9) immediatamente successiva. Con questa introduzione, l'equazione (8) divisa per

$$(n+\varrho-3)!\frac{k_1^{k_1+1}}{k_1!}\quad\frac{k_\varrho^{k_\varrho+1}}{k_\varrho!}$$

si trasforma nella seguente:

$$(14)\quad n^{\varrho-3}\,(n+\varrho-2)=n^{\varrho-4}\sum\frac{(k_1+k_2)^{k_1+k_2+1}}{(k_1+k_2)\,!}\;\frac{k_1!}{k_1^{k_1}}\cdot\frac{k_2!}{k_2^{k_2}}$$

$$+\sum\frac{1}{2}\,\frac{k_1!}{k_1^{k_1}}\;\sum_{r=1}^{k_1-1}\psi_r(k_1\,|\,k_2,\dots,k_\varrho),$$

dove il significato di $\psi_r(k_1\,|\,k_2,\dots,k_\varrho)$ è evidentemente espresso da

(15)

$$\psi_r(k_1\,|\,k_2,\dots,k_\varrho)=\frac{r^{r+1}\;s^{s+1}}{r\,!\;s\,!}\sum(r+k_{\alpha_1}+\dots+k_{\alpha_\lambda})^{\lambda-2}\;(s+k_{\beta_1}+\dots+k_{\beta_\mu})^{\mu-2}.$$

La sommazione è estesa a tutte le separazioni di $k_2,\dots,k_\varrho$ in due gruppi $k_{\alpha_1},\dots,k_{\alpha_\lambda}$ e $k_{\beta_1},\dots,k_{\beta_\mu}$ ed è $s=k_1-r$.

Secondo la formola (13) è ora (poichè $r+s+k_2+\dots+k\;=k_1+k_2+\dots+k_\varrho=n$).

(16) $\psi_r(k_1|k_2,\ldots,k_\ell)=$

$$= \frac{r^{r-1}\,s^{s-1}}{r!\,s!}\cdot n^{\ell-3}\,k_1^{\,2} - n^{\ell-4}\sum_{i=2}^{\ell} k_i\,(k_1+k_i)\frac{r^r s^s}{r!\,s!}\left(\frac{1}{r+k_i}+\frac{1}{s+k_i}\right).$$

Se si considera la formola (8) e si nota che

$$\sum_{r=1}^{k_1-1}\frac{r^r s^s}{r!\,s!}\,\frac{1}{r+k_i} = \sum_{r=1}^{k_1-1}\frac{r^r s^s}{r!\,s!}\,\frac{1}{s+k_i}\ ,$$

si ottiene oramai

(17) $\sum_{r=1}^{k_1-1}\psi_r(k_1|k_2,\ldots,k_\ell)=$

$$=2(k_1-1)\frac{k_1^{\,k_1-2}}{k_1!}n^{\ell-3} - 2n^{\ell-4}\sum_{i=2}^{\ell} k_i\,(k_1+k_i)\sum_{r=1}^{k_1-1}\frac{r^r s^s}{r!\,s!}\,\frac{1}{r+k_i}\ .$$

Se introduciamo questo valore nella (14) e di= vidiamo l'equazione risultante per $n^{\ell-4}$, risulta

(18) $n(n+\varrho-2)=$

$$=\sum\frac{(k_1+k_2)^{k_1+k_2+1}}{(k_1+k_2)!}\ \frac{k_1!}{k_1^{\,k_1}}\ \frac{k_2!}{k_2^{\,k_2}} + n\left[(k_1-1)+(k_2-1)+\ldots+(k_\ell-1)\right]$$

$$-\sum\varphi(k_1,k_2),$$

dove, per brevità, si è posto

(19) $\varphi(k_1,k_2)=\dfrac{k_1!}{k_1^{\,k_1}}\,k_2(k_1+k_2)$

$$\sum_{r=1}^{k_1-1}\frac{r^r s^s}{r!\,s!}\,\frac{1}{r+k_2} + \frac{k_2!}{k_2^{\,k_2}}k_1(k_2+k_1)\sum_{r=1}^{k_2-1}\frac{r^r s^s}{r!\,s!}\,\frac{1}{r+k_1}\ .$$

Nella prima somma è $s=k_1-r$, nella seconda e $s=k_2-r$. Le sommatorie della equazione (18) si esten dono a tutte le combinazioni e due a due dei nume= ri $k_1,k_2,\ldots,k_\varrho$.

Ora si possono esprimere le somme entranti nella (19) come derivate. E', per es., la prima somma come facilmente si riconosce, eguale a

$$\frac{d^{k_2-1}}{du^{k_2-1}}\left[\sum_{r=1}^{k_1+k_2-1}\frac{(u+r)^{r-1}}{r\,!}\frac{s^s}{s!}-\frac{(u+k_2)^{k_2-1}}{k_2\,!}\frac{k_1^{\,k_1}}{k_1!}\right],(s=k_1+k_2-r),$$

dove, dopo aver eseguita la derivazione, è da porre $u=-k_2$.

La somma chiusa in parentesi quadre è, secondo la formola (12), eguale a

$$\frac{(u+k_1+k_2)^{k_1+k_2}-(k_1+k_2)^{k_1+k_2}}{(k_1+k_2)!}\frac{1}{u}-\frac{(u+k_1+k_2)^{k_1+k_2-1}}{(k_1+k_2)!}.$$

Se si sostituisce questo valore, e quindi si effettua le derivazione, osservando che è

$$\frac{d^n}{du^n}\left[v\cdot\frac{1}{u}\right]=n!\sum_{r=1}^{n+1}\frac{(-1)^{r+1}}{(n+1-r)!}v^{(n+1-r)}\cdot\frac{1}{u^r},$$

si ottiene

$$(k_2-1)!\sum_{r=1}^{k_2}\frac{(-1)^{r+1}}{(k_2-r)!}\frac{(u+k_1+k_2)^{k_1+r}}{(k_1+r)!}\cdot\frac{1}{u^r}+(-1)^{k_2}(k_2-1)!$$
$$\frac{(k_1+k_2)^{k_1+k_2}}{(k_1+k_2)!}\frac{1}{u^{k_2}}-\frac{(u+k_1+k_2)^{k_1}}{(k_1+k_2)k_1!}-\frac{1}{k_2}\frac{k_1^{\,k_1}}{k_1!}$$

e ponendo qui dentro $u=-k_2$

$$\sum_{r=1}^{k_1-1}\frac{r^r s^s}{r!s!}\frac{1}{r+k_2}=-\frac{(k_2-1)!}{k_2^{\,k_2}}\sum_{r=1}^{k_2}\frac{k_1^{\,k_1+r}k_2^{\,k_2-r}}{(k_1+r)!(k_2-r)}+$$
$$+(k_2-1)!\frac{(k_1+k_2)^{k_1+k_2}}{(k_1+k_2)!}\frac{1}{k_2^{\,k_2}}-\frac{k_1^{\,k_1}}{(k_1+k_2)k_1!}-\frac{1}{k_2}\cdot\frac{k_1^{\,k_1}}{k_1!}.$$

Il valore della somma $\sum_{r=1}^{k_2-1} \frac{r^r s^s}{r!s!} \frac{1}{r+k_1}$ nasce di qui collo scambio di k_1 e k_2. Sostituendo questi valori nella (19), risulta

$$(20)\quad \varphi(k_1,k_2)=-\frac{k_1!}{k_1^{k_1}}\frac{k_2!}{k_2^{k_2}}(k_1+k_2)\left\{\sum_{r=1}^{k_2}\frac{k_1^{k_1+r}k_2^{k_2-r}}{(k_1+r)!(k_2-r)!}+\sum_{r=1}^{k_1}\frac{k_1^{k_1-r}k_2^{k_2+r}}{(k_1-r)!(k_2+r)!}\right\}+2\frac{k_1!k_2!}{k_1^{k_1}k_2^{k_2}}\frac{(k_1+k_2)^{k_1+k_2+1}}{(k_1+k_2)!}-$$
$$-k_2-k_1-2(k_1+k_2).$$

Siccome ora è

$$\sum_{r=1}^{k_2}\frac{k_1^{k_1+r}k_2^{k_2-r}}{(k_1+r)!(k_2-r)!}+\sum_{r=1}^{k_1}\frac{k_1^{k_1-r}k_2^{k_2+r}}{(k_1-r)!(k_2+r)!}=$$
$$=\frac{(k_1+k_2)^{k_1+k_2}}{(k_1+k_2)!}-\frac{k_1^{k_1}k_2^{k_2}}{k_1!k_2!},$$

così si ha

$$(21)\quad \varphi(k_1,k_2)=\frac{k_1!k_2!}{k_1^{k_1}k_2^{k_2}}\frac{(k_1+k_2)^{k_1+k_2+1}}{(k_1+k_2)!}-2(k_1+k_2).$$

Se finalmente si pone questo valore di $\varphi(k_1,k_2)$ nell'equazione (18), si riduce la medesima, come subito si riconosce ad una identità. Perciò l'equazione (14) è anche un'identità, il che era da dimostrare.