A GUIDO CASTELNUOVO

COLLEGHI · DISCEPOLI
AMMIRATORI

XXVIII MAGGIO MCMXXXV · XIII

GUIDO CASTELNUOVO

MEMORIE SCELTE

SCUOLA

LABORAVI FIDENTER

NICOLA ZANICHELLI EDITORE
BOLOGNA - 1937-XV

II

RICERCHE DI GEOMETRIA SULLE CURVE ALGEBRICHE

(*Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXIV,* 10 febbraio 1889).

La *Geometria sulle curve* non ebbe tanti cultori quanti l'interesse dell'argomento avrebbe meritato, nemmeno dopo il lavoro dei signori Brill e Nöther (*) che contiene risultati così notevoli. La causa di ciò sta forse nelle artificiose dimostrazioni che si diedero alle proposizioni fondamentali della teoria. Crediamo quindi utile di indicare un'altra via a ricerche di tal natura.

In questo lavoro noi non adoperiamo il *Restsatz*, nè ci limitiamo a considerare serie di gruppi di punti segate su curve piane da curve aggiunte. Ma consideriamo le curve in generale senza limitare le dimensioni degli spazi che le contengono, e seghiamo le serie mediante spazi di forme fondamentali. Così otteniamo maggiore semplicità e simmetria.

I vantaggi di questo metodo si presentano evidenti trattando una questione finora insoluta (nel caso generale), alla quale è dedicata l'ultima parte del nostro lavoro: *assegnare il massimo genere di una curva che debba contenere una data serie di gruppi di punti ;* o in altre parole assegnare il massimo genere di una curva di dato ordine appartenente ad uno spazio a r dimensioni. La risoluzione del problema, servendosi di curve aggiunte, offrirebbe forse non poche difficoltà.

Involuzioni razionali sulle curve.

1. — Le definizioni che comunemente si dànno nella *Geometria sulle curve*, sono seguìte anche in questo lavoro. Con $g_n^{(r)}$ indicheremo

(*) *Ueber die algebraischen Functionen ;* Math. Ann. 7

una serie di gruppi di n punti, r volte infinita, giacente sopra una curva algebrica; una serie *d'ordine* n, *ad* r *dimensioni*. Ed anzi, poichè solo di queste serie dovremo occuparci, intenderemo che $g_n^{(r)}$ sia *involutoria* e *razionale* [*serie lineare*], cioè che r punti della curva sostegno *individuino* un gruppo della serie, e che i gruppi di $g_n^{(r)}$ possano riferirsi univocamente ai punti dello spazio S_r ad r dimensioni. Questa corrispondenza sia di tal natura che ai punti di uno spazio S_q ($q = 0, 1 \ldots r-1$) di S_r corrispondano gruppi di una $g_n^{(q)}$ di $g_n^{(r)}$; diremo che la $g_n^{(q)}$ giace in $g_n^{(r)}$, è un elemento di $g_n^{(r)}$.

Dalle proprietà degli spazi lineari segue:

$k+1$ gruppi di una $g_n^{(r)}$ individuano una $g_n^{(k)}$ elemento di $g_n^{(r)}$, se quei gruppi non appartengono ad una serie di molteplicità inferiore a k (se quei gruppi sono *indipendenti*). Se i $k+1$ gruppi hanno alcuni punti comuni, questi punti si trovano in ogni gruppo di $g_n^{(k)}$.

Due serie $g_n^{(p)}$, $g_n^{(q)}$ giacenti in una stessa $g_n^{(r)}$, hanno in generale una $g_n^{(p+q-r)}$ comune, se $p+q-r \geq 0$.

I gruppi di una $g_n^{(r)}$ insieme con k punti fissi della curva dànno gruppi di una $g_{n+k}^{(r)}$.

2. — Nel seguito considereremo soltanto involuzioni *semplici*; supporremo cioè che i gruppi della $g_n^{(r)}$ che passano per $i\ (< r)$ punti arbitrari della curva, non abbiano altri punti comuni. Per tali involuzioni valgono i teoremi:

Se sopra una curva C esiste una $g_n^{(r)}$ $(r > 1)$, nello spazio ad r dimensioni S_r si può costruire una curva C' d'ordine n riferita univocamente a C; la involuzione di C' corrispondente a $g_n^{(r)}$ è segata dagli spazi S_{r-1} di S_r (*).

In ogni gruppo di una involuzione $g_n^{(r)}$ si trovano r punti, che non giacciono in nessun altro gruppo dell'involuzione (punti *indipendenti* per quella $g_n^{(r)}$).

I gruppi di $n-\varrho$ punti che insieme a ϱ punti fissi indipendenti dànno gruppi di una $g_n^{(r)}$, appartengono ad una $g_{n-\varrho}^{(r-\varrho)}$, complementare [*residua*] a quei ϱ punti.

3. — Un gruppo di m punti G_m dicesi *contenuto* in una $g_n^{(r)}$ ($r < m \leqq n$), quando questi m punti si trovano in uno stesso gruppo di $g_n^{(r)}$. E si dice che una $g_m^{(q)}$ è *contenuta* nella $g_n^{(r)}$ ($q < r < m$, $m \leqq n$), quando tutti i gruppi della prima serie sono contenuti nella seconda.

(*) V. per la dimostrazione il nostro lavoro I: *Geometria sulle curve ellittiche* (Atti dell'Acc. di Torino, vol. **XXIV**).

4. — Sopra una curva C giacciano due serie $g_m^{(1)}$, $g_n^{(1)}$, e queste abbiano in comune α_2 coppie di punti, α_3 terne di punti, ... α_r gruppi G_r di r punti.

Se si riferiscono i gruppi delle due serie $g_m^{(1)}$, $g_n^{(1)}$ proiettivamente a due fasci di raggi M, N giacenti in un piano, ad ogni punto P di C si potrà far corrispondere nel piano il punto Q comune ai due raggi di M, N che rappresentano i gruppi delle due serie determinati da P. Fra i fasci M, N in tal guisa si stabilisce una corrispondenza (m, n); e quindi il luogo del punto Q è una curva d'ordine $m+n$, che ha il centro del primo fascio multiplo secondo n, il centro del secondo multiplo secondo m, ed ha inoltre α_2 punti doppi, α_3 tripli, ... α_r r.upli. Questa curva è di genere

$$p = (m-1)(n-1) - \sum_{i=2}^{i=r} \alpha_i \frac{i(i-1)}{2},$$

ed è riferita univocamente a C. Da ciò:

Una curva la quale contenga due serie $g_m^{(1)}, g_n^{(1)}$ aventi in comune α_i gruppi G_i ($i = 2, 3 \ldots r$) è di genere

$$p = (m-1)(n-1) - \sum_{i=2}^{i=r} \alpha_i \frac{i(i-1)}{2},$$

e può sempre riferirsi univocamente ad una (certa) curva piana d'ordine $m+n$, con un punto m.uplo, un punto n.uplo ed α_i punti multipli secondo i.

In particolare se una curva contiene una $g_m^{(1)}$, si può sempre costruire una curva piana riferita univocamente alla data, che sia d'ordine $m+k$ ed abbia un punto multiplo secondo k (per k abbastanza grande), per modo che su questa curva la $g_m^{(1)}$ sia segata dalle rette uscenti dal punto k.uplo.

5. — *Due serie $g_n^{(q)}$, $g_n^{(r)}$, le quali giacciano sopra una stessa curva, ed abbiano una $g_n^{(t)}$ comune, sono contenute in una stessa serie $g_n^{(q+r-t)}$, ($t < q, r$).*

Sia anzitutto $q = r = 1$, $t = 0$, cioè si tratti di due $g_n^{(1)}$ con un gruppo G_n comune.

La curva proposta può riferirsi univocamente ad una curva piana d'ordine $2n$ con tre punti n. upli; le rette uscenti da due di questi segano sulla curva le due $g_n^{(1)}$. Ora le coniche che passano per i tre punti n. upli determinano sulla curva una $g_n^{(2)}$, nella quale sono contenute le due $g_n^{(1)}$.

Sia poi $q = 1$, $r > 1$, $t = 0$; si riferisca univocamente la curva proposta ad una curva C^n d'ordine n dello spazio S_r, nel modo indicato dal n° 2. Scelta in uno spazio S_{r+2} che contenga S_r una retta arbitraria g, che non seghi S_r, si riferiscano univocamente i punti di g ai gruppi della serie data $g_n^{(1)}$, e si congiunga ciascun punto di g agli n punti che gli corrispondono su C^n. Si otterrà così una rigata d'ordine $2n$ di S_{r+2}, alla quale appartengono quegli n raggi che proiettano i punti del gruppo G_n comune a $g_n^{(1)}$, $g_n^{(r)}$ dal punto di g corrispondente a G_n. Ora G_n giace in un S_{r-1}; e quindi gli n raggi proiettanti stanno in uno spazio ad r dimensioni, che non contiene g. Uno spazio S_{r+1} passante per questo, ma non per g, sega la rigata negli n raggi, e inoltre in una curva d'ordine n, la quale *appartiene* a S_{r+1}, ed è segata dagli S_r di S_{r+1} in una $g_n^{(r+1)}$, che contiene $g_n^{(1)}$ e $g_n^{(r)}$.

Per giungere al caso generale basta applicare più volte i due casi particolari considerati.

Se r è la massima dimensione di una serie d'ordine n sopra una curva, la $g_n^{(r)}$ è individuata da uno dei suoi gruppi.

6. — Dal § 4 segue pure che due $g_n^{(1)}$ distinte non possono avere due gruppi di n punti comuni ($n > 1$); e se hanno in comune un gruppo G_n e un G_{n-1}, la curva sostegno è razionale.

Quindi: *Se in una curva non razionale una $g_n^{(r)}$ contiene una $g_{n-1}^{(Q)}$, quest'ultima serie ha per complemento un punto determinato in $g_n^{(r)}$.* Infatti due gruppi arbitrari G_{n-1}, G'_{n-1} di $g_{n-1}^{(Q)}$ con due punti M, M' diano due grupi G_n, G'_n di $g_n^{(r)}$. Se M ed M' non coincidessero la $g_n^{(1)}$ determinata da G_n, G'_n e l'altra $g_n^{(1)}$ determinata da M coi gruppi della

$$g_{n-1}^{(1)} \equiv (G_{n-1},\ G'_{n-1}),$$

avrebbero un gruppo di n punti, e un gruppo di $n-1$ punti comuni.

Due serie $g_n^{(q)}$, $g_n^{(r)}$ giacenti sopra una stessa curva, le quali abbiano una $g_{n-1}^{(t)}$ comune, hanno per complementi due punti determinati in una stessa $g_{n+1}^{(q+r-t)}$.

Siano Q, R i complementi di $g_{n-1}^{(t)}$ in $g_n^{(q)}$, $g_n^{(r)}$ rispettivamente. Le due serie $g_{n+1}^{(q)}$, $g_{n+1}^{(r)}$ costituite da $g_n^{(q)}$ ed R, da $g_n^{(r)}$ e Q hanno in comune la $g_{n+1}^{(t)}$ costituita da $g_{n-1}^{(t)}$ con Q ed R; quelle due serie quindi giacciono in una stessa $g_{n+1}^{(q+r-t)}$. Si suppone che la curva sostegno non sia razionale, nel qual caso questo teorema diventa superfluo.

Se sopra una curva giace una $g_n^{(r)}$, ma non una $g_{n+1}^{(r+1)}$, ogni $g_n^{(1)}$ della curva o è contenuta nella $g_n^{(r)}$ o non ha con questa nessun gruppo G_{n-1} comune.

7. — *Punti multipli.* — *Una serie $g_n^{(r)}$ sopra una curva di genere p contiene in generale*

$$(1) \qquad (r+1)(n+rp-r)$$

gruppi con un punto multiplo secondo $r+1$.

Sia anzitutto $r = 1$, e la serie $g_n^{(1)}$ sia segata sopra una curva piana C_p^{n+k} d'ordine $n+k$ e genere p con un punto O multiplo secondo k, dalle rette uscenti da O (n. 4). Il numero richiesto è il numero delle tangenti a C_p^{n+k} che passano per O. Ora se i rimanenti punti multipli della curva equivalgono (per il genere e per la classe) a δ punti doppi, quel numero è

$$(n+k)(n+k-1) - k(k+1) - 2\delta = 2(n+p-1),$$

come dà la (1).

Sia poi $r > 1$; si chiede quanti siano gli spazi S_{r-1} iperosculatori a una curva C_p^n d'ordine n e genere p di S_r (n. 2). Ora questo numero è il numero i dei flessi della curva $C_p^{n'}$ sezione piana degli spazi S_{r-2} osculatori a C_p^n (*). Ma di $C_p^{n'}$ possiamo calcolare l'ordine n', il numero delle cuspidi χ, e la classe μ, se ammettiamo che la formola (1) valga per le serie di molteplicità inferiori ad r.

Perchè n' è il numero degli S_{r-1} che passano per una retta ed hanno un contatto $(r-1)$. punto con C_p^n, cioè

$$n' = (r-1)\{n + (r-2)(p-1)\};$$

e χ è il numero degli S_{r-1} che passano per un piano ed hanno un contatto $(r-2)$. punto con C_p^n,

$$\chi = (r-2\{n + (r-3)(p-1)\}.$$

Finalmente μ è il numero degli S_{r-1} che passano per un punto, ed hanno un contatto r. punto con C_p^n:

$$\mu = r\{n + (r-1)(p-1)\}.$$

Potremo quindi calcolare il numero dei flessi i di $C_p^{n'}$, mediante la formola

$$i = \chi + 3(\mu - n'),$$

che nel nostro caso dà

$$i = (r+1)(n+rp-r);$$

questo risultato coincide colla (1).

(*) VERONESE, *Behandlung der projectivischen Verhältnisse*; Math. Ann. 19.

8. — Una ricerca fondamentale per noi è la seguente: Quanti gruppi di $r+1$ punti sono comuni a due serie $g_m^{(1)}$, $g_n^{(r)}$ giacenti sopra una stessa curva di genere p? si suppone che sia $m > r$, e che l'involuzione $g_m^{(1)}$ non sia contenuta nella $g_n^{(r)}$.

La questione fu già risolta per $r = 1$; se infatti indichiamo con δ il numero delle coppie di punti G_2 comuni alle serie $g_m^{(1)}$, $g_n^{(1)}$ (quando ogni G_i comune si calcoli equivalente a $\binom{i}{2} G_2$), si ha (n. 4)

$$p = (m-1)(n-1) - \delta ,$$

ossia

$$\delta = (m-1)(n-1) - p .$$

Dico che, in generale,

Due serie $g_m^{(1)}$, $g_n^{(r)}$ giacenti sopra una stessa curva di genere p, hanno

$$\binom{m-1}{r}(n-r) - \binom{m-2}{r-1} p \tag{2}$$

gruppi di $r+1$ punti comuni.

Supponiamo che la (2) valga per le serie di dimensione inferiore ad r; allora se indichiamo con α_i il numero dei gruppi di i punti comuni alla $g_m^{(1)}$ e ad una serie d'ordine $n - r + (i-1)$ e di molteplicità $(i-1)$, sarà

$$\alpha_i = \binom{m-1}{i-1}(n-r) - \binom{m-2}{i-2} p \qquad (i \leqq r).$$

Sia γ_i il numero di quei gruppi di i punti che sono contenuti in $g_m^{(1)}$, e che, quando uno dei loro elementi si conti $r + 2 - i$ volte, giacciono nella $g_n^{(r)}$; il numero che ci proponiamo di determinare sarà dato da γ_{r+1}.

Finalmente sia δ_i il numero dei punti multipli secondo $(r - i + 1)$ di una involuzione d'ordine $n - i$ e molteplicità $r - i$ sulla curva;

$$\delta_i = (r - i + 1)\{ n - r + (r - i) p \}.$$

Supponiamo per semplicità che la curva data di genere p sia una curva piana d'ordine $m + k$ con un punto O multiplo secondo k (n. 4), per modo che la $g_m^{(1)}$ sia segata dalle rette uscenti da O.

È facile stabilire una relazione fra γ_i e γ_{i+1}. Infatti nel fascio O si fissi una corrispondenza, assumendo come omologhi due raggi a_i, b_i, quando uno di essi b_i passi per un punto multiplo secondo $(r - i + 1)$ di un gruppo di $g_n^{(r)}$ avente i punti sul raggio a_i. Ad ogni raggio a_i corrispondono $\binom{m}{i}\delta_i$ raggi b_i; e ad ogni raggio b_i corrispondono $m\alpha_i$ raggi a_i. Il numero dei raggi c_i, nei quali coincidono due raggi omologhi a_i, b_i, è adunque

$$\binom{m}{i}\delta_i + m\,\alpha_i .$$

D'altra parte un raggio c_i, o contiene un gruppo G_i di i punti che, quando uno dei suoi punti si conti $(r - i + 2)$ volte, giace in $g_n^{(r)}$, oppure contiene un gruppo G_{i+1} di $i+1$ punti che, quando uno dei suoi punti si conti $(r - i + 1)$ volte, giace in $g_n^{(r)}$. Sicchè

$$\gamma_i + \gamma_{i+1} = \binom{m}{i}\delta_i + m\,\alpha_i .$$

Questa uguaglianza vale per $i = 1, 2 \ldots r-1$, vale pure per $i = 0$, se si pone $\alpha_0 = 0$, e per $i = r$, quando al posto di γ_{r+1} si scriva $(r+1)\gamma_{r+1}$, perchè un raggio c_r contenente un gruppo G_{r+1} comune a $g_m^{(1)}$, $g_n^{(r)}$, assorbe $(r+1)$ coincidenze di a_r con b_r.

Attribuendo ad i i valori successivi $r, r-1, \ldots 1, 0$, mutando segno a tutte le uguaglianze di posto pari e poi sommando, si ottiene

$$(r+1)\gamma_{r+1} = \sum_0^r {}_i (-1)^{r-i} \left\{ \binom{m}{i}\delta_i + m\,\alpha_i \right\}.$$

Se al posto delle δ e delle α si sostituiscono le loro espressioni, e poi si eseguiscono le riduzioni, si arriva alla formola

$$(r+1)\gamma_{r+1} = (n-r)\left\{ \binom{m-2}{r} + m\binom{m-2}{r-1} \right\}$$
$$- p \left\{ 2\binom{m-3}{r-1} + m\binom{m-3}{r-2} \right\},$$

ossia

$$\gamma_{r+1} = \binom{m-1}{r}(n-r) - \binom{m-2}{r-1} p ,$$

che è precisamente la (2). Ma abbiamo dimostrato che la (2) vale per $r = 1$; quindi essa vale per ogni valore di r (*).

(*) La (2) è caso particolare della formola

$$\sum_0^q {}_i (-1)^i \binom{m-q-i}{r-i}\binom{n-r-i}{q-i}\binom{p}{i},$$

che dà il numero dei gruppi G_{q+r} comuni a due serie $g_m^{(q)}$, $g_n^{(r)}$ sopra una curva di genere p. Per la dimostrazione v. la nota III: *Una applicazione della Geometria enumerativa* (Rend. del Circolo Matematico di Palermo, 1889).

9. — Se si riflette al ragionamento ora fatto, si riconosce che quando non vi sono infiniti gruppi G_{r+1} comuni alle serie $g_m^{(1)}$, $g_n^{(r)}$, il numero α_{r+1} dato dalla (2) deve risultare positivo o almeno nullo. Ora la (2) assume un valore negativo se è

$$p > \frac{m-1}{r}(n-r),$$

da ciò il teorema:

Se sopra una curva di genere p giacciono due serie $g_m^{(1)}$, $g_n^{(r)}$ ed è

$$p > \frac{m-1}{r}(n-r),$$

le due serie hanno infiniti gruppi G_{r+1} comuni.

Da questa proprietà si deducono molti fra i risultati dei paragrafi seguenti.

10. — Una conseguenza immediata della (2) è la seguente (già nota) (*):

Se sopra una curva d'ordine n e genere p, appartenente allo spazio S_r si trova una serie $g_m^{(1)}$, i cui gruppi appartengano a spazi S_{m-1} $(m-1 < r)$, l'ordine della varietà razionale a m dimensioni costituita dagli spazi S_{m-1} è $n - p - (m-1)$.

Questo infatti è per la (2) il numero dei gruppi G_m comuni alla $g_m^{(1)}$ e alla serie $g_n^{(m-1)}$ determinata sulla curva dagli S_{r-1}, che passano per uno spazio a $(r-m)$ dimensioni, arbitrario, di S_r.

Se i gruppi di $g_m^{(1)}$ appartengono a spazi S_ϱ, nello stesso modo si prova che l'ordine ν della varietà costituita dagli S_ϱ è dato dall'uguaglianza

$$(n-\varrho)\binom{m-1}{\varrho} - \binom{m-2}{\varrho-1}p = \nu\binom{m}{\varrho+1} + z,$$

essendo z il numero degli spazi $S_{\varrho-1}$ in cui giacciono gruppi $G_{\varrho+1}$ contenuti nella $g_m^{(1)}$. Questa uguaglianza, per involuzioni *razionali* $g_m^{(1)}$, coincide con una formola del sig. Segre (**).

Curve normali.

11. — Allo spazio ad r dimensioni S_r *appartenga* una curva d'ordine n e genere p C_p^n. Per uno spazio S_ϱ di S_r, il quale incontri in

(*) Segre, *Courbes et surfaces réglées*, § 15, Math. Ann. XXX.
(**) *Sulle varietà algebriche*; Rend. Lincei, vol. III, fasc. 7° (ottobre 1887).

s punti la curva, passano $\infty^{r-\varrho-1}$ spazi S_{r-1}, i quali segano sulla curva una serie $g_{n-s}^{(r-\varrho-1)}$; diremo che S_ϱ è *asse* di questa serie.

Gli spazi S_ϱ che segano in $(\varrho+1)$ punti la curva, sono in numero di $\infty^{\varrho+1}$. Gli spazi S_ϱ che segano (almeno) in $(\varrho+2)$ punti la curva, sono *al più* ∞^ϱ. Sicchè si può affermare che uno spazio S_{r-1} *generale* di S_r sega la curva in n punti tali, che r quali si vogliano di essi siano linearmente indipendenti.

Si può anche affermare che una serie $g_{n-r+1}^{(1)}$, la quale abbia per asse uno spazio S_{r-2} secante C_p^n in $r-1$ punti *arbitrari*, contiene un numero finito (zero incluso) di gruppi G_{r+1} giacenti in S_{r-2}. Perchè se ne contenesse infiniti, un punto arbitrario di C_p^n apparterrebbe a qualcuno di questi G_{r+1}, e lo spazio *generale* S_{r-1}, proiezione di S_{r-2} da quel punto, segherebbe C_p^n in n punti, r tra i quali non sarebbero linearmente indipendenti.

12. — Si dice che una curva appartenente ad uno spazio è *normale* per questo spazio, quando essa non può ottenersi come proiezione di una curva dello stesso ordine appartenente ad uno spazio superiore.

Se sulla curva C_p^n normale per S_r si trova una serie $g_m^{(1)}$, i cui gruppi appartengouo a spazi S_ϱ $(\varrho < r)$, il luogo di questi S_ϱ è una varietà a $\varrho+1$ dimensioni d'ordine $r-\varrho$.

Si dimostra collo stesso ragionamento che il sig. Segre adopera in un caso particolare (*). L'ordine della varietà sia $r-\varrho+\delta$; la varietà non può giacere in uno spazio avente più di

$$(r-\varrho+\delta)+(\varrho+1)-1 = r+\delta$$

dimensioni, e se giace in uno spazio inferiore è proiezione di una varietà dello stesso ordine di $S_{r+\delta}$. Ora ciò non è possibile se δ è negativo; e se $\delta > 0$ la C_p^n sarebbe proiezione di una curva dello stesso ordine appartenente a $S_{r+\delta}$, contro l'ipotesi; quindi è $\delta = 0$.

13. — Sia $V_{\varrho+1}^{r-\varrho}$ la varietà di quegli S_ϱ. Uno spazio S_{r-1} passante per un S_ϱ sega la varietà in una $V_\varrho^{r-\varrho-1}$ appartenente ad un S_{r-2}, il quale contiene $n-m$ punti della C_p^n; S_ϱ è adunque asse di una $g_{n-m}^{(r-\varrho-1)}$, i cui gruppi stanno in spazi a $r-2$ dimensioni. Ciascuno di questi spazi è poi asse della $g_m^{(1)}$.

Due serie d'ordine m, $n-m$ sopra una curva di S_r, tali che un gruppo arbitrario dell'una stia in uno spazio S_{r-1} con un qualunque gruppo dell'altra, saranno dette *residue* (una dell'altra).

(*) *Courbes et surfaces réglées*, § 15.

Sopra la curva normale C_p^n di S_r una serie $g_m^{(1)}$, i cui gruppi stiano in spazi S_ϱ, ha per residua una serie $g_{n-m}^{(r-\varrho-1)}$, i cui gruppi stanno in spazi S_{r-2}.

Se i gruppi della seconda serie appartenessero a spazi S_{r-q-1}, la prima serie sarebbe contenuta in una $g_m^{(q)}$.

Reciprocamente se la $g_m^{(1)}$ è contenuta in una $g_m^{(q)}$, la serie $g_{n-m}^{(r-\varrho-1)}$, che ha per asse lo spazio S_ϱ di un gruppo G_m di $g_m^{(1)}$, è residua di ogni $g_m^{(1)}$ passante per G_m e contenuta in $g_m^{(q)}$, è quindi residua di $g_m^{(q)}$. Ogni gruppo di $g_{n-m}^{(r-\varrho-1)}$ deve giacere in uno spazio S_{r-q-1}.

Sopra la curva C_p^n normale per S_r una serie $g_m^{(q)}$, i cui gruppi giacciono in spazi S_ϱ, ha per residua una serie $g_{n-m}^{(r-\varrho-1)}$, i cui gruppi stanno in spazi S_{r-q-1}.

Dall'esistenza della prima serie segue l'esistenza della seconda.

14. — Il numero delle dimensioni dello spazio a cui appartiene un gruppo di $g_m^{(q)}$ non può superare $m-1$, ed è certo inferiore a questo numero per quelle curve C_p^n di S_r nelle quali $n-p<r$.

I gruppi di $g_m^{(1)}$ sopra una curva C_p^n appartenente ad S_r stanno in spazi a $m-2$ dimensioni, quando $n-p<r$ (e $m-2<r$).

Basta dimostrare che i gruppi di $g_m^{(1)}$ con $r-m+1$ punti arbitrari della curva dànno gruppi giacenti in spazi S_{r-1}. Perciò si noti che lo spazio di quei $r-m+1$ punti è asse di una serie $g_{n+m-r-1}^{(m-1)}$, la quale contiene la $g_m^{(1)}$, perchè (n. 9) si ha

$$p > \frac{m-1}{m-1}(n+m-r-1-(m-1)),$$

in virtù dell'ipotesi $p>n-r$. Non è escluso che i gruppi di $g_m^{(1)}$ appartengano a spazi inferiori. In generale:

I gruppi di una serie $g_m^{(q)}$ sopra una curva C_p^n appartenente ad S_r giacciono in spazi a $(m-q-1)$ dimensioni (o in spazi inferiori) se $n-p<r$, (e $m-q-1<r$).

Infatti $q-1$ punti arbitrari della curva hanno per complemento una serie $g_{m-q+1}^{(1)}$, i cui gruppi appartengono a spazi $[m-q-1-\delta]$(*) (per $\delta \geq 0$). In uno di questi gruppi di $m-q+1$ punti prendiamo $m-q$ punti *appartenenti* a

$$[m-q-1-\delta]$$

e indichiamo con G_{m-q} il loro insieme; e con G_q il gruppo formato dal punto rimanente e dai $q-1$ punti primitivi. G_{m-q} con ciascun punto di G_q dà un gruppo di una $g_{m-q+1}^{(1)}$ (complementare ai rima-

(*) Seguendo lo SCHUBERT indicheremo talvolta con $[r]$ uno spazio ad r dimensioni.

nenti $q-1$ punti di G_q), un gruppo quindi giacente in un $[m-q-1-\delta]$; ma poichè un tale spazio è già determinato da G_{m-q}, si conchiude che in questo spazio cadono tutti i punti di G_q; ossia tutti i punti di un gruppo arbitrario di $g_m^{(q)}$.

15. — Si noti che l'ultimo teorema, se è applicabile a una curva C_p^n di S_r, vale pure per ogni curva $C_p^{n'}$ di $S_{r'}$ che sia proiezione della prima, anche quando non sussista la disuguaglianza $n'-p<r'$. In virtù del teorema 13 si ha poi:

Se sopra una curva normale C_p^n di S_r per la quale $n-p<r$, si trova una serie $g_m^{(q)}$ $(m-q \leq r)$, sulla curva si trova pure una serie d'ordine $(n-m)$ e di molteplicità (almeno) uguale a $(r-m+q)$, i cui gruppi stanno in spazi S_{r-q-1}.

16. — Una curva d'ordine n e genere p appartenga ad uno spazio S_r; dati n e p vogliamo trovare un limite superiore ad r. Tratteremo in primo luogo il caso in cui è $n>2p-2$, dimostrando un noto teorema dovuto a CLIFFORD.

Se $n>2p-2$ lo spazio più elevato a cui appartiene una curva d'ordine n e genere p, ha $n-p$ dimensioni.

Supponiamo infatti che C_p^n appartenga a S_{n-p+1}. Si seghi la curva con uno spazio S_{n-p} tale, che delle n intersezioni, $n-p+1$ quali si vogliano siano linearmente indipendenti (n. 11). Allora per $p-1$ fra questi n punti (poichè per ipotesi è $p-1 \leq n-p$) si può condurre uno spazio S_{n-p-1}, che non seghi ulteriormente la curva. E questo S_{n-p-1} è asse di una $g_{n-p+1}^{(1)}$, della quale non tutti i gruppi giacciono in spazi $[n-p-1]$. Ora gli spazi S_{n-p} passanti per un punto della curva che non giaccia in S_{n-p-1}, segano una serie $g_{n-1}^{(n-p)}$ che non contiene la $g_{n-p+1}^{(1)}$. Dunque (n. 9) deve essere

$$p \leq \frac{n-p}{n-p}(n-1-(n-p)),$$

il che è assurdo.

Una curva di genere p e d'ordine $n>2p-2$ è normale per lo spazio a $n-p$ dimensioni.

17. — Sia ora

α) $\qquad n \leq 2p-2,$

e ammettiamo, se è possibile, che sia

β′) $\qquad n < 2r.$

In S_r si conduca un S_{r-1} che seghi C_p^n in n punti, in guisa che r qualsivogliano fra questi siano linearmente indipendenti; $r-1$ degli n punti apparterranno ad una spazio S_{r-2}; e nella serie $g_{n-r+1}^{(1)}$, di cui è base l'ultimo spazio, solo un numero finito di gruppi giacerà in spazi $[n-r-1]$. Scelti su C_p^n $(2r-n)$ punti, nessuno dei quali giaccia in S_{r-2}, gli S_{r-1} passanti per essi determinano una $g_{2(n-r)}^{(n-r)}$, che non contiene la $g_{n-r+1}^{(1)}$; dunque (n. 9)

$$p \leq \frac{n-r}{n-r}\,(2\,(n-r)-(n-r)),$$

ossia $p \leq n-r$.

Se aggiungiamo alla α) questa ultima raddoppiata, otteniamo

$$n \geq 2r+2$$

che contraddice alla β)'; quindi la β)' è incompatibile colla α). Per conseguenza fatta l'ipotesi α), si deve avere

β) $$n \geq 2r$$

e perciò

γ) $$r \leq p-1.$$

Se $n \leq 2p-2$, e la curva C_p^n appartiene ad S_r deve essere

$$r \leq \frac{n}{2}, \quad r < p.$$

Si noti che la γ) ha per conseguenza la disuguaglianza β). Perchè se, ammessa la γ), non fosse vera la β) ma la β'), non potrebbe sussistere la α), e quindi per il teorema di Clifford si dovrebbe avere $r \leq n-p$, che sommata alla γ) dà una disuguaglianza, che contraddice la β'). Si può quindi enunciare il teorema (noto):

Se C_p^n appartiene allo spazio S_r ed è $r \leq p$, deve essere $n \geq 2r$; (il caso $r = p$ non contemplato nel ragionamento precedente, può tuttavia esser trattato colle stesse considerazioni).

Si ha pure:

La curva di genere p e d'ordine $2p-2$ è normale per lo spazio a $(p-1)$ dimensioni.

18. — Considerazioni analoghe alle precedenti permettono di fissare un limite superiore al genere p di una curva di dato ordine n appartenente ed S_r, quando sussista la disuguaglianza

β) $$n \geq 2r.$$

Perciò si seghi la curva C_p^n con un S_{r-1}, in modo che delle n intersezioni r qualsivogliano siano indipendenti. La $g_{n-r+1}^{(1)}$ che ha per base lo spazio S_{r-2} determinato da $r-1$ di queste intersezioni, contiene solo un numero finito di gruppi di r punti giacenti in spazi $[r-2]$, e quindi ha solo un numero finito di G_r comuni colla serie $g_{n-1}^{(r-1)}$, segata dagli S_{r-1} passanti per un punto V della curva giacente in S_{r-2}. Fra questi G_r si trovano quei $\binom{n-r}{r}$ gruppi formati colle $n-r$ ulteriori intersezioni di C_p^n e dello spazio (VS_{r-2}). Quindi (n. 8)

$$(n-r)\binom{n-r}{r-1} - p\binom{n-r-1}{r-2} \geqq \binom{n-r}{r},$$

ossia

$$p \leqq \frac{(n-r+1)\,(n-r)}{r}.$$

Questo limite in generale non sarà raggiunto; ma in seguito mediante considerazioni meno semplici, troveremo il massimo valore che può assumere il genere di una curva di dato ordine appartenente ad S_r. Per ora ci limitiamo ad osservare che:

La curva d'ordine $2r$ dello spazio S_r non può avere il genere superiore ad $r+1$.

Così la curva d'ordine $2r+1$ di S_r non può esser di genere superiore a $r+3$, se $r > 2$, ecc.

19. — *Si può sempre costruire nello spazio S_{p-1} una curva d'ordine $2p-2$ che sia riferita univocamente ad una data curva di genere p, purchè questa non contenga una $g_2^{(1)}$* (non sia iperellittica).

È noto infatti (*) che in una curva piana qualunque d'ordine n e genere p, le curve aggiunte d'ordine $n-3$ segano una $g_{2p-2}^{(p-1)}$, che è involuzione *semplice* se la curva proposta non è iperellittica.

Due curve C_p^{2p-2} di S_{p-1} riferite univocamente si corrispondono in una collineazione (**).

20. — *Si può sempre costruire nello spazio S_r $(r \geq 2)$ una curva d'ordine $r+p$, che sia riferita univocamente ad una data curva di genere p.* Si può supporre che la curva data sia piana d'ordine n ed abbia solo singolarità ordinarie. Le curve aggiunte d'ordine $n-2$ formano un sistema (almeno) $n+p-2$ volte infinito; queste curve segano sulla curva d'ordine n una serie d'ordine $n+2p-2$ e moltepplicità non inferiore a $n+p-2$, (perchè se fosse inferiore,

(*) V. Brill e Nöther, *Ueber die algebraischen Functionen.*

(**) Segre, *Courbes et surfaces réglées*, l. c., § 7.

per ogni gruppo della serie dovrebbero passare infinite curve aggiunte d'ordine $n-2$, e la curva data dovrebbe scindersi). Dunque in $[n+p-2]$ si trova una curva d'ordine $n+2p-2$, riferita univocamente alla data. Proiettando questa curva sopra un piano da un $[n+p-5]$, otteniamo una curva d'ordine $n+2p-2$, la quale dalle curve aggiunte d'ordine $(n+2p-2)-2$ è segata in una serie d'ordine $n+4p-4$ e dimensione $n+3p-4$; a questa serie corrisponde in $[n+3p-4]$ una curva d'ordine $n+4p-4$; e così via. Procedendo in questo modo si potrà costruire in uno spazio S_R, dove $R \geq r$, una curva d'ordine $R+p$ riferita univocamente alla curva data. Proiettando la curva di S_R da $R-r$ suoi punti in S_r, si ottiene la curva richiesta.

Si può anche dire che sopra una curva di genere p esiste sempre une serie $g^{(r)}_{r+p}$ qualunque sia r; la serie è completamente definita da un suo gruppo G_{r+p} (che può prendersi ad arbitrio) se $r > p-2$ [nn. 5, 16].

La curva C_p^{2p-2} di S_{p-1}.

21. — Dai seguenti paragrafi sono escluse le curve iperellittiche (oltre alle razionali, ed ellittiche). Di ogni altra curva di genere p sappiamo che può riferirsi univocamente ad una curva ben determinata d'ordine $2p-2$ di S_{p-1}, che per brevità sarà indicata nel seguito con C_p (*).

Diremo che una serie $g^{(r)}_n$ è *normale* [*completa*], quando non è contenuta in una serie dello stesso ordine e di molteplicità superiore. Una curva di S_r, sulla quale gli S_{r-1} seghino questa $g^{(r)}_n$, è normale.

22. — Poichè la C_p è normale e $(2p-2)-p < p-1$, valgono i teoremi (nn. 14, 13):

I gruppi di una serie $g^{(r)}_n$ sopra C_p, quando $n-r<p$, stanno in spazi a $n-r-1$ dimensioni, e appartengono a questi se $g^{(r)}_n$ è normale.

Sopra C_p una serie $g^{(r)}_n$ normale, quando $n-r<p$, ha per residua una serie $g^{(p-1-(n-r))}_{2p-2-n}$, i cui gruppi stanno in spazi $[p-2-r]$.

Quanto alla seconda parte del primo teorema si noti che se un gruppo di $g^{(r)}_n$ giacesse in un $[n-r-2]$, la serie residua d'ordine $2p-2-n$ sarebbe di molteplicità

$$p-2-(n-r-2) = p-(n-r),$$

(*) [Detta oggi *curva canonica*; la denominazione di *serie canonica* applicata alla g^{p-1}_{2p-2} si trova adoperata la prima volta (1891) nella Mem. VI, forse suggerita da C. Segre].

i suoi gruppi dovrebbero giacere in spazi $[p-3-r]$, e quindi la serie proposta $g^{(r)}_n$ sarebbe contenuta in una $g^{(r+1)}_n$, contro l'ipotesi.

Se $g^{(r)}_n$ è normale, la serie residua è pure normale $(n-r<p)$.

Dal primo teorema segue che se $n-r<p$, mai n punti possono assumersi ad arbitro per costruire un gruppo che appartenga a qualche $g^{(r)}_n$, ma *al più* $n-r$ punti.

Se su C_p si trova un gruppo di n punti appartenenti ad un $[n-r-1]$ $(n-r<p)$, questo gruppo giace in una $g^{(r)}_n$ normale, residua di quella serie che ha per asse lo spazio $[n-r-1]$.

I due primi teoremi di questo paragrafo tenendo conto della costruzione di C_p (n. 19) possono enunciarsi nella forma nota:

Ogni serie $g^{(r)}_n$ sopra una curva piana d'ordine ν e di genere p, se $n-r<p$, è segata da curve aggiunte d'ordine $\nu-3$.

Le curve aggiunte d'ordine $\nu-3$ che passano per un gruppo di $g^{(r)}_n$ segano sulla curva una serie d'ordine $2p-2-n$ e di dimensione $p-1-(n-r)$, che è residua di $g^{(r)}_n$.

Quest'ultimo teorema porta il nome di Riemann-Roch (*).

23. — Diremo *speciale* ogni curva di S_r che sia proiezione di C_p da uno spazio S_{p-2-r} di S_{p-1}, il quale può anche segare C_p in qualche punto; e diremo *speciale* ogni serie di molteplicità r che, quando giaccia su C_p, abbia per asse un S_{p-2-r} (**). L'ordine di una curva (o serie) speciale non può superare $2p-2$; la dimensione dello spazio a cui appartiene la curva (o della serie) non può superare $p-1$.

Se $n-r<p$, una serie $g^{(r)}_n$ sopra una curva di genere p è speciale, ed è speciale una curva C^n_p appartenente ad S_r, perchè dal n° precedente segue che se $g^{(r)}_n$ giace su C_p, essa è segata dagli S_{p-2} passanti per un $[p-2-r]$ avente $2p-2-n$ punti comuni con C_p. Da questo $[p-2-r]$ la C_p è proiettata in una curva C^n_p di S_r.

Se una serie speciale normale d'ordine n contiene un gruppo di m punti G_m, essa contiene ogni serie speciale a cui G_m appartenga.

La serie proposta $g^{(r)}_n$ si trovi su C_p, e il gruppo G_m appartenga ad uno spazio $[m-q-1]$, per modo che la serie speciale normale che lo contiene sia la $g^{(q)}_m$. Sia poi G_n un gruppo di $g^{(r)}_n$ contenente G_m. Uno spazio S_{p-2} passante per G_n sega C_p in altri $2p-2-n$ punti giacenti in un $[p-2-r]$. Questi stessi punti cogli $n-m$

(*) [O, meglio, teorema di reciprocità]. V. BRILL e NÖTHER, *Ueber die algebraischen Functionen*, § 4, 5.

(**) Nella memoria citata di BRILL e NÖTHER si dice speciale ogni serie segata sopra una curva piana d'ordine ν da curve aggiunte d'ordine $\nu-3$.

punti di G_n che non stanno in G_m, dànno un gruppo di $2p-2-m$ punti di un $[p-2-q]$. Ora lo spazio $[p-2-r]$ è asse di $g_n^{(r)}$, e lo spazio $[p-2-q]$ è asse di $g_m^{(q)}$; e poichè il primo spazio sta nel secondo, segue che la prima serie $g_n^{(r)}$ contiene la seconda $g_m^{(q)}$. Segue pure che la serie residua di $g_n^{(r)}$ è contenuta nella serie residua di $g_m^{(q)}$.

24. — Su C_p sia data una serie $g_n^{(r)}$, $(r > 1)$, e sia

$$\alpha_1) \qquad n - r < p;$$

la serie è speciale, quindi

$$\beta_1) \qquad n \leqq 2p - 2.$$

Sia μ_1 il minimo numero di punti di un gruppo arbitrario G_n della serie, per i quali deve passare un S_{p-2}, affinchè questo contenga tutto G_n; sarà

$$\gamma_1) \qquad \mu_1 \leqq n - r,$$

e

$$\delta_1) \qquad d_1 = \mu_1 - 1$$

sarà la dimensione dello spazio a cui appartiene G_n.

In che relazione si trovano due, tre... spazi S_{d_1} contenenti altrettanti gruppi di $g_n^{(r)}$?

La serie $g_n^{(r)}$, la quale appartiene ad una serie normale $g_n^{(r_1)}$, essendo

$$\varepsilon_1) \qquad r_1 = n - \mu_1,$$

avrà per residua una serie $g_{N_1}^{(R_1)}$, dove

$$N_1 = 2p - 2 - n, \quad R_1 = p - \mu_1 - 1.$$

Sia G_n un gruppo *arbitrario* di $g_n^{(r)}$; possiamo supporre che mai r punti di G_n appartengano ad un altro gruppo della serie stessa (n. 11); poi se $g_n^{(r)}$ non offre particolarità, che $d_1 + 1 = \mu_1$ punti quali si vogliano di G_n siano linearmente indipendenti.

In tale ipotesi io dico che, se

$$R_1 \geq \mu_1 - (r-1),$$

ossia

$$\alpha_2) \qquad 2\mu_1 - (r-1) < p,$$

ogni gruppo G_{N_1} di $g_{N_1}^{(R_1)}$, il quale contenga

$$\mu_1 - (r-1)$$

punti di G_n, contiene tutto G_n.

Infatti se così non fosse, in G_n si troverebbero almeno

$$n - d_1 = n - \mu_1 + 1 > r$$

punti, non giacenti in G_{N_1}. Sia X uno di questi, e G_{r-1} un gruppo formato con $r-1$ dei punti stessi, escluso X. Un gruppo G'_n di $g_n^{(r)}$ diverso da G_n e passante per G_{r-1}, dà con G_{N_1} un gruppo di $2p-2$ punti giacente in un S_{p-2}. Questo spazio contiene almeno

$$\mu_1 - (r-1) + (r-1) = \mu_1$$

punti di G_n, e quindi contiene tutto G_n, ed in particolare anche X. Ora X non può stare in G'_n, perchè G'_n non può aver comuni con G_n r punti senza coincidere con esso; dunque X deve trovarsi in G_{N_1}, e ciò contro l'ipotesi. Segue che G_{N_1}, passando per $\mu_1 - (r-1)$ punti di G_n, contiene G_n.

Perciò in primo luogo la α_2) ha per conseguenza $N_1 \geqq n$, ossia

$$\beta_2) \qquad 2n \leqq 2p - 2.$$

Poi se indichiamo con μ_2 il minimo numero di punti di G_n che devono trovarsi in G_{N_1}, affinchè questo gruppo contenga il primo, si avrà

$$\gamma_2) \qquad \mu_2 \leqq \mu_1 - (r-1).$$

Finalmente uno spazio $S_{d_1+\mu_2}$, il quale passi per G_n e per μ_2 punti di un altro gruppo G'_n di $g_n^{(r)}$ contiene G'_n; perchè ogni S_{p-2} passante per $S_{d_1+\mu_2}$, secando C_p, oltre che in G_n, in un gruppo G_{N_1} che contiene μ_2 punti di G'_n, deve contenere tutto G'_n.

Dunque *se è soddisfatta la* α_2), *due gruppi arbitrari di una* $g_n^{(r)}$ *su* C_p *appartengono a uno spazio di*

$$\delta_2) \qquad d_2 = d_1 + \mu_2 = \mu_1 + \mu_2 - 1$$

dimensioni.

Le coppie di gruppi di $g_n^{(r)}$ *dànno gruppi di una serie speciale normale d'ordine* $2n$ *e molteplicità*

$$\varepsilon_2) \qquad r_2 = 2n - d_2 - 1 = 2n - (\mu_1 + \mu_2).$$

Ogni gruppo della serie coniugata $g_{N_2}^{(R_2)}$,

$$N_2 = 2p - 2 - 2n, \qquad R_2 = p - (\mu_1 + \mu_2) - 1,$$

con un gruppo G_n dà un gruppo G_{N_1}.

25. — Sia ora

$$R_2 \geq \mu_1 - (r-1),$$

ossia

$$\alpha_3) \qquad \mu_1 + 2\mu_2 - (r-1) < p.$$

Se di un gruppo G_{N_2} di $g_{N_2}^{(R_2)}$ si prendono $\mu_2 - (r-1)$ punti sopra un gruppo arbitrario G_n di $g_n^{(r)}$, quest'ultimo deve giacer tutto in G_{N_2}. Perchè se ciò non fosse, si troverebbero in G_n almeno r punti non contenuti in G_{N_2}; uno di questi sia X; per gli altri $r-1$ si potrebbe far passare un altro gruppo G'_n di $g_n^{(r)}$, il quale con G_{N_2} darebbe un gruppo G_{N_1} passante per $\mu_2 - (r-1) + (r-1) = \mu_2$ punti di G_n, e quindi per tutto G_n. Il gruppo G_{N_1} conterrebbe anche X, il quale però non appartiene nè a G'_n, nè a G_{N_2}. Questa contraddizione dimostra che G_{N_2} contiene G_n. Dunque dalla α_3) segue $N_2 \geq n$, ossia

$$\beta_3) \qquad 3n \leqq 2p - 2.$$

Se poi indichiamo con μ_3 il minimo numero di punti di G_{N_2} che devono prendersi su G_n, perchè questo gruppo sia contenuto nel primo, si ha

$$\gamma_3) \qquad \mu_3 \leqq \mu_2 - (r-1).$$

Se è soddisfatta la α_3), tre gruppi arbitrari di $g_n^{(r)}$ appartengono ad uno spazio di

$$\delta_3) \qquad d_3 = d_2 + \mu_3 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 - 1$$

dimensioni.

Le terne di gruppi di $g_n^{(r)}$ dànno gruppi di una serie speciale normale d'ordine $3n$ e molteplicità

$$\varepsilon_3) \qquad r_3 = 3n - d_3 - 1 = 3n - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3).$$

26. — In generale se a $\mu_4 \ldots \mu_k \ldots$ si estendono le definizioni date per μ_1, μ_2, μ_3, e se oltre alle disuguaglianze α_1), α_2), α_3), valgono le

$$\alpha_4) \qquad \mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3 - (r-1) < p,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_k) \qquad \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_{k-2} + 2\mu_{k-1} - (r-1) < p,$$

allora deve essere

$$\beta_k) \qquad kn \leqq 2p - 2,$$

e oltre alle γ_1), γ_2), γ_3), si deve avere

$$\gamma_4) \qquad \mu_4 \leqq \mu_3 - (r-1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\gamma_k) \qquad \mu_k \leqq \mu_{k-1} - (r-1).$$

Dalle stesse ipotesi α) seguono i teoremi:

k gruppi arbitrari di $g_n^{(r)}$ appartengono ad uno spazio di

$$\delta_k) \qquad d_k = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_k - 1$$

dimensioni.

I gruppi di $g_n^{(r)}$ presi a k a k, dànno gruppi di una serie speciale normale d'ordine kn e di molteplicità

$$\varepsilon_k) \qquad r_k = kn - (\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_k).$$

Se valgono le α) deve essere evidentemente $\mu_k > 0$. L'ipotesi opposta porterebbe di conseguenza che, se consideriamo $(k-1)$ gruppi arbitrari di $g_n^{(r)}$, ogni spazio S_{p-2}, passante per μ_1 punti del primo, μ_2 punti del secondo, $\ldots \mu_{k-1}$ punti dell'ultimo, dovrebbe contenere ogni altro gruppo di $g_n^{(r)}$, il che è assurdo.

Ma si vede pure facilmente che deve essere

$$\mu_k > r - 1,$$

quando sussistono le α); perchè altrimenti la

$$\mu_k - (r-1) \leqq 0,$$

insieme colla

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_{k-1} + \mu_k < p$$

(conseguenza della α_k) e γ_k)), darebbe

$$\alpha_{k+1}) \qquad \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_{k-1} + 2\mu_k - (r-1) < p$$

analoga alla α_k); e tuttavia questa disuguaglianza è incompatibile colla $\mu_k - (r-1) \leqq 0$, per ciò che si disse sopra (quando al posto di k stava $k-1$).

Da questa osservazione segue che, se, essendo vere le disuguaglianze α_1), α_2) $\ldots$ α_k), e quindi le γ_1), γ_2) $\ldots$ γ_k), si trova

$$\gamma'_k) \qquad \mu_k \leqq 2\,(r-1),$$

allora la disuguaglianza α_{k+1}) non è più vera, ma invece

$$\alpha'_{k+1}) \qquad \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_{k-1} + 2\mu_k - (r-1) \geq p.$$

Ora le disuguaglianze γ_1), γ_2), $\ldots$ γ_k) sommate insieme dànno

$$c) \qquad \mu_k \leqq (n-r) - (k-1)(r-1);$$

se invece sommiamo la γ_k) colla γ_{k-1}) raddoppiata, colla γ_{k-2}) moltiplicata per 3, $\ldots$ colla γ_1) moltiplicata per k, abbiamo

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \ldots + \mu_k \leqq k\left\{(n-r) - \frac{k-1}{2}(r-1)\right\}.$$

Perciò se diamo a k il minimo valore intero non inferiore a

$$\frac{n-r}{r-1}-1,$$

la γ'_k) è certo soddisfatta, e quindi la α'_{k+1}) dà

$$a) \qquad p \leqq k\left\{(n-r)-\frac{k-1}{2}(r-1)\right\}+\mu_k-(r-1).$$

27. — La formola a) ci conduce a un risultato notevolissimo.

Indichi χ *il più piccolo intero non inferiore a* $\frac{n-r}{r-1}$; allora la a) potrà scriversi

$$p \leqq (\chi-1)\left\{(n-1)-\frac{\chi-2}{2}(r-1)\right\}+\mu_{\chi-1}-(r-1).$$

Il secondo membro assume il massimo valore quando $\mu_{\chi-1}$ ha il massimo valore, ossia per la c), quando

$$\mu_{\chi-1}=(n-r)-(\chi-2)(r-1).$$

Sostituendo nella penultima, questa diviene

$$p \leqq \chi\left\{(n-r)-\frac{\chi-1}{2}(r-1)\right\},$$

od anche

$$p \leqq \chi\left\{n-\frac{r+1}{2}-\chi\frac{r-1}{2}\right\} (*).$$

Il secondo membro dà il massimo valore che può avere il genere di una curva su cui giaccia una $g_n^{(r)}$, od anche dà il massimo genere di una curva d'ordine n appartenente ad S_r.

Il genere di una curva d'ordine n appartenente a S_r non può superare

$$(3) \qquad \chi\left\{n-\frac{r+1}{2}-\chi\frac{r-1}{2}\right\},$$

dove χ è il minimo intero non inferiore a $\frac{n-r}{r-1}$.

Nello stabilire la (3) si è supposto che sussistano le prime $\chi-1$ delle disuguaglianze α_1), α_2)..., almeno la α_1); era quindi escluso il

(*) Si noti che il secondo membro, quando si faccia variare χ, diventa massimo per il valore $\dfrac{n-\frac{r+1}{2}}{r-1}=\dfrac{n-r}{r-1}+\dfrac{1}{2}$ della variabile.

caso $\chi=1$ ossia $n<2r$. È però facile provare che la (3) vale anche in questo caso. Infatti se $n<2r$, si ha (n. 17) $n>2p-2$, e quindi per il teorema di Clifford, il genere ha per massimo valore $n-r$; e questo è il valore della (3) per $\chi=1$.

Dunque la (3) dà per il genere di C^n in S_r un valore massimo che è raggiunto, se $n<2r$. Ma anche per ogni valore di $n \geq 2r$, il valore dato dalla (3) è raggiunto. Infatti come risulta da una formola del sig. Segre (*), le curve semplici d'ordine n della rigata razionale normale d'ordine $r-1$ di S_r, seganti $\chi+1$ volte ciascuna generatrice, hanno per genere il valore (3); e l'esistenza di tali curve è provata dalla rappresentazione piana.

Risulta poi dalle considerazioni precedenti che, se la curva C^n di S_r ha il genere dato dalla (3) per $\chi \geq 2$, nella c) si deve prendere il segno di uguaglianza e quindi le γ) devono ridursi a eguaglianze:

$$\Gamma_i) \quad \mu_i=(n-r)-(i-1)(r-1) \qquad (i=1,2,\ldots\chi-1).$$

Per $i=1$ si ha che la C^n è normale per S_r.

28. — Chiameremo curva di *genere massimo* per un dato ordine n in S_r, una curva C^n di S_r, il cui genere sia dato dalla (3). Si presenta naturale la domanda se ogni curva di genere massimo di S_r stia sopra la rigata d'ordine $r-1$, come avviene in S_3. Le ultime considerazioni ci permettono di rispondere completamente alla questione.

Le varietà a $r-1$ dimensioni d'ordine k F^k segano sopra una curva C_p^n di S_r una serie d'ordine $n\,k$, della quale sia ϱ la molteplicità. Poichè le varietà F^k di S_r formano un sistema lineare di molteplicità $\binom{k+r}{r}-1$, se per C_p^n passano ∞^σ tali varietà F^k, si ha

$$\varrho=\binom{k+r}{r}-\sigma-2,$$

da cui

$$\sigma=\binom{k+r}{r}-\varrho-2;$$

si intenda che σ abbia il valore -1, quando per C_p^n non si può condurre una varietà F^k.

Ora fra le varietà F^k si trovano i gruppi di k S_{r-1} di S_r, e il sistema di queste varietà degeneri *appartiene* al sistema *lineare* di tutte le varietà F^k; cioè la serie d'ordine $n\,k$ di minima dimensione

(*) *Intorno alla geometria su una rigata algebrica*; Rend. Lincei, vol. III (luglio 1887).

che contiene i gruppi segati da $k\,S_{r-1}$ è $g_{nk}^{(\varrho)}$. Ma abbiamo visto che, se fra n, p, r passano le relazioni $\alpha_1)$, $\alpha_2) \dots \alpha_k)$, i gruppi della $g_n^{(r)}$ segata dagli S_{r-1} su C_p^n presi a k a k, dànno gruppi di una $g_{nk}^{(rk)}$; dunque per la $\varepsilon_k)$

$$\varrho \leqq kn - (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k),$$

e quindi

$$\sigma \geq \binom{k+r}{r} - kn + (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k) - 2.$$

29. — Limitiamoci al caso $k = 2$; e sia $r > 2$. La curva proposta sia d'ordine $n \geq 2r$ e di genere massimo p.

Supponiamo anzitutto che nella (3) si abbia $\chi > 2$, per modo che sussistano le $\alpha_1)$, $\alpha_2)$. Allora poichè per le $\Gamma_1)$, $\Gamma_2)$,

$$\mu_1 + \mu_2 = 2n - 3r + 1,$$

si ha

$$\sigma \geq \binom{r+2}{2} - 3r - 1,$$

ossia

$$\sigma \geq \binom{r-1}{2} - 1,$$

la quale dice che per la curva data C_p^n passano almeno $\binom{r-1}{2}$ quadriche linearmente indipendenti.

Si abbia invece nella (3) $\chi = 2$, cioè

$$n \leqq 3r - 2,$$

$$p = 2n - 3r + 1 \leqq n - 1.$$

Poichè $2n > 2p - 2$, la serie segata su C_p^n dalle quadriche di S_r non è speciale, e quindi per il teorema di Clifford la dimensione di questa serie non può superare

$$2n - p = 3r - 1;$$

così si ha anche in questo caso

$$\sigma \geq \binom{r+2}{2} - (3r-1) - 2,$$

$$\sigma \geq \binom{r-1}{2} - 1,$$

e si arriva alla stessa conclusione.

D'altra parte si vede facilmente che nell'ipotesi $n \geq 2r$, per C_p^n non possono passare $\binom{r-1}{2} + 1$ quadriche indipendenti. Infatti sia S_{r-1} uno spazio il quale seghi C_p^n in n punti, dei quali r qualisivogliano siano linearmente indipendenti (n. 11). Se le quadriche passanti per C_p^n formassero un sistema di $\binom{r-1}{2}$ dimensioni, un sistema di quadriche di S_{r-1} della stessa molteplicità dovrebbe passare per quegli n punti. E le quadriche di S_{r-1} passanti per

$$\left\{\binom{r+1}{2} - 1\right\} - \binom{r-1}{2} = 2(r-1)$$

di quegli n punti, dovrebbero contenere i rimanenti. Fra queste quadriche si consideri una che degeneri in due spazi S_{r-2}; uno almeno di questi dovrebbe contenere più che $r - 1$ fra gli n punti, e ciò contro l'ipotesi fatta su S_{r-1}.

Possiamo dunque asserire che:

Per una curva di S_r d'ordine $n \geq 2r$ e del massimo genere passano $\binom{r-1}{2}$ quadriche linearmente indipendenti; e ogni altra quadrica per C_p^n appartiene al sistema di quelle (*).

Se $r = 3$, la curva giace adunque sopra una quadrica, il che è già noto.

30. — Sia $r > 3$; quale sarà la varietà base del sistema Σ di quadriche, di specie $\binom{r-1}{2} - 1$?

La dimensione di questa varietà base non può superare 2. Infatti se una varietà a tre dimensioni fosse base del sistema di quadriche, uno spazio S_{r-3} segherebbe Σ in un sistema di quadriche avente per base qualche punto; e la molteplicità di questo sistema sarebbe inferiore a $\binom{r-1}{2} - 1$, che è la molteplicità del sistema di *tutte* le quadriche di S_{r-3}; adunque *ogni* spazio S_{r-3} dovrebbe trovarsi in qualche quadrica di Σ. Ma ciò non è possibile, perchè se si conduce lo spazio S_{r-2} determinato da $r - 1$ punti linearmente indipendenti di C_p^n, uno spazio S_{r-3} di S_{r-2} che non contenga nessuno di quegli $r - 1$ punti *non* può trovarsi in una quadrica passante per C_p^n.

Visto ciò, si seghi la curva C_p^n e il sistema Σ con uno spazio S_{r-1} in n punti e in un sistema Σ' della stessa dimensione di Σ; e sia tale lo spazio S_{r-1} che, delle n intersezioni, r qualisivogliano siano linearmente indipendenti. Poichè tutte le quadriche di S_{r-1}

(*) Questo teorema è noto nel caso $n = 2r$, $p = r + 1$.

formano un sistema di specie $\binom{r+1}{2} - 1$, ogni quadrica passante per

$$\left\{\binom{r+1}{2} - 1\right\} - \left\{\binom{r-1}{2} - 1\right\} = 2r - 1$$

di quegli n punti, deve contenere i rimanenti.

Dico ora che se $n > 2r$, gli n punti si trovano sopra una curva razionale d'ordine $r - 1$, la quale è contenuta in tutte le quadriche di Σ'. Indichiamo gli n punti con

$$\text{(G)} \qquad A_1,\ A_2 \ldots A_{2r-1},\ B_1,\ B_2 \ldots B_{n-2r+1},$$

e i primi $2r - 1$ abbiano la proprietà che ogni quadrica passante per essi, passi per i rimanenti. Basterà dimostrare che la curva razionale C_0^{r-1} determinata dagli $r + 2$ punti

$$A_1,\ A_2, \ldots A_r,\ B_1,\ B_2,$$

passa per tutti i punti B, e per uno qualunque dei rimanenti punti A ad es. per A_{2r-1}. Perciò consideriamo la piramide fondamentale che ha per vertici i punti

$$A_1,\ A_2 \ldots A_{r-1},$$

e indichiamo con $S^{(i)}_{r-3}$ lo spazio-faccia a $r - 3$ dimensioni che non passa per A_i. Sia poi S_{r-3} lo spazio determinato dai punti

$$A_{r+1},\ A_{r+2} \ldots A_{2r-2}.$$

Se riferiamo proiettivamente i due fasci di S_{r-2} che hanno per sostegni $S^{(i)}_{r-3}$, S_{r-3}, in guisa che si corrispondano gli spazi proiettanti A_i, A_r, A_{2r-1}, otteniamo come luogo delle intersezioni degli spazi omologhi una quadrica, che passando per tutti i punti A, dovrà contenere tutti i punti (G); quindi

$$S^{(i)}_{r-3}\,(A_r,\ A_{2r-1},\ B_1,\ B_2 \ldots) \;\overline{\wedge}\; S_{r-3}\,(A_r,\ A_{2r-1},\ B_1,\ B_2 \ldots).$$

Poichè in questa relazione, quando ad i si dànno i valori 1, 2, 3... ...$r - 1$, il secondo membro non si altera, segue che gli $r - 1$ fasci proiettivi aventi per sostegno le faccie della piramide, generano una curva razionale d'ordine $r - 1$, la quale passa oltre che per

$$A_1,\ A_2, \ldots A_r,\ B_1,\ B_2,$$

anche per A_{2r-1} e per tutti i punti B; e ciò appunto si voleva dimostrare. Poichè le quadriche di Σ' contengono ciascuna più che $2(r-1)$ punti di questa curva razionale C_0^{r-1}, segue che le quadriche stesse passano per C_0^{r-1}.

Dunque se $n > 2r$, le quadriche di Σ hanno una varietà base che è segata da ogni S_{r-1} in una C_0^{r-1}; questa varietà deve essere una superficie a due dimensioni di ordine $r - 1$.

Se $n > 2r$ la curva d'ordine n e di genere massimo di S_r sta in una superficie a due dimensioni d'ordine $r - 1$ (*); questa superficie è rigata se r è diverso da 5, e può esser non rigata (superficie di Veronese) per $r = 5$. Nel caso di una superficie rigata, il numero χ della (3) aumentato di una unità dà il numero dei punti in cui la curva sega ogni generatrice.

Se $n = 2r$, $r > 3$ la curva non sta *necessariamente* sopra una superficie d'ordine $r - 1$; anzi sta sopra la rigata d'ordine $r - 1$ solo quando la curva contenga una $g_3^{(1)}$.

Finalmente una curva d'ordine $n < 2r$ e di genere massimo ($\chi = 1$) non può giacere sopra la rigata d'ordine $r - 1$ di S_r, a meno che la curva non sia iperellittica.

[La prima spinta a redigere i lavori I e II, e specialmente quest'ultimo, venne dal desiderio di esporre col linguaggio iperspaziale, familiare allora alla nostra scuola (**), la geometria sopra una curva a cui Brill e Nöther avevano dedicato una classica memoria (1873). Ma la questione di linguaggio è accessoria e la mia trattazione si presta facilmente ad una traduzione in forma invariante per trasformazioni birazionali e ne guadagna (V. l'esposizione di Enriques-Chisini, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni...*, vol. III, n. 10 e seg.; Severi, *Trattato di geometria algebrica*, vol. I, cap. VII).

È invece essenziale nel metodo da me seguito l'impiego di una formula numerativa [II, (2)] che dà il numero di gruppi di $r + 1$ punti comuni a due serie sovrapposte g_n^r e g^1_m. Qui va ricordato che nel 1887 C. Segre aveva adoperato per lo studio proiettivo delle varietà algebriche ∞^1 di spazi una formola indicatagli da Schubert, che si riduce alla precedente se la g^1_m è lineare, e da questa formola aveva anche dedotto nel 1888 una proprietà proiettiva di una serie lineare giacente sopra una curva iperspaziale (***). Ciò che mi ha permesso di dedurre la

(*) Crediamo che anche il sig. Del Pezzo sia giunto a questo teorema, però, siccome il suo lavoro è ancora inedito, non conosciamo la via che lo ha guidato (febbraio 1889). [Non mi risulta che la dimostrazione sia mai stata pubblicata]. Al sig. Del Pezzo poi è dovuto le studio della superficie a due dimensioni d'ordine $r - 1$ immerse nello spazio a r dimensioni (Rend. della R. Acc. di Napoli, settembre 1885).

(**) È noto che fra il 1880 e il 1890 la geometria proiettiva degli iperspazi fu ampiamente trattata da G. Veronese, C. Segre e da altri.

(***) *Sulle curve normali di genere p...* (Rend. del R. Istituto Lombardo, s. 2ª, vol. XXI). Altre dimostrazioni della (2) e della formola di Schubert si trovano nei trattati citati di Enriques-Chisini e Severi.

geometria sulle curve dalla (2) è la osservazione che, se una formula, che dà il numero delle soluzioni di un sistema di equazioni algebriche a più incognite, acquista, in un caso particolare, valore negativo, il sistema è indeterminato. Si ottiene così nel nostro problema la condizione perchè la g^r_n contenga la $g^1{}_m$ e, in particolare, il teorema di Riemann-Roch; tutto ciò senza ricorrere al *Restsatz*, base della trattazione di BRILL e NÖTHER, il quale viene anzi stabilito e scisso nella parte proiettiva e nella parte invariantiva che lo compongono.

Criteri analoghi applicati alla formola di Schubert-Segre mi hanno permesso in seguito di ottenere proprietà delle serie irrazionali ∞^1 (V. Memorie VI, XXVIII).

Uno sviluppo molto ampio, con linguaggio iperspaziale, dei primi due capitoli della Memoria II, e di argomenti connessi, si trova nella bella Monografia di C. SEGRE, *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico* . . . (Annali di Matematica, s. 2ª, t. 22; 1894).

Il 3º capitolo della Memoria II riguarda la *somma minima* (o di minima dimensione) di più serie lineari sovrapposte. Con maggior chiarezza ed ampiezza il procedimento è esposto nella Memoria VIII, a cui rimandiamo per qualche notizia. Nella II sono completamente determinate le curve dello spazio S_r che, per dato ordine n, hanno il genere massimo. La determinazione delle curve di S_r il cui genere è inferiore al massimo di una unità è dovuta a G. FANO (*Sopra le curve di dato ordine* . . . , Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, s. 2ª, vol. 44, 1893). A. COMESSATTI (*Limiti di variabilità della dimensione*..., Atti del R. Istituto Veneto, tº 74, 1915) tratta due questioni collegate con le precedenti: qual'è la massima dimensione dello spazio cui appartiene una curva di ordine e genere assegnati? qual'è il minimo ordine delle curve di dato genere in S_r ?

* * *

Ritornando all'argomento dei cap. 1º e 2º della Memoria II, si potrebbe tentarne una estensione alle superficie cercando un criterio numerativo per decidere se un sistema lineare di curve $|C|$ ∞^r (che può supporsi privo di punti base sopra una superficie priva di curve fondamentali) contenga un fascio lineare $|D|$. Bisognerebbe determinare i caratteri di una curva covariante dei due sistemi ∞^r, ∞^1, ad es. il luogo dei contatti d'ordine r delle C con le D, ed esaminare i casi di degenerazione di quella curva. Sarà possibile stabilire per questa via il teorema di Riemann-Roch per le superficie?

La questione merita di esser trattata]. G. C.

III

UNA APPLICAZIONE DELLA GEOMETRIA ENUMERATIVA ALLE CURVE ALGEBRICHE

(*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. III, 1889)

In questo lavoro ci proponiamo due fini: esporre un metodo utile in molte ricerche della teoria delle curve; presentare alcune formole che ci sembrano notevoli e in se stesse, e per le loro conseguenze. A queste formole noi siamo giunti applicando il principio della *conservazione del numero* a curve degeneri (*). La trattazione diretta delle questioni, teoricamente preferibile, offre in questo caso gravi difficoltà.

Indicheremo con C^n_p una curva d'ordine n e genere p. *L'insieme di più curve d'ordine* $n_1, n_2, \dots n_t$ *e di genere risp.* $p_1, p_2, \dots p_t$ *dà una curva d'ordine* $n = n_1 + n_2 + \dots + n_t$ *e di genere*

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_t - (t-1) + i,$$

dove i *è il numero totale delle intersezioni semplici delle curve date, a due a due*; si suppone che le curve date si seghino in guisa, che si possa passare da una curva ad un'altra qualunque, percorrendo curve del sistema ed attraversando punti di intersezione. Il NÖTHER che dà la definizione del genere della curva complessiva (**), mostra che la curva gode le proprietà dipendenti da quel valore di p (serie di gruppi, intersezioni, ecc.). È quindi naturale di pensare che le proprietà e i numeri che dipendono solo dall'ordine e dal genere di una curva (***),

(*) Spetta al sig. SCHUBERT il merito di aver enunciato in modo preciso questo fecondo principio, e di averlo applicato a numerose questioni. Vedi il trattato ***Kalkül der Abzählenden Geometrie***, e varie note pubblicate nei ***Mathematische Annalen*** e negli ***Acta Mathematica***.

(**) ***Acta Mathematica***, VIII.

(***) Si è indotti a ritenere che i numeri dati nei paragrafi seguenti dipendano solo dall'ordine e dal genere della curva, dal fatto che nel piano e nello spazio ordinario quei numeri si possono calcolare con metodi più diretti in funzione dell'ordine e del genere ***soltanto***.