CAPITOLO II.

§ 7. L'ente algebrico semplicemente infinito. Le serie lineari ∞^1 e le funzioni razionali dell'ente.

28. D'or innanzi il nostro argomento si restringerà alla geometria su una M_1, o varietà algebrica semplicemente infinita, o, come diremo pure brevemente, *ente algebrico* [46] (sottintendendo « semplicemente infinito »). Questo ente sarà di solito rappresentato con una *curva* [47]; e perciò parleremo dei *punti* dell'ente, considerando però sempre come diversi i punti che stanno in *elementi* diversi nel senso del n.⁰ 11, sicchè ad es. in un ordinario punto s-plo di una curva piana (imagine dell'ente algebrico) noi avremo s punti ben distinti dell'ente.

Una serie lineare di gruppi di n punti dell'ente algebrico dicesi di *ordine* n, e s'indica brevemente (coi sig.ⁱ BRILL e NOETHER) con g_n; e con g_n^r se r è la sua dimensione. Così una g_n^0 sarà un gruppo di n punti. — Se una g_n^r non ha punti fissi, sicchè $r > 0$, essa avrà per imagine (n.⁰ 20) una curva d'ordine n appartenente ad S_r (sulla quale la serie stessa sarà segata dagl'iperpiani di questo spazio): però questa curva sarà multipla, cioè si ridurrà ad una d'ordine $n:\mu$ contata μ volte, se la serie è composta mediante un'involuzione di grado μ. Se poi la g_n^r (con $r > 0$) ha k punti fissi, la sua imagine sarà una curva d'ordine $n - k$ appartenente ad S_r e

---

(46) *Algebraische Gebilde* secondo WEIERSTRASS.

(47) Ad onta di ciò adotto la denominazione più vaga di « *ente algebrico* », affinchè si pensi simultaneamente a tutta la *classe* di varietà ∞^1 equivalenti per trasformazioni birazionali, e non si ponga mente invece alle singolarità *projettive* che può avere una *curva* della classe.

Ci accadrà pure qualche volta che l'ente algebrico sia rappresentato da una *rigata* (come varietà ∞^1 di rette). Allora una *serie lineare di generatrici della rigata* può esser data direttamente (mediante la definizione della rigata con coordinate di retta); oppure anche può esser ottenuta come corrispondente prospettivamente ad una serie lineare di gruppi di punti di una qualunque curva *direttrice* della rigata (chiamando così una linea che sia incontrata in un sol punto da ogni generatrice: ad es. il resto di una sezione iperplanare della rigata condotta per 0, 1, 2,... generatrici). Così se per una particolare direttrice passano degl'iperpiani, questi segano ulteriormente la rigata in gruppi di generatrici di una serie lineare (come appare considerando gl'incontri di questi gruppi di generatrici con un'altra direttrice).

sulla quale son fissati k punti; ed ancora questa curva potrà esser semplice o multipla.

I caratteri, le singolarità della serie lineare sono i caratteri, le singolarità della curva imagine (e dei punti fissi della serie). Così ad un gruppo della g_n^r dotato di punti (non fissi) *multipli* secondo $a, b, \ldots$ corrisponderà per la curva imagine un iperpiano avente con essa *contatti* a-punto, b-punto, ...: ad es. ai gruppi che hanno punti (mobili) r-pli gl'iperpiani *osculatori* alla curva nei vari punti, ai gruppi con punti $(r+1)$-pli gl'iperpiani *iperosculatori* o *stazionari* della curva. D'altra parte μ punti dell'ente algebrico i quali ai gruppi della g_n^r che si costringano a contenerli presentino non μ, ma un numero minore h di condizioni $(< r)$, sicchè quei gruppi siano ∞^{r-h} (dei μ punti si dice che hanno un certo grado di *neutralità* rispetto alla serie), avranno per imagini μ punti della curva giacenti in un S_{h-1}, *spazio* μ-*secante*: ad es. per $h=1$, se cioè i μ punti impongono *una* sola condizione, le loro imagini sulla curva si sovrappongono in un *punto* μ-plo di questa (cfr. n.^{0} 20); per $h=2$ cioè quando i μ punti contano come *due* condizioni, si ha in corrispondenza una *retta* μ-*secante* della curva; ecc. In particolare se i μ punti considerati dell'ente algebrico coincidono (nel senso ricordato della geometria sull'ente), anche sulla curva imagine si avranno μ punti coincidenti, *in un sol ramo (od elemento o ciclo) della curva*; e per $h=1$ si avrà così sulla curva un punto μ-plo (ramo od elemento o ciclo d'ordine μ); per $h=2$ una tangente che incontra in quel punto μ volte la curva; per h qualunque, quando cioè i gruppi della g_n^r per cui un dato punto è μ-plo sono ∞^{r-h} invece che $\infty^{r-\mu}$, la curva imagine avrà nel punto corrispondente un S_{h-1} osculatore che la incontra ivi μ volte.

Le formole di PLÜCKER, di CAYLEY, di VERONESE, che legano i caratteri di una curva piana, sghemba (di S_3), iperspaziale (di S_r), si possono considerare come relazioni fra caratteri di una serie lineare di gruppi di punti $\infty^2, \infty^3, \infty^r$.

29. Su ciò avremo occasione di ritornare. Intanto è bene rilevar subito una limitazione per la dimensione e l'ordine di una serie lineare, la quale deriva immediatamente dalla definizione di quei due caratteri. Poichè (n.^{0} 13) si posson prendere ad arbitrio sull'ente algebrico r punti per determinare un gruppo di una g_n^r, sarà sempre

$$n \geq r,$$

ossia

$$n - r \geq 0;$$

il numero $n-r$ è quello dei punti di un gruppo che rimangon determinati in generale dai rimanenti (r). — Se la g_n^r ha k punti fissi, e se poi la g_{n-k}^r che da essa rimane togliendo questi punti è composta con un'involuzione di grado μ, allora dando r punti generici per un gruppo della g_n^r si vengono ad avere immediatamente $\mu r+k$ punti del gruppo; sicchè sarà

$$n \geq \mu r + k .$$

Nel caso particolare che sia $n=r$ si trae da quest'ultima relazione: $k=0$, $\mu=1$; cioè che la serie data non ha punti fissi e non è composta. Inoltre fissando $n-1$ punti e considerando i gruppi della serie che li contengono, il punto residuo di quei punti descriverà una g_1^1, varietà *razionale*, che non sarà altro che la serie dei punti dell'ente algebrico. Dunque: *se un ente algebrico contiene una serie lineare il cui ordine è eguale alla dimensione, l'ente è razionale. Per una* $\mathrm{g}_\mathrm{n}^\mathrm{r}$ *sopra un ente non razionale è sempre* $\mathrm{n}>\mathrm{r}$.

30. Conviene considerare anzitutto in modo particolare *le serie lineari semplicemente infinite.* Si può dire che esse sono le più importanti, in quanto che dalle loro proprietà si posson trarre quelle delle serie più ampie.

Esse son caratterizzate come infinità di gruppi di n punti (se n ne è l'ordine) dell'ente algebrico dalle due proprietà: 1.° di esser razionali, 2.° che un punto generico (cioè non comune a tutti i gruppi) individua il gruppo che lo contiene. Invero dalla 1.ª proprietà segue che gl'infiniti gruppi corrispondono algebricamente e biunivocamente ai valori di un parametro z; e dalla 2.ª che se x è il punto dell'ente, la corrispondenza fra i gruppi ed i punti che li compongono dà z come funzione algebrica univoca, e quindi (n.° 7) razionale, delle coordinate x, ossia

$$z=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}, \tag{1}$$

ove le φ, ψ son forme dello stesso grado nelle x. Se ne trae

$$\varphi(x)-z\,\psi(x)=0,$$

equazione lineare nel parametro z, la quale prova appunto che la serie di gruppi è lineare.

Per tal modo si vede anche come le *funzioni razionali dell'ente algebrico*, vale a dire le funzioni razionali delle coordinate dei punti dell'ente, ossia della forma (1) (dove le x son legate dalle equazioni che definiscono l'ente) (48), corrispondano alle serie lineari ∞^1: essendo gruppi di una tal serie i gruppi dei punti in cui una data funzione razionale z dell'ente assume uno stesso valore (49). L'ordine n della serie lineare, ossia il numero dei punti di ciascun gruppo, in particolare il numero degli *zeri* ($\varphi(x) = 0$) o degl'*infiniti* ($\psi(x) = 0$) della funzione razionale z, dicesi *grado* (50) od *ordine* di z.

Data una g_n^1 (senza punti fissi, come tutte le serie che consideriamo nel seguito di questo paragrafo)

$$\varphi(x) - z\,\psi(x) = 0\,,$$

è chiaro che essa sarà rappresentata nel senso spiegato non solo dalla funzione razionale

$$z = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,,$$

ma anche dalle trasformazioni lineari a coefficienti costanti

$$\frac{az+b}{cz+d} \quad \text{ossia} \quad \frac{a\,\varphi(x) + b\,\psi(x)}{c\,\varphi(x) + d\,\psi(x)}$$

di quella (51). Ed anzi queste saranno *tutte* le funzioni razionali dell'ente che corrispondono a quella g_n^1, giacchè se

$$Z = \frac{\Phi(x)}{\Psi(x)}$$

---

(48) La denominazione «*funzioni razionali* dell'ente» è quella usata dal WEIERSTRASS nelle già citate Lezioni; mentre altri autori dicono «funzioni *algebriche* dell'ente». — In ogni punto *ben determinato* dell'ente una data funzione razionale z prende un valore *ben determinato*, o direttamente (per semplice sostituzione delle coordinate del punto nell'espressione (1) della funzione) o come *limite* (quando la detta sostituzione annullasse numeratore e denominatore di quell'espressione).

(49) Secondo l'osservazione fatta nella nota preced. si ottengono così nei vari gruppi della serie i soli punti che variano da un gruppo all'altro, e non i punti *fissi*: sicchè propriamente le funzioni razionali dell'ente non sono atte a rappresentare le serie lineari dotate di punti fissi; o meglio possono rappresentarle solo in parte, cioè astraendo da questi punti.

(50) Secondo WEIERSTRASS. Il KLEIN invece lo chiama *valenza* (*Werthigkeit*).

(51) Da ciò segue che due gruppi *qualunque* della g_n^1 si possono assumere come gruppi degli zeri e degl'infiniti di una funzione razionale dell'ente. Si può dunque esprimere che due gruppi (ben distinti) di n punti stanno in una stessa g_n (infinita), e per conseguenza in una g_n^1, dicendo che sono gli zeri e gl'infiniti di una stessa funzione razionale dell'ente: come appunto soglion fare gli analisti (chiamando *equivalenti* due tali gruppi). — Così pure si può dire che le g_n^1 contenenti un dato gruppo di n punti si posson rappresentare mediante le fun-

indica una funzione razionale corrispondente a quella serie, fra i valori di z e Z che corrispondono ad uno stesso punto x dell'ente vi sarà una corrispondenza algebrica *biunivoca*, e quindi *bilineare* (52).

31. Consideriamo ora due funzioni razionali qualunque

(2) $$z = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}, \qquad s = \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)},$$

dei gradi risp. n, m, dell'ente algebrico; tali però che non ogni gruppo di punti $z = \text{cost.}$ abbia più di un punto comune con qualche gruppo $s = \text{cost.}$, vale a dire tali che le serie g^1_n, g^1_m rappresentate da quelle funzioni non abbiano infinite *coppie comuni* (cioè coppie di punti che stiano in gruppi delle due serie). Fra z ed s, considerando come omologhi i valori che assumono in uno stesso punto dell'ente, vi sarà una corrispondenza algebrica (m, n), e quindi (n.º 8) un'equazione:

(3) $$F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0,$$

la quale risulterebbe dall'eliminazione delle x fra le (2) e le equazioni che definiscono l'ente algebrico. Le coordinate x saranno poi esprimibili come funzioni razionali di s e z: i punti dell'ente essendo in corrispondenza biunivoca coi gruppi di valori (s, z) soddisfacenti all'equazione (3). Sicchè per la geometria sull'ente si potrà assumere a rappresentante di questo quell'equazione. Vale a dire si può in generale rappresentare un ente algebrico mediante l'equazione che lega due sue funzioni razionali qualunque (con la detta restrizione), cioè con la varietà ∞^1 costituita dalle soluzioni di quell'equazione. — È noto come questa varietà si possa rappresentare in modo sensibile distendendo ad es. la variabile complessa z sul piano o sulla sfera reale e deponendo su ogni valor di z gli n corrispondenti

---

zioni razionali dell'ente che hanno i loro infiniti in quegli n punti (funzioni di grado n). Convien però tener presente (v. sopra) che con ciò si vengono ad escludere fra le dette g^1_n quelle che hanno punti fissi (fra gli n dati). Volendo evitare tale esclusione si dovrà dire che le g^1_n contenenti il dato gruppo di n punti son rappresentate dalle funzioni razionali dell'ente che hanno i loro infiniti FRA quegli n punti (funzioni di grado $\leq n$): allora quelle fra tali funzioni che *non sono* infinite in uno di quei punti rappresenteranno serie g^1_n per cui questo è un punto fisso.

(52) Le considerazioni di questo n.º 30 si applicherebbero evidentemente, quasi senza modificazioni, alle serie lineari ∞^1 di M_{k-1} su una M_k, e alle *funzioni razionali della* M_k.

valori di s: donde nasce una *superficie di* RIEMANN ad n fogli (cfr. la nota al n.⁰ 21).

Qui si presenta un nuovo modo analitico di considerare l'ente algebrico (53). In luogo di definirlo assumendo particolari coordinate e quindi particolari equazioni fra queste, si pensino simultaneamente per ciascun punto dell'ente i valori che in esso prendono *tutte* quante quelle variabili s, z, le $x, \ldots$ che finora chiamavamo « funzioni razionali dell'ente ». Il *punto* dell'ente è precisamente un insieme, una coesistenza di valori di quelle variabili. Due qualunque di queste verificano in tutti i punti un'equazione algebrica; e se non vi sono infinite coppie di punti nei quali ognuna delle due prenda lo stesso valore, ogni altra variabile si potrà esprimere come funzione razionale di quelle due.

32. L'equazione (3) si può rappresentare geometricamente in più modi, prendendo z, s come coordinate di elementi geometrici. Così assumendole risp. per coordinate degli elementi di due fasci di raggi S, S' in uno stesso piano, quella sarà l'equazione di una curva piana, generata nel seguente modo: Le due serie lineari g_n^1, g_m^1 dell'ente algebrico, considerate come varietà ∞^1 razionali, si riferiscano biunivocamente risp. ai due fasci di raggi S, S': considerando come omologhi nelle due serie due gruppi che contengano uno stesso punto dell'ente, ne deriva una corrispondenza (m, n) fra i raggi di quei due fasci; ed il luogo dei punti d'incontro dei raggi omologhi è la curva γ rappresentata dall'equazione (3). Su γ, considerata come imagine dell'ente algebrico, la serie g_n^1 è quella staccata dalle rette del fascio S (fuori del centro del fascio stesso), e così la g_m^1 è staccata dal fascio S'. La curva è in generale d'ordine $m + n$ ed ha S per punto m-plo, S' per punto n-plo. Ma se ad es. nel riferire le due serie dell'ente algebrico ai fasci S, S' si fa corrispondere la retta SS' comune a questi a due gruppi che abbiano un punto comune, sicchè quella retta corrisponda a sè stessa nella corrispondenza (m, n) tra i due fasci, essa si staccherà dal luogo generato da questi, e la curva γ si ridurrà all'ordine $m + n - 1$ avendo i punti S, S' come multipli secondo $m - 1, n - 1$; ecc. — Un punto μ-plo di γ fuori di S, S' corrisponderà in generale a μ punti del-

(53) Veggasi per maggiori schiarimenti la Memoria DEDEKIND-WEBER.

l'ente posti in un gruppo della g_n^1 ed in un gruppo della g_m^1; e viceversa ([54]).

§ 8. Genere dell'ente algebrico.

33. Per una serie lineare ∞^1 oltre all'*ordine* si può considerare un altro carattere: il numero degli *elementi* (gruppi di punti; o valori di una corrispondente funzione razionale z dell'ente) *di diramazione*, ossia dei gruppi della serie che contengono due punti coincidenti (punti *doppi* della serie). Nella rappresentazione dell'ente algebrico con l'equazione

$$F(s, z) = 0,$$

e quindi con la curva γ generata dai due fasci S, S' (n.° 32), gli elementi di diramazione per la serie $z = \text{cost.}$, segata dalle rette del fascio S, corrispondono alle tangenti condotte da S a toccar γ fuori di S ed inoltre, nel caso che γ abbia cuspidi, alle rette passanti per queste: i punti doppi della serie stessa essendo quei punti di contatto e queste cuspidi (non i *nodi* di γ perchè ognuno di essi rappresenta due punti distinti dell'ente).

Con l'ordine di una serie lineare ∞^1 e col numero dei suoi elementi di diramazione ossia dei suoi punti doppi si forma un'espressione, la quale non muta valore cambiando la serie sull'ente algebrico: il *genere*.

Si considerino in fatti sull'ente algebrico due serie g_m^1, g_n^1 dotate risp. di μ, ν punti doppi. Riguardando nella g_n^1 come omologhi due elementi (gruppi) quando contengono due punti di uno stesso gruppo della g_m^1, avremo fra gli elementi di quella serie una corrispondenza simmetrica d'indice $n(m-1)$; ed in questa saranno elementi uniti quei μ gruppi che contengono risp. i μ punti doppi della g_m^1, ed inoltre quei d gruppi che hanno *coppie* di punti comuni con gruppi della g_m^1. Applicando dunque il principio di corrispondenza (n.° 8) entro la g_n^1, forma razionale, con l'avvertenza di contare due volte ciascuno degli ultimi d elementi uniti perchè su esso cadono *due* degli elementi omologhi (v. una nota al detto n.°), avremo:

$$2n(m-1) = \mu + 2d. \tag{1}$$

([54]) Si può similmente rappresentare un ente algebrico contenente k serie lineari ∞^1 date, mediante una curva di S_k generata da k fasci d'iperpiani riferiti tra loro (e seganti poi sulla curva risp. quelle serie). Ecc. ecc.

Similmente scambiando le due serie si ha:

$$2m(n-1) = \nu + 2d\,. \tag{1'}$$

Sottraendo l'una dall'altra queste due relazioni viene:

$$\nu - 2n = \mu - 2m\,. \tag{2}$$

Dunque la differenza fra il numero ν dei punti doppi ed il doppio dell'ordine n di una serie lineare ∞^1 non muta al mutar di questa. Si osservi poi che in forza della (1') il numero ν è sempre pari. Sarà quindi intero ed invariabile al variar della serie il numero $\nu/2 - n + 1$; ed è questo numero che noi chiameremo il *genere dell'ente algebrico* (55). Lo indicheremo con p, sicchè

$$p = \frac{\nu}{2} - n + 1\,, \tag{3}$$

ossia

$$\nu = 2(n + p - 1)\,. \tag{4}$$

34. Osserviamo subito, nel caso che l'ente sia *razionale*, che una g_n^1 definisce fra i punti dell'ente una corrispondenza simmetrica d'indice $n-1$, considerando come omologhi i punti di uno stesso gruppo: e quindi applicando il principio di corrispondenza (il che si può fare nell'ipotesi della razionalità dell'ente) la serie stessa avrà $2(n-1)$ punti doppi. Sostituendo questo valore a ν nella formola (3) si ha $p = 0$. Dunque *gli enti razionali hanno il genere* $p = 0$.

Rileviamo anche subito come la definizione data del genere renda evidente che questo carattere spetta veramente alla geometria sull'ente: vale a dire *per trasformazioni birazionali dell'ente il genere non muta*. In fatti per una tal trasformazione una serie lineare ∞^1 si muta in altra dello stesso ordine e con lo stesso numero di punti doppi.

---

(55) Questa definizione del genere, sotto forma più analitica, si trova già in altri autori: v. ad es. NOETHER, Math. Ann., VIII, p. 497; DEDEKIND-WEBER, p. 264 Nella *Theorie der Abel'schen Functionen* del RIEMANN — ove, com'è noto, il numero p è introdotto per la prima volta, partendo dalla *connessione* dell'ente algebrico, cioè della superficie reale che lo rappresenta — s'incontra non solo la formola (3) (nel § 7), ma anche la (1) (nel § 6).

Come fu già notato, sarebbe forse stato opportuno dare un nome speciale all'espressione $\nu/2 - n$, cioè $p - 1$, anzi che a p: poichè appunto quell'espressione, $p - 1$, compare di solito nelle formole.

35. Ritornando al ragionamento generale del n.⁰ 33, osserviamo che rappresentando l'ente algebrico, nel modo ricordato da principio, con la curva γ su cui le serie g_n^1, g_m^1 vengon staccate dai fasci di rette S, S', la corrispondenza che si considerò fra i gruppi della g_n^1 si potrebbe sostituire con una corrispondenza fra le rette del fascio S; ecc. Allora il numero d che s'è incontrato delle coppie di punti comuni alle due serie non è altro (v. la fine del n.⁰ 32) che il numero dei punti doppi che γ ha, fuori di S, S'.

Si può, introducendo appunto quel numero d relativo alle due serie g_m^1, g_n^1 (numero che prima avevamo eliminato dalle relazioni (1), (1')), ed eliminando invece ν fra le (3) e (1'), ricavare quest'altra espressione del genere (pure invariantiva per trasformazioni birazionali)

$$p = (m-1)(n-1) - d, \tag{5}$$

che definisce il genere dell'ente algebrico in funzione degli ordini di *due* serie lineari semplicemente infinite esistenti su esso e del numero delle coppie di punti che esse hanno comuni. Così si ha dalla (5) che se l'ente contiene due g_2^1 il suo genere sarà 1 oppure 0, secondo che queste serie non hanno ovvero hanno una coppia comune. Ecc. [56].

36. Nelle applicazioni particolari tanto della definizione primitiva (3) del genere quanto della (5) può accadere di dover badare a *multiplicità* di soluzioni che compajano nei numeri ν e d. Dalla possibilità, su cui ritorneremo in seguito, di rappresentare l'ente algebrico con una curva piana dotata di soli punti multipli *ordinari*, od anzi di soli *nodi*, si trae subito l'esistenza d'infinite serie lineari g_n^1 che hanno i ν elementi di diramazione tutti *semplici*, ossia che non hanno altri punti multipli che punti doppi; non che l'esistenza d'infinite coppie di serie lineari g_n^1, g_m^1 che hanno in comune solo *coppie* di punti, non terne, ecc. Se però avvenisse che le due serie considerate g_n^1, g_m^1 avessero comune una s-pla di punti distinti — cioè se vi fossero sull'ente s punti comuni ad un gruppo dell'una serie e ad un gruppo dell'altra (il che significa che la curva γ avrebbe un punto s-plo) — è chiaro che quella s-pla darebbe $s(s-1)/2$ coppie di punti

---

[56] La (5) si trova alla fine del § 7 della citata Memoria del RIEMANN. — Si confronti anche, per quella formola, come per la rappresentazione contenuta nel precedente n.⁰ 32, il n.⁰ 4 delle *Ricerche di geometria sulle curve algebriche* del CASTELNUOVO.

comuni alle due serie, e quindi di tanto influirebbe nel numero d (allo stesso modo che un ordinario punto s-plo di γ equivale ad $s(s-1)/2$ punti doppi). — Se invece nel n.º 33 si avesse una g_n^1 dotata di un punto i-plo, si vede facilmente con noti procedimenti analitici che questo andrebbe contato come $i-1$ punti doppi nel numero complessivo ν, vale a dire che il gruppo (il valor corrispondente della funzione razionale z rappresentante la g_n^1) dotato di punto i-plo è un elemento di diramazione *d'ordine* $i-1$, che conta come $i-1$ elementi di diramazione *semplici*. Si può rappresentare l'ente algebrico con la curva γ in modo che quel punto sia semplice per questa: allora l'essere quel punto i-plo per la g_n^1 staccata su γ dal fascio di rette S significa che una retta di questo fascio ha in quel punto un contatto i-punto con γ: ed è ovvio che essa conterà precisamente come $i-1$ tangenti semplici condotte da S a γ (57). — Da ultimo si osservi come dalla formola (3) appaja che se la si volesse applicare anche a serie g_n^1 dotate di punti fissi, ognuno di questi dovrebbe contare nel numero ν come *due* punti doppi.

§ 9. Genere di una curva piana.

37. La formola (5) del paragrafo prec. dà il genere di una curva piana, d'ordine $m+n$ con un punto m-plo ed uno n-plo, ovvero d'ordine $m+n-1$ con un punto $(m-1)$-plo ed uno $(n-1)$-plo, ecc.: d indica il numero dei rimanenti punti doppi, ovvero la somma $\Sigma s(s-1)/2$ estesa ai rimanenti punti multipli.

Si può anche determinare il genere di una curva piana qualunque γ ricorrendo alla definizione del n.º 33, applicata alla serie lineare che è segata su essa da un fascio di rette col centro in un punto O del piano esterno a γ. Se n è l'ordine, n' la classe di questa curva, quella serie lineare sarà una g_n^1 ed avrà per elementi di diramazione quelli che corrispondono alle n' tangenti di γ che escono

(57) Del resto, basandosi su un teorema già citato (in nota al n.º 8) del sig. ZEUTHEN relativo alla multiplicità degli elementi uniti in una corrispondenza, si può nel ragionamento col principio di corrispondenza fatto al n.º 33 tener conto direttamente dei punti *multipli* (non solo *doppi*) delle due serie, ed allora in quelle formole viene a comparire in luogo di ν la somma $\Sigma(i-1)$ estesa a tutti i punti multipli (secondo i) della g_n^1, ecc. Qualche cosa di equivalente vien fatto appunto dal sig. ZEUTHEN nel n.º 4 della *Note sur les singularités des courbes planes* (Math. Ann., X, 1876).

da O. E non ne avrà altri se la curva non ha altre singolarità che punti multipli *ordinari*, cioè a tangenti distinte. In tal caso dunque la formola (3) del n.° 33 darà il genere di γ se per n si mette l'ordine e per ν la classe n' della curva.

Poniamo invece che γ abbia anche *singolarità superiori* (come cuspidi ecc.) [58]. Abbiamo già ricordato (n.° 11) che un punto singolare $P(x_0 y_0)$ di una curva piana algebrica γ è origine di uno o più rami o cicli od elementi che corrispondono ai vari sviluppi che in prossimità di esso si posson fare di $y - y_0$ in serie di potenze di $x - x_0$. Si consideri uno di questi rami e la corrispondente serie di potenze: il minimo denominator comune i degli esponenti fratti (ridotti ai minimi termini) di quella serie dicesi grado di moltiplicità od *ordine* del ramo (con la sola restrizione che la retta $x = 0$ non sia parallela alla retta t tangente in P al ramo stesso): esso non è altro che il numero delle intersezioni (infinitamente vicine a P) del ramo con una retta infinitamente vicina a P (ma faciente un angolo finito con t); o, come si suol dire più brevemente, il numero delle intersezioni che in P si hanno fra il ramo stesso ed una retta generica (diversa da t) passante per P. Considerando la curva γ, e quindi il ramo di essa, come inviluppo, si ha il carattere duale all'ordine i: la *classe* i' del ramo; cioè il numero delle tangenti al ramo (infinitamente vicine a t) che escono da un punto infinitamente vicino a t (ma a distanza finita da P); o più brevemente la molteplicità che ha la tangente t pel ramo considerato. Si sa [59] che il numero delle intersezioni coincidenti in P del ramo stesso con la sua tangente t, come pure il numero delle tangenti al ramo coincidenti in t che escono da P, sono uguali alla somma $i_1 = i + i'$ dell'ordine e della classe del ramo [60].

Come origine del ramo considerato d'ordine i il punto P rappresenterà un punto i-plo per la g_n^1 segata su γ dal fascio di rette O (mentre come origine di un *altro* ramo rappresenterebbe un *altro*

---

(58) Queste singolarità sono ampiamente trattate dal punto di vista che qui accenniamo nell'*Étude sur les points singuliers des courbes algébriques planes* che l'HALPHEN fece seguire all'edizione francese del trattato delle curve piane del SALMON (Paris, 1884). Ivi si trovano anche citati gl'importanti lavori precedenti di CAYLEY, STOLZ, SMITH, ecc. — Altri abbiamo già nominati prima, o citeremo tosto.

(59) V. ad es. il n.° 1 della Memoria del sig. ZEUTHEN citata al n.° 36, ed il n.° 7 del citato studio dell'HALPHEN.

(60) Per un ordinario punto semplice i caratteri i, i' sono (1, 1); per un flesso (1, 2); per una cuspide (2, 1); per un regresso di 2.ª specie (2, 2); ecc.

punto dell'ente: v. n.⁰ 11), e quindi (n.⁰ 36) equivarrà ad $i-1$ punti doppi di quella serie. L'influenza della retta OP nel numero complessivo ν degli elementi di diramazione della g_n^1 sarà dunque rappresentata da una somma di tante espressioni $(i-1)$ quanti sono i rami di γ che passano per P. Estendendo ciò a tutte le singolarità superiori di γ, cioè a tutti i suoi rami superlineari, si ha che in generale:

$$\nu = n' + \Sigma\,(i-1)\,. \tag{1}$$

E sostituendo questo valore nella formola (3) del n.⁰ 33 si ha:

$$p = \frac{n'}{2} - n + 1 + \frac{1}{2}\Sigma\,(i-1)\,, \tag{2}$$

oppure:

$$n' = 2(n+p-1) - \Sigma\,(i-1)\,. \tag{3}$$

38. Considerando le singolarità di una curva piana da un punto di vista un po' differente si può esprimere il genere p sotto una forma diversa dalla (2), facendo cioè comparire invece della classe n' di γ e degli ordini dei suoi punti di diramazione altri caratteri relativi ai punti singolari di γ.

Dall'applicazione di successive trasformazioni quadratiche piane a γ e dall'esame dell'effetto che esse hanno su un punto singolare qualunque di questa curva, il sig. NOETHER dedusse (61) che una singolarità superiore di γ si può riguardare come la riunione (in un senso preciso) di un certo numero di punti singolari *ordinari* a cui s'aggiunge pure un certo numero di *punti di diramazione* di γ (nel senso che si trova chiarito nei lavori citati, e che viene a coincidere col significato delle espressioni $(i-1)$ del n.⁰ preced.). Dicendo s la moltiplicità di uno dei punti singolari ordinari di cui la singolarità superiore è composta, l'abbassamento che questa produce nella classe è dato dalla somma di tutte le corrispondenti espressioni $s(s-1)$ e del numero dei punti di diramazione di γ che cadono in quella sin-

(61) *Ueber die algebraischen Functionen einer und zweier Variabeln*, Note 2 (Götting. Nachrichten, 1871). — *Ueber die singulären Werthsysteme einer algebraischen Function und die singulären Punkte einer algebraischen Curve* (Math. Ann., IX). — *Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Functionen* (Math. Ann., XXIII).

Veggasi pure l'importante Nota, d'indole più sintetica, del sig. BERTINI: *Sopra alcuni teoremi fondamentali delle curve piane algebriche* (Rend. Ist. Lomb., (2) 21, 1888).

golarità [62]. Segue che la classe di γ sarà data da:

(4)
$$n' = n(n-1) - \Sigma\, s(s-1) - \Sigma(i-1),$$

ove le somme si estendono a tutte le singolarità ordinarie ed a tutti i punti di diramazione che compongono i vari punti singolari di γ.

Ritornando dunque alla determinazione del genere, noi avremo sostituendo nella (1):

(5)
$$\nu = n(n-1) - \Sigma\, s(s-1),$$

e quindi per la definizione (n.⁰ 33) del genere p applicata alla g_n^1 del n.⁰ 37:

(6)
$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \Sigma \frac{s(s-1)}{2}.$$

In particolare se γ ha per soli punti multipli d nodi ed r cuspidi, sarà:

(7)
$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r.$$

39. Ritornando alla formola (3) del n.⁰ 37:

(3)
$$n' = 2(n + p - 1) - \Sigma(i-1),$$

da essa si trae per dualità:

$$n = 2(n' + p - 1) - \Sigma(i' - 1),$$

ed eliminando n' fra le due:

(8)
$$\Sigma(2i + i' - 3) = 3(n + 2p - 2),$$

od anche, introducendo il numero $i_1 = i + i'$ (n.⁰ 37) dei punti d'incontro che nel punto singolare hanno luogo fra il ramo (i, i') e la sua tangente:

(8′)
$$\Sigma(i + i_1 - 3) = 3(n + 2p - 2).$$

Se la curva γ non ha punti multipli che ordinari (cioè sempre $i = 1$) alla somma che compare nel 1.⁰ membro della (8) od (8′) contribuiscono i soli flessi. Vediamo così che il numero r' dei flessi per una curva piana di genere p e d'ordine n è *in generale*

(9)
$$r' = 3(n + 2p - 2);$$

ma in pari tempo vediamo che un ramo singolare qualunque che la curva venga ad avere contribuirà all'espressione del 2.⁰ membro per

(62) Cfr. Noether, Math. Ann., IX, § 7 e Math. Ann., XXIII, § 17.

$2i + i' - 3$, ossia $i + i_1 - 3$ unità, conta cioè per altrettante unità nel numero complessivo r' dei flessi quale sarebbe dato dalla (9).

La formola (7) del n.⁰ prec. dà per dualità, chiamando d' il numero delle tangenti doppie non stazionarie:

$$d' = \frac{(n'-1)(n'-2)}{2} - r' - p .$$

Supponga si γ dotata solo di d nodi senz'altri punti multipli (*generale* nel suo ordine e genere), sicchè la (3) si ridurrà a

$$n' = 2(n + p - 1),$$

e si sostituisca questo valore di n' e quello di r' dato dalla (9). Verrà:

$$d' = 2(n + p - 2)(n + p - 3) - 4p . \tag{10}$$

Aggiungasi che in tal caso (essendo $r = 0$) la (7) diventa:

$$d = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p . \tag{11}$$

Tutte queste formole si possono interpretare in un modo più generale del consueto, considerando la curva piana come imagine di una g_n^2 qualunque *non composta* (perchè la curva γ si suppose che non fosse *multipla*) dell'ente algebrico di genere p (v. n.⁰ 28). Così la (11) dà *il numero delle coppie neutre della* g_n^2 (coppie di punti per cui passano infiniti gruppi); la (10) *il numero dei gruppi della* g_n^2 *dotati di due punti doppi distinti*; la (9) *il numero dei punti tripli della* g_n^2. Ciò per una g_n^2 *generale* dell'ente algebrico di genere p: ma se la serie ha singolarità speciali si dovrà tenerne conto in quei numeri. Così se un punto dell'ente algebrico è i-plo per gli ∞^1 gruppi della g_n^2 che lo contengono, ma per uno di essi è multiplo secondo i_1 ($> i$), allora per avere i punti tripli della g_n^2 che cadono fuori di quello, si dovrà togliere $i + i_1 - 3$ unità dall'espressione (9). Ecc.

Estenderemo ora successivamente alcuni risultati degli ultimi due paragrafi.

§ 10. **Formola di** ZEUTHEN [63].

40. Nel § 8 la definizione del genere di un ente algebrico ci permise di concludere subito l'invariabilità di esso per trasformazioni

---

[63] V. *Nouvelle démonstration de théorèmes sur des séries de points correspondants sur deux courbes* (Math. Ann., III, 1871, p. 150).

birazionali, perchè queste mutano una serie lineare ∞^1 in una serie lineare ∞^1. Ora questo fatto vale anche (n.° 14) per una trasformazione, che sia razionale *in un senso* solo. Vediamo di profittarne.

Sia fra due enti algebrici γ, γ' dei generi p, p' una corrispondenza algebrica $(1, \mu)$, sicchè le coordinate dei punti di γ sian funzioni razionali di quelle dei punti omologhi di γ'; e sianvi su γ y punti di diramazione, cioè punti per ognun dei quali due fra i μ punti omologhi di γ' coincidono. Ad una g_n^1 di γ con ν punti doppi corrisponderà su γ' una $g_{\mu n}^1$ composta (con l'involuzione dei gruppi di μ punti corrispondenti ai singoli punti di γ), la quale avrà per punti doppi i $\mu\nu$ punti omologhi di quei ν ed inoltre gli y punti nominati prima, che corrispondono, contati due volte, ai punti di diramazione di γ (64). Applicando dunque a queste due serie ∞^1 sugli enti γ, γ' dei generi p, p' la definizione del genere, ossia la formola (4) del n.° 33, avremo:

$$\nu = 2n + 2(p-1)$$
$$y + \mu\nu = 2\mu n + 2(p'-1).$$

Di qui si eliminano simultaneamente n e ν e si ha:

(1) $$y = 2(p'-1) - 2\mu(p-1).$$

Questa formola è molto importante. Da essa segue:

$$p'-1 \geq \mu(p-1),$$

sicchè ad es. se fosse $p = p' > 1$ dovrebb'essere $\mu = 1$, cioè la corrispondenza fra i due enti sarebbe *biunivoca* (65). Si può anche dire che la (1) dà il *numero* y *dei punti doppi di un'involuzione di grado* μ *e di genere* p *sopra un ente algebrico di genere* p'. Oppure anche il *numero* y *dei punti di diramazione che un ente algebrico di genere* p *ha quando, contandolo* μ *volte, lo si riguarda come un ente algebrico di genere* p'.

41. Si può subito dedurre dalla (1) la *formola di* ZEUTHEN più generale. Abbiasi fra i due enti algebrici γ, γ' dei generi p, p' una corrispondenza (x, x') con y, y' punti di diramazione (tenendo conto

(64) Se un punto di diramazione di γ è tale che, non solo due, ma i fra i suoi μ omologhi su γ' coincidono in un punto, questo sarà i-plo per la $g_{\mu n}^1$, cioè (n.° 36) conterà come $i-1$ punti doppi. Dunque quel punto di diramazione si dovrà riguardare come multiplo secondo $i-1$, cioè conterà come $i-1$ nel numero complessivo y.

(65) Nota osservazione del sig. WEBER (Journal für Math., 76, 1873, p. 345).

delle loro moltiplicità: v. n.⁰ preced., in nota); e consideriamo l'ente algebrico ausiliario Γ di genere π costituito dalle coppie di punti omologhi di γ, γ': rappresentato ad es. se γ, γ' son curve dalle rette congiungenti i punti omologhi (cfr. n.⁰ 21). Sarà γ con Γ in corrispondenza $(1, x')$ con y punti di diramazione su γ; sicchè applicando la (1) avremo:

$$y = 2(\pi - 1) - 2x'(p - 1).$$

Similmente da γ' e Γ in corrispondenza $(1, x)$ con y' punti di diramazione si ha:

$$y' = 2(\pi - 1) - 2x(p' - 1).$$

E sottraendo si ottiene appunto la detta formola generale:

$$y - y' = 2x(p' - 1) - 2x'(p - 1) \text{ [66]}. \tag{2}$$

Come si vede, questo ragionamento equivale a supporre che nel n.⁰ 40, ove fra i due enti γ, γ' dei generi p, p' si considerava una corrispondenza $(1, \mu)$, l'ente γ' sia *multiplo*, ad es. secondo μ_1, sicchè propriamente si riduca ad un ente γ_1 di un certo genere p_1 da contarsi μ_1 volte. La formola (1) naturalmente rimane ancora applicabile (potendosi ad es. imaginare che γ' si sostituisca con un ente di genere p', equivalente a γ' ma *semplice*); ma di più si può applicare alla corrispondenza $(1, \mu_1)$ fra γ_1 e γ'; e così si ottiene la (2) per la corrispondenza (μ, μ_1) fra γ_1 e γ.

---

[66] La si poteva anche stabilire senza passare per la (1), che ne è un caso particolare, considerando su γ e γ' due serie $g_n^1, g_{n'}^1$, alle quali corrisponderanno su Γ due serie $g_{nx'}^1, g_{n'x}^1$; ed applicando a queste il teorema espresso dalla formola (2) del n.⁰ 33. Od anzi, più direttamente ancora, nello stesso modo con cui si dimostrò quel teorema, vale a dire applicando il principio di corrispondenza entro la g_n^1 o la $g_{n'}^1$, a determinare il numero d dei gruppi dell'una serie che contengono due punti di cui risp. due punti omologhi sono in un gruppo dell'altra serie. Ciò dà per d due valori, dalla cui uguaglianza si trae una relazione, che per $x = x' = 1$ coincide colla (2) del n.⁰ 33, ed in generale, posta la definizione del genere, diventa appunto la formola (2) di sopra.

Avverto che il concetto comune a questi ragionamenti si trova già nella Nota del sig. SCHUBERT: *Ueber die Erhaltung des Geschlechts bei zwei ein-eindeutig auf einander bezogenen Plancurven* (Math. Ann., XVI), ove in sostanza le $g_n^1, g_{n'}^1$ son segate su due curve piane in corrispondenza biunivoca mediante due fasci di rette. Nelle dimostrazioni più antiche dei sig.ⁱ BERTINI (Giornale di matem., 7, 1869) e ZEUTHEN dell'invariabilità del genere le serie stesse erano trasportate sopra un ente ausiliario: la curva generata da quei due fasci di rette. In quelle dei sig.ⁱ CREMONA (Mem. Acc. Bologna, 1866; *Preliminari*, ecc., n.⁰ 54) e VOSS (Götting. Nachrichten, 1873, p. 414) l'ente ausiliario è invece risp. la rigata o l'inviluppo piano delle rette congiungenti i punti omologhi delle due curve piane.

§ 11. Punti $(r+1)$-pli di una serie lineare ∞^r.

42. Il numero dei punti doppi di una g_n^1 sopra un ente algebrico di genere p è dato (n.⁰ 33) da

$$2(n+p-1).$$

Il numero dei punti tripli di una g_n^2 (n.⁰ 39) da

$$3(n+2p-2).$$

In generale, indicando con N_r il numero dei punti $(r+1)$-pli di una g_n^r, dimostreremo facilmente che il suo valore è

$$N_r = (r+1)(n+rp-r).$$

Per comodità rappresentiamo la g_n^r (supposta priva di punti fissi) con una curva C d'ordine n di S_r. Allora (cfr. n.⁰ 28) il numero cercato N_r sarà quello degl'iperpiani a contatto $(r+1)$-punto, cioè stazionari od iperosculatori, di C; mentre N_{r-1} sarà il numero degl'iperpiani osculatori (a contatto r-punto) uscenti da un punto dato (cioè il numero dei punti r-pli della g_n^{r-1} segata su C dagli iperpiani che passano per quel punto), ossia la *classe* di C; N_{r-2} sarà il numero degl'iperpiani a contatto $(r-1)$-punto uscenti da una data retta, cioè l'ordine della varietà M_{r-1} costituita dagli ∞^1 S_{r-2} osculatori a C nei suoi vari punti; ecc. — Consideriamo come imagine dell'ente algebrico di genere p la ∞^1 degl'iperpiani osculatori a C. I gruppi degli N_{r-1} iperpiani osculatori che escono dai singoli punti di una retta a fissata ad arbitrio formeranno una serie lineare ∞^1; nella quale, come facilmente si vede, sono elementi doppi gli N_r iperpiani stazionari, non che gl'iperpiani osculatori a C in quegli N_{r-2} punti i cui S_{r-2} osculatori incontrano a (giacchè ogni S_{r-2} osculatore si può riguardare come l'intersezione di due iperpiani osculatori infinitamente vicini). Dunque, applicando la formola ricordata che dà il numero dei punti doppi di una serie lineare ∞^1, sarà:

$$N_r + N_{r-2} = 2(N_{r-1}+p-1),$$

ossia:

$$N_r = 2N_{r-1} - N_{r-2} + 2p - 2. \tag{1}$$

Da questa formola ricorrente, basandosi sui valori già ottenuti per N_r nei casi di $r = 1, 2$, si trae appunto:

(2) $$N_r = (r + 1)(n + rp - r) \quad [67].$$

43. La stessa formola ricorrente (1) può servire a determinare l'abbassamento che nel valore generale (2) di N_r produce un punto singolare qualunque di C, cioè un punto dell'ente che sia comunque singolare per la g_n^r. Per un punto P della curva C di S_r, considerato su un determinato *ramo* o *ciclo* di questa curva (cioè come imagine di un determinato elemento dell'ente algebrico), si hanno r caratteri analoghi a quelli definiti al n.° 37 pei rami di curve piane [68]: cioè l'ordine i di multiplicità del punto (ossia del ramo), il numero i_1 $(> i)$ dei punti d'incontro coincidenti in P del ramo con la retta tangente in P, il numero i_2 $(> i_1)$ dei punti d'incontro coincidenti in P del ramo col piano osculatore in $P, \ldots$, infine i numeri i_{r-2} $(> i_{r-3})$, i_{r-1} $(> i_{r-2})$ dei punti d'incontro in P del ramo con l'S_{r-2} e con l'iperpiano osculatore in P. Riferendosi all'ente algebrico qualunque ed alla g_n^r, il punto P rappresenta la singolarità seguente (cfr. n.° 28): *un punto dell'ente che è* i*-plo per gli* ∞^{r-1} *gruppi (generici) della* g_n^r *che lo contengono, è* i_1*-plo per* ∞^{r-2} *gruppi,*

---

(67) Questa dimostrazione semplicissima della formola (2) non ricorre ad altro, in sostanza, che alla definizione del genere (poichè anche il caso prima trattato di $r = 2$ derivava dallo stesso concetto). Una dimostrazione, pure assai semplice, e basata sulla ricerca successiva delle tangenti stazionarie di una curva piana, dei piani stazionari di una curva sghemba, ecc., è stata data dal sig. Brill al principio della Nota: *Ueber zwei Berührungsprobleme* (Math. Ann., IV, 1871). E la stessa formola si ritrova (ancora come numero degl'iperpiani stazionari di una curva) fra quelle del Veronese (Math. Ann., XIX, p. 201); e poi al n.° 7 delle *Ricerche di geometria sulle curve algebriche* del Castelnuovo (ove è ottenuta segando con un piano fisso, anzi che con la retta *a*); ecc. — Essa non è che un caso particolare di quella generalissima del sig. De Jonquières (*Mémoire sur les contacts multiples d'ordre quelconque*, etc., Journal für Math., 66, 1866) che dà il numero dei gruppi di una g_n^r aventi un punto multiplo secondo k_1, uno multiplo secondo $k_2, \ldots,$ ove $\Sigma(k - 1) = r$ (v. nel seguito il n.° 49; cfr. anche Cayley, *On the Curves wich satisfy given conditions*, Phil. Trans., 158, 1867, n.i 74 e seguenti).

(68) Essi corrispondono a caratteri degli sviluppi in serie che rappresentano il ramo di curva considerato; e compajono già ad esempio (v. n.° 87) nel *Lückensatz* del Weierstrass. Cfr. anche i lavori citati al n.° 11, e: Fine, *On the Singularities of Curves of Double Curvature*, Amer. Journal, 8, 1886; Fine, *A Theorem respecting the Singularities of Curves of Multiple Curvature*, ibid., 9, 1887; Del Pezzo, *Intorno ai punti singolari delle curve algebriche*, Rend. Acc. Napoli, 1893. — I numeri $i, i_1 - i, i_2 - i_1, \ldots, i_{r-2} - i_{r-3}, i_{r-1} - i_{r-2}$ nominati poi nel seguito son da considerarsi come i successivi *ranghi* del ramo o ciclo: il primo e l'ultimo sono l'*ordine* e la *classe*.

i_2-plo per ∞^{r-3} gruppi, ..., i_{r-2}-plo per ∞^1 gruppi, e i_{r-1}-plo per un gruppo. — Ora l'abbassamento che una tal singolarità produce nel valore (2) di N_r sappiamo già (n.[i] 36 e 39) che per $r = 1$ è $i - 1$, e per $r = 2$ è $i + i_1 - 3$. Dico che in generale esso è

$$i + i_1 + \ldots + i_{r-1} - \frac{r(r+1)}{2}. \tag{3}$$

Ammetteremo che ciò valga per valori minori di r, e dimostreremo che è vero per r.

A questo fine osserviamo che i caratteri introdotti si possono anche interpretare in quest'altro modo. Come il punto P è i-plo per la curva C (o meglio pel ramo considerato), così la tangente considerata in P è multipla secondo $i_1 - i$ nella superficie sviluppabile luogo delle tangenti a C (o meglio nella falda di questa sviluppabile che proviene da quel ramo); il piano osculatore in P è multiplo secondo $i_2 - i_1$ nella M_3 luogo dei piani osculatori a C; ...; l'S_{r-2} osculatore in P è multiplo secondo $i_{r-2} - i_{r-3}$ nella M_{r-1} luogo degli S_{r-2} osculatori; infine l'iperpiano osculatore in P è multiplo secondo $i_{r-1} - i_{r-2}$ per la ∞^1 degl'iperpiani osculatori di C, cioè conta $i_{r-1} - i_{r-2}$ volte nel numero complessivo degl'iperpiani osculatori uscenti da un suo punto, vale a dire assorbe $i_{r-1} - i_{r-2}$ degl'iperpiani osculatori di C uscenti da un punto generico di S_r, quando questo punto vada a cadere su quell'iperpiano. Ciò risulta in modo intuitivo se si considera uno spazio osculatore in P, S_k, come congiungente lo spazio osculatore immediatamente inferiore, S_{k-1}, ad un punto di C infinitamente vicino a P: quell'S_k apparirà multiplo secondo $i_k - i_{k-1}$, perchè tanti sono i punti infinitamente vicini a P che esso congiunge all'S_{k-1}. Ma possiamo vedere la cosa in modo più rigoroso, ad es. per quanto si riferisce all'iperpiano osculatore, considerando la curva C' projezione di C da un punto generico O sopra un iperpiano S_{r-1}: gli S_{r-2} stazionari di C' son le tracce degl'iperpiani osculatori a C uscenti da O. In generale la curva C' avrà nel punto P' projezione di P una singolarità di caratteri $i, i_1, \ldots, i_{r-2}$; e ne deriva un abbassamento nel numero dei suoi S_{r-2} stazionari espresso dalla formola (3) dove in luogo di r si ponga $r - 1$. Ma se il centro O di projezione va sull'iperpiano osculatore in P a C, l'ultimo carattere della singolarità P' di C' si muta in i_{r-1}; e per conseguenza quell'abbassamento s'accresce di $i_{r-1} - i_{r-2}$ unità. Dunque tanti sono appunto gl'iperpiani osculatori a C uscenti da O che vengono a coincidere nell'iperpiano osculatore in P.

Ciò premesso, rifacciamoci al ragionamento con cui nel n.° prec. si ottenne la formola (1), cioè alla considerazione della serie lineare ∞^1 dei gruppi d'iperpiani osculatori a C uscenti dai singoli punti della retta fissa a. Noi abbiamo per ipotesi che la singolarità P di C produce nell'ordine N_{r-1} della detta serie lineare un abbassamento espresso da (3). ove r si muti in $r-1$. Così pure nel computo degli elementi doppi di quella serie noi abbiamo un analogo abbassamento nel numero N_{r-2} di quelli che provenivano dagli S_{r-2} osculatori a C che incontravano la retta a (poichè l'S_{r-2} osculatore in P non incontrerà in generale a, e deve quindi esser sottratto). Fatte queste riduzioni nel 2.° membro della (1), il numero N_r così modificato esprimerà il numero dei rimanenti elementi doppi di quella serie lineare: elementi doppi che non erano altro che gl'iperpiani stazionari di C. Ora l'iperpiano osculatore in P assorbe, come abbiam visto, $i_{r-1}-i_{r-2}$ degl'iperpiani osculatori uscenti dal suo punto d'incontro con a, ossia è multiplo secondo $i_{r-1}-i_{r-2}$ per la serie lineare: e però (n.° 36) assorbirà $i_{r-1}-i_{r-2}-1$ elementi doppi della serie stessa. Dunque concludiamo che per effetto della singolarità P il numero degl'iperpiani stazionari quale sarebbe espresso dalla (2), subisce, *se si vuol togliere l'iperpiano osculatore in* P, la riduzione complessiva

$$\left[i_{r-1}-i_{r-2}-1\right]+2\left[i+i_1+\ldots+i_{r-2}-\frac{(r-1)\,r}{2}\right]-$$
$$-\left[i+i_1+\ldots+i_{r-3}-\frac{(r-2)(r-1)}{2}\right]=i+i_1+\ldots+i_{r-1}-\frac{r(r+1)}{2},$$

che è appunto l'espressione (3) (69).

Quando il punto P stesse su più di un ramo della curva C, per ciascun ramo la formola (3) darebbe l'influenza che esso ha sul

(69) Nella citata formola del VERONESE, che dà il numero degl'iperpiani stazionari, si tien conto dell'influenza che su quel numero hanno le tangenti stazionarie, i piani stazionari, ...; sicchè si hanno casi particolari dell'abbassamento generale espresso dalla (3). — Questo abbassamento generale si trova poi calcolato, pel caso della *serie canonica* (di cui diremo in seguito) sull'ente di genere p, nella Memoria del sig. HURWITZ: *Ueber algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich* (Math. Ann., XLI, 1892; v. pp. 408-9, da confrontarsi col n.° 87 del presente scritto): mentre pel caso $p=0$, come influenza di una singolarità data nel numero dei punti $(r+1)$-pli di un'involuzione con fra i punti di una retta, è dato dal sig. GUCCIA nella Nota: *Due proposizioni relative alle involuzioni di specie qualunque, dotate di singolarità ordinarie* (Rend. Palermo, 1893: v. il Lemma II).

numero complessivo degl'iperpiani stazionari; sicchè si dovrebbero sommare gli abbassamenti che così sarebbero prodotti dai vari rami. — Se invece si considera la questione in modo più astratto, cioè come relativa ad un ente algebrico ed ai punti $(r+1)$-pli di una g_n^r di questo, l'influenza di un punto dell'ente, singolare per quella serie, sul numero di quei punti multipli sarà data dalla (3) *senz'altro*, perchè al punto dell'ente corrisponde un ramo ben determinato della curva C.

44. Nella dimostrazione (n.° 42) della formola (2) per il numero dei punti $(r+1)$-pli di una g_n^r sull'ente algebrico di genere p si è supposto che la serie stessa non fosse composta (cioè che la curva imagine C non fosse multipla). È facile vedere però che la stessa formola sussiste anche quando la g_n^r è composta mediante un'involuzione, purchè si computi nel modo indicato dalla (3) del n.° prec. l'influenza dei punti doppi di quell'involuzione sul numero che si cerca.

Sia μ il grado e π il genere dell'involuzione con cui è composta la g_n^r; sicchè, posto $n = m\mu$, si avrà entro l'ente γ_1 i cui elementi sono i gruppi di μ punti di quell'involuzione, una serie lineare g_m^r i cui gruppi formano appunto i gruppi di punti della serie g_n^r dell'ente algebrico primitivo γ. Il numero degli elementi $(r+1)$-pli di quella g_m^r (che possiam supporre semplice) sull'ente γ_1 di genere π sarà, per la (2):

$$(r+1)(m+r\pi-r),$$

ed ognuno di essi si comporrà di μ punti di γ $(r+1)$-pli per un gruppo della g_n^r. Se poi consideriamo in questo ente un punto P che sia doppio per l'involuzione ed i gruppi della g_m^r di γ_1 che contengono l'elemento passante per P (che è un gruppo di μ punti di γ di cui due coincidenti in P) $1, 2, \ldots, r-1$, r volte, noi vediamo che P è multiplo secondo $2, 4, \ldots, 2(r-1)$, $2r$ per $\infty^{r-1}, \infty^{r-2}, \ldots, \infty^1, \infty^0$ ossia 1, gruppi della g_n^r; sicchè stando alla formola (3) dovrebbe influire nel numero dei punti $(r+1)$-pli di questa serie per

$$2+4+\ldots+2(r-1)+2r-\frac{r(r+1)}{2}=\frac{r(r+1)}{2}.$$

Ora questi punti P doppi per l'involuzione di grado μ e genere π sono, per la formola di Zeuthen (n.° 40):

$$2(p-1)-2\mu(\pi-1).$$

Dunque in complesso troviamo come numero dei punti $(r+1)$-pli della g_n^r

$$\mu(r+1)(m+r\pi-r)+\frac{r(r+1)}{2}[2(p-1)-2\mu(\pi-1)]=$$

$$=\mu m(r+1)+r(r+1)(p-1)=(r+1)(n+rp-r),$$

sicchè riman valida la (2) del n.º 42.

45. La detta formola del n.º 42, completata con le osservazioni precedenti, assegna tutti i successivi *ranghi* di una curva di qualsiasi spazio, dati l'ordine ed il genere (e i caratteri dei punti singolari): o dualmente, dati il genere e la classe. Più in generale essa dà immediatamente il numero dei punti in cui una data curva ha il contatto più elevato possibile con varietà di un dato sistema lineare.

Come esempio consideriamo i *punti sestattici* di una curva piana γ di genere p e d'ordine n, cioè i punti in ognun dei quali γ ha contatto sipunto con una conica. Le ∞^5 coniche del piano segano su γ (supposto $n>2$) una serie lineare g_{2n}^5: i punti in discorso sono punti sestupli di questa serie. Il loro numero sarebbe quindi (n.º 42)

$$12n+30(p-1). \tag{4}$$

Ma si posson fare delle riduzioni, se si voglion togliere i punti singolari (flessi, cuspidi, ecc.) di γ: ed il n.º 43 ci permette di determinare queste riduzioni. La curva abbia in un punto P un ramo o ciclo d'ordine i e classe i' (incontrato dunque dalla tangente t in $i+i'$ punti coincidenti in P). Le ∞^4 coniche passanti per P dànno in quella serie lineare gruppi per cui P è i-plo. Se poi consideriamo una conica tangente in P a t, delle $2n$ intersezioni sue con γ cadranno in P $i+i'$ se $i'\leq i$, e $2i$ se $i'\geq i$ (70). Se $i'<i$ abbiamo dunque nella g_{2n}^5 ∞^3 gruppi con P multiplo secondo $i_1=i+i'$: fra questi poi gli ∞^2 gruppi che son dati dalle coppie di rette uscenti da P hanno in questo punto la multiplicità superiore $i_2=2i$; e se una retta della coppia è t (∞^1 gruppi) si ha in P la multiplicità $i_3=2i+i'$; e finalmente pel gruppo dato dalla

(70) Ciò si verifica immediatamente sostituendo nel 1.º membro dell'equazione della conica (o curva qualunque) tangente in P a t le serie di potenze che danno le coordinate del ramo considerato di γ ed osservando qual è l'esponente minimo che comparirà nel risultato della sostituzione.

conica ridotta a t contata due volte, P è multiplo secondo $i_4 = 2i + 2i'$. — Se invece $i' > i$ avremo nella g^5_{2n} ∞^3 gruppi per cui P è multiplo secondo $i_1 = 2i$; e poi ∞^2 gruppi dati dalle coniche spezzate in t ed un'altra retta qualunque, pei quali P avrà la maggior multiplicità $i_2 = i + i'$; e se la seconda retta passa per P (∞^1 gruppi), o se coincide addirittura con t (un gruppo), ancora come prima avremo in P le multiplicità $i_3 = 2i + i'$, e $i_4 = 2i + 2i'$. — Se finalmente $i' = i > 1$, le coniche tangenti in P a t dànno ancora nella g^5_{2n} ∞^3 gruppi per cui P ha la multiplicità $i_1 = 2i$; ma le ∞^2 coniche degeneri che, dopo quelle, si consideravano nei casi precedenti, non darebbero multiplicità maggiori: si devon dunque considerare le ∞^2 coniche che toccano t in P ed inoltre passano per un punto di γ (del ramo) infinitamente vicino a P. La multiplicità di P per gli ∞^2 gruppi che così si hanno sarà *in generale*: $i_2 = 2i + 1$. Dopo ciò le coniche spezzate in t ed una retta passante per P (∞^1), od in particolare coincidente con t daranno ancora le multiplicità ordinatamente superiori $i_3 = 3i$, $i_4 = 4i$. — Ed ora sostituendo i valori trovati nella (3), cioè:

$$i + i_1 + \ldots + i_4 - 15,$$

si ha che: un ramo d'ordine i e classe i' diversi fra loro abbassa il numero (4) dei punti sestattici di

$$8i + 4i' - 15$$

unità (ad es. un flesso di 1 unità, una cuspide di 5); mentre un ramo d'ordine e classe uguali fra loro $i > 1$ lo abbassa *in generale* di $12i - 14$. — Naturalmente si avranno altri valori per questi abbassamenti se la formola (4) si modifica eliminandone il genere mediante la (2) del n.º 37 o la duale ([71]).

([71]) Indicando con M il numero dei rami d'ordine uguale alla classe, e supposto che questi rami non presentino particolarità (v. sopra) alle ∞^2 coniche che li osculano, abbiamo ottenuto pel numero dei punti sestattici che cadono fuori dei punti singolari:

$$12n + 30(p-1) - \Sigma(8i + 4i' - 15) - M,$$

ove la somma si estende a tutti i rami pei quali i ed i' non sono entrambi uguali ad 1. Sostituendo la (2) del n.º 37 quel numero diventa (n' essendo la classe di γ):

$$15n' - 18n + \Sigma(7i - 4i') - M;$$

e sotto questa forma in sostanza il numero dei punti sestattici si trova (ottenuto per mezzo dell'invariante differenziale che caratterizza le coniche) nel n.º 32 del citato *Étude sur les points singuliers* etc. dell'HALPHEN; v. anche il precedente lavoro dello stesso Autore *Sur le contact des courbes planes avec les coniques et les courbes du troisième degré* (Bull. Soc. Math. de France, 4, 1875).

È chiaro poi che si posson determinare in modo analogo i punti in cui una curva piana o sghemba ha contatti superiori con cerchi, sfere, curve o superficie del 3.º ordine, ecc.

§ 12. Formola di corrispondenza di CAYLEY e BRILL.

46. Possiamo applicare il risultato del n.º 42 a ritrovare per una via nuova e semplice la nota formola del sig. CAYLEY che dà il numero dei punti uniti di una corrispondenza algebrica (α, α') sopra un ente algebrico di genere p, nel caso *particolare* che questa corrispondenza si possa rappresentare con UNA (72) equazione:

$$f(x, x') = 0,$$

fra le coordinate dei punti omologhi x, x', la quale, dato x, non sia soddisfatta da altri punti dell'ente algebrico che dagli α' corrispondenti punti x' ed eventualmente da punti fissi dell'ente e dallo stesso punto x contato un certo numero $\gamma\ (\geq 0)$ di volte. Considerando un sistema lineare di varietà che comprenda tutte quelle rappresentate (nelle coordinate variabili x') dalla detta equazione quando per x si pongono successivamente i vari punti del dato ente, si vede subito che il detto caso particolare di corrispondenza (α, α') è quello in cui *i gruppi composti degli* α' *punti* x' *corrispondenti ad uno stesso punto* x *dell'ente e di questo punto* x *contato* $\gamma\ (\geq 0)$ *volte sono* ∞^1 *gruppi di una serie lineare d'ordine* $\alpha' + \gamma$. Dimostreremo che il numero U dei punti uniti è dato da:

$$U = \alpha + \alpha' + 2\gamma p \text{ (73)}.$$

---

(72) Dal n.º 6 si trae che una corrispondenza (α, α') fra due enti algebrici (distinti o no) si può sempre rappresentare con DUE equazioni fra le coordinate dei punti omologhi. Ad es. se si tratta di due curve piane e si projettano i punti omologhi risp. mediante i raggi x, x' di due fasci, questi saran legati da un'equazione $f(x, x') = 0$; e similmente con altri due fasci di raggi y, y' si ha un'altra equazione $\varphi\ (y, y') = 0$. E si può sempre supporre (mutando eventualmente i fasci, cioè le coordinate), come subito si vede, che due punti $(x\, y)$, $(x'\, y')$ delle due curve i quali verifichino quelle due equazioni (oltre quelle delle curve stesse) siano in generale omologhi nella data corrispondenza.

(73) Questa formola è stata data per la prima volta dal sig. CAYLEY: *Note sur la correspondance de deux points sur une courbe* (Comptes rendus, 62, 1866; v. anche i Proc. Lond. Math. Soc. dello stesso anno). Il sig. BRILL ne diede poi dimostrazioni complete nelle Note: *Ueber Entsprechen von Punktsystemen auf einer Curve* (Götting. Nachrichten, 1871; e Math. Ann., VI, 1872); *Ueber die Correspondenzformel* (Math. Ann., VII, 1874). V. anche quella più recente dello stesso sig.

La minima serie lineare contenente quei gruppi di $n' = \alpha' + \gamma$ punti sia una $g^r_{n'}$, che supporremo *semplice*. Allora l'ente algebrico si potrà rappresentare con una curva semplice C di genere p e d'ordine n' appartenente ad S_r; e per ogni punto x di C gli α' punti x' omologhi saranno le ulteriori intersezioni di C con un iperpiano determinato avente in x un contatto γ-punto con C, vale a dire passante per l'$S_{\gamma-1}$ osculatore in x a C (donde appare che $\gamma \leq r$). Si hanno così ∞^1 iperpiani passanti risp. per gli ∞^1 $S_{\gamma-1}$ osculatori di C. Poichè ad ogni punto x' corrispondono α punti x, per ogni punto P di C — considerato come punto x' — passeranno α iperpiani di quella ∞^1; mentre per lo stesso P — considerato come punto x — passerà (se $\gamma > 0$) l'iperpiano inerente all'$S_{\gamma-1}$ osculatore in P: però siccome i punti di C si posson riguardare come intersezioni di γ spazi $S_{\gamma-1}$ osculatori infinitamente vicini (ossia sono γ-pli per la M_γ luogo di quegli ∞^1 $S_{\gamma-1}$), così si può dire che in quell'ultimo iperpiano cadono γ iperpiani del sistema infinitamente vicini (74); onde si conchiude che per P (e quindi anche per un punto qualunque di S_r) passano in tutto $\alpha + \gamma$ iperpiani del sistema, ossia che questo è di classe $n = \alpha + \gamma$. Questo sistema ∞^1 d'iperpiani essendo in corrispondenza biunivoca coi punti x di C sarà un ente di genere p, che si potrà anche assumere in luogo di C come rappresentante dell'ente algebrico dato. Allora l'ultima considerazione svolta ci fa vedere che *il gruppo degli α punti* x *dell'ente corrispondenti ad un dato punto* x', *preso insieme con questo punto* x' *contato γ volte, dà un gruppo variabile entro una serie lineare d'ordine* n $= \alpha + \gamma$ *e di dimensione* r: la serie lineare che entro quel sistema ∞^1 d'iperpiani è staccata dai punti di S_r (vale a dire è costituita dai gruppi degl'iperpiani del sistema passanti pei vari punti di S_r) (75).

BRILL: *Ueber algebraische Correspondenzen* (Math. Ann., XXXI, 1888). — Lo studio generale delle corrispondenze algebriche *d'ogni specie* sopra un ente algebrico qualunque, ed il calcolo del numero dei loro punti uniti, furon poi fatti dal sig. HURWITZ nella Nota: *Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip* (Berichte sächs. Ges. d. W., 1886; e Math. Ann., XXVIII).

(74) La considerazione duale riescirà forse più intuitiva a qualche lettore.

(75) Tale serie è certo di dimensione r e non minore; perchè l'ipotesi contraria significherebbe che tutti quegli ∞^1 iperpiani passano per un punto (od uno spazio): dal che seguirebbe che avrebbe dimensione minore di r la serie lineare d'ordine n' prima considerata contenente ogni punto x contato γ volte ed i suoi α' punti x' omologhi.

Se, riferendoci al detto sistema di classe n d'iperpiani, diciamo che un punto, retta, ..., S_i, ... è *del sistema* quando si può determinare come l'intersezione dell'opportuno numero ($r - i$ nel caso dell'S_i) d'iperpiani del sistema infinitamente vicini fra loro, avremo nei vari spazi del sistema gli analoghi (duali) dei successivi spazi osculatori di una curva. Ed è chiaro ad es. che gli ordini delle ∞^1 di $S_{r-\gamma}$ e di $S_{r-\gamma-1}$ del sistema saranno risp. i numeri degli elementi γ-pli, $(\gamma+1)$-pli di una g_n di dimensione $\gamma - 1$, o γ contenuta entro la g_n^r che nel sistema d'iperpiani di classe n e genere p è staccata dai punti di S_r: ossia i numeri $N_{\gamma-1}$, N_γ, adoperando ancora il simbolo del n.^{0} 42.

Ogni punto P di C sta, come già rilevammo, su γ iperpiani infinitamente vicini del sistema, cioè su un $S_{r-\gamma}$ del sistema. Ed un punto unito della corrispondenza fra x ed x' sarà un punto pel quale accade che uno degli α iperpiani del sistema uscenti da esso e distinti in generale da quelli (v. sopra) viene pure a coincidere con essi: ossia un punto che sta su ($\gamma+1$ iperpiani infinitamente vicini cioè su) un $S_{r-\gamma-1}$ del sistema. Ogni $S_{r-\gamma}$ del sistema contiene un determinato punto P di C ed un determinato $S_{r-\gamma-1}$ del sistema: la questione che ci occupa consisterà nel trovare quante volte quel punto e quell'$S_{r-\gamma-1}$ sono incidenti. A tal fine da uno spazio fisso O_γ di dimensione γ projettiamo ogni punto P di C sul corrispondente $S_{r-\gamma-1}$ del sistema: avremo un punto P_1 che descriverà una curva C_1, e si tratterà di trovare le coincidenze di P e P_1, cioè i punti d'incontro delle due curve C e C_1. Consideriamo la rigata descritta dalla retta PP_1: essa incontra O_γ secondo una curva C_2 che è il luogo delle traccie su questo spazio degli ∞^1 $S_{r-\gamma}$ del sistema, e quindi d'ordine $N_{\gamma-1}$; dunque l'ordine di quella rigata, per la quale C e C_2 sono direttrici (semplici) prive di punti comuni (se lo spazio O_γ non incontra C), sarà la somma degli ordini di queste, cioè $n' + N_{\gamma-1}$ [76]. Per avere invece l'ordine della curva C_1, osserviamo che essa è incontrata da un iperpiano passante per O_γ in tanti punti P_1 mobili quante sono in quell'iperpiano le generatrici della rigata ovvero i punti P di C, cioè n'; e di più nei punti fissi che C_1 ha su O_γ, i quali sono i punti d'incontro di questo spazio con la varietà degli ∞^1 $S_{r-\gamma-1}$ del sistema, e quindi

[76] Com'è ben noto, e risulta del resto dall'applicazione del principio di corrispondenza in un fascio d'iperpiani, l'ordine della rigata luogo delle congiungenti i punti omologhi di due curve in corrispondenza univoca è la somma degli ordini di queste diminuita del numero dei loro punti uniti.

sono N_γ. Dunque l'ordine di C_1 sarà $n' + N_\gamma$. Segue (76) che sulla rigata d'ordine $n' + N_{\gamma-1}$ il numero dei punti d'incontro (punti uniti) delle due curve direttrici C e C_1 sarà:

$$U = n' + (n' + N_\gamma) - (n' + N_{\gamma-1}) = n' + N_\gamma - N_{\gamma-1}.$$

Ponendo qui per N_γ e $N_{\gamma-1}$ i valori assegnati dal n.° 42 e rimettendo poi per n, n' i loro valori attuali $\alpha + \gamma$, $\alpha' + \gamma$, quel numero diventa:

$$U = n' + (\gamma + 1)(n + \gamma p - \gamma) - \gamma(n + \gamma p - p - \gamma + 1) =$$
$$= n + n' + 2\gamma p - 2\gamma = \alpha + \alpha' + 2\gamma p,$$

come appunto si voleva dimostrare.

47. Il ragionamento precedente fu esposto con l'ipotesi $\gamma > 0$. Nel caso $\gamma = 0$, senza modificarsi pel concetto, si abbrevia alquanto nello sviluppo. Ogni punto P di C viene allora projettato dal centro fisso O sull'iperpiano corrispondente del sistema in un punto P_1. Il cono projettante sarà dell'ordine n' (di C); la curva C_1 luogo di P_1 sarà dell'ordine $n + n'$ (con O punto n-plo, corrispondentemente agli n iperpiani del sistema uscenti da esso); per conseguenza le direttrici C e C_1 di quel cono s'incontreranno in $n' + (n + n') - n' = n + n'$ punti, cioè (essendo $\gamma = 0$) $\alpha + \alpha'$, come darebbe la formola generale.

Si osservi pure che la projezione che in generale si faceva dei punti P sui corrispondenti $S_{r-\gamma-1}$ del sistema da uno spazio fisso O_γ ha senso ed è utile finchè $\gamma < r - 1$. Quando $\gamma = r - 1$ una projezione non occorre più: l'$S_{r-\gamma-1}$ del sistema è un punto P_1, che genera una curva C_1; mentre gli $S_{r-\gamma}$ del sistema son le generatrici di una rigata. L'ordine di questa è $N_{\gamma-1}$; l'ordine di C_1 è N_γ; quindi le intersezioni delle direttrici C e C_1 della rigata sono $n' + N_\gamma - N_{\gamma-1}$, come sopra.

Nel caso estremo $\gamma = r$ il ragionamento basato sugli $S_{r-\gamma-1}$ del sistema non si applicherebbe più. Si noti però che in tal caso gli iperpiani del sistema avrebbero con C contatto r-punto, cioè sarebbero gl'iperpiani osculatori di C: sicchè la classe del sistema sarebbe (n.° 42) $n = r(n' + rp - p - r + 1)$; mentre i punti uniti della corrispondenza su C sarebbero i punti ove l'iperpiano osculatore è stazionario, i quali sono in numero di $(r + 1)(n' + rp - r)$. Quest'espressione, tenendo conto di quel valore di n, si può metter sotto la forma $n + n' + 2rp - 2r$, che equivale nel caso attuale ad $\alpha + \alpha' + 2\gamma p$.

48. Si è pure supposto nella dimostrazione del n.° 46 che la serie lineare $g^r_{n'}$, contenente ogni punto x dell'ente algebrico contato γ volte ed i suoi α' punti omologhi x' non fosse composta. Ma il lettore potrà verificare (in modo analogo a quello tenuto nel n.° 44) come nel caso che la detta serie fosse composta coi gruppi di un'involuzione di grado μ e genere π, il teorema rimanga vero, perchè la ricerca dei punti uniti della data corrispondenza si riduce a cercare gli elementi uniti di una nuova corrispondenza entro quell'ente di genere π (la detta involuzione): e vi sarà solo da ammettere che a quest'ultima corrispondenza la formola del n.° 46 sia applicabile. Ai punti uniti che così proverranno dai gruppi uniti della corrispondenza entro l'involuzione saranno da aggiungere nel caso che $\gamma > 0$ i punti doppi dell'involuzione stessa, ognuno contato γ volte se si vuol che rimanga valida anche in questo caso l'espressione generale del numero dei punti uniti.

E qui osserviamo in generale che un punto unito può contare più volte nel numero U trovato per due cause diverse. Può cioè accadere nel ragionamento del n.° 46 che un punto equivalga a più intersezioni (sia punto di contatto, ecc.) delle due curve C e C_1, vale a dire della curva C e della varietà costituita dagli ∞^1 $S_{r-\gamma-1}$ del sistema. E può avvenire invece (se $\gamma > 0$) che un punto (*singolare*) produca un abbassamento nei numeri N_γ, $N_{\gamma-1}$ che colà compajono, e quindi anche una riduzione nel numero $U = n' + N_\gamma - N_{\gamma-1}$. Limitandoci a questo secondo caso, la proposizione del n.° 43 applicata al caso attuale dà subito (applicando la legge di dualità) il risultato seguente: Nel numero complessivo $\alpha + \alpha' + 2\gamma p$ dei punti uniti un punto unito singolare conterà k volte se (condizione *sufficiente*, ma non necessaria) l'$S_{\gamma-1}$ osculatore in esso alla curva C la incontra in $\gamma + k$ punti coincidenti in quello: o, riferendoci all'ente algebrico astratto, se per la serie lineare minima $g^r_{\alpha'+\gamma}$ contenente ogni punto x γ volte coi suoi α' punti omologhi x' vi sono $\infty^{r-\gamma}$ gruppi pei quali quel punto è multiplo secondo $\gamma + k$. Così ad esempio per una corrispondenza fra i punti di una curva piana per la quale sia $\gamma = 1$, un punto singolare che sia origine di un ramo superlineare d'ordine i e che non stia su tutte le curve che segano su quella la data corrispondenza sarà da contarsi in generale $i - 1$ volte fra i punti uniti; ecc. (77).

---

(77) Cfr. specialmente la citata Nota del sig. BRILL, Math. Ann., XXXI.

49. Alla formola del n.º 46 lo stesso sig. CAYLEY ha dato (loc. cit.) una forma più generale, che si applica alla soluzione dei *problemi di contatto* (78).

Suppongasi che nella corrispondenza (α, α') da noi considerata tra i punti x, x' dell'ente algebrico il gruppo degli α' punti x' corrispondenti ad un punto x si scomponga in un certo numero a_1' di punti A_1' multipli secondo λ_1, a_2' punti A_2' multipli secondo $\lambda_2, \dots$, cosicchè sarà:

$$\alpha' = a_1' \lambda_1 + a_2' \lambda_2 + \dots$$

Rappresentando come al n.º 46 l'ente algebrico con la curva C avremo che gl'iperpiani del sistema ∞^1 che ivi si consideravano avranno con C un contatto γ-punto in x, λ_1-punto in ogni punto A_1', λ_2-punto in ogni $A_2', \dots$ Quindi se si contano gl'iperpiani del sistema uscenti da un punto P di C, — fra i quali già s'era visto che γ si dovevan considerare come coincidenti nell'iperpiano inerente a quel punto considerato come punto x, — si vede che per ragioni analoghe ogni iperpiano pel quale P sia un punto A_1', o $A_2', \dots$ sarà da contarsi $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ volte fra gl'iperpiani del sistema uscenti da P. In altri termini si rappresenti un punto dell'ente con A_1, o $A_2, \dots$ secondo che riguardandolo come punto x si voglion considerare come suoi omologhi (punti x') gli A_1', od $A_2', \dots$: ad A_1 corrisponderanno a_1' punti A_1' (distinti da esso), e suppongasi che viceversa ad A_1' corrispondano a_1 punti A_1; e similmente ad A_2' corrispondano a_2 punti A_2, ecc. Allora gli α punti x corrispondenti ad un dato punto x' e distinti da esso si scindono in a_1 punti A_1 multipli secondo λ_1, a_2 punti A_2 multipli secondo $\lambda_2, \dots$, sicchè:

$$\alpha = a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + \dots$$

Ciò posto diciamo u_1 il numero dei punti uniti della corrispondenza (a_1, a_1') fra i punti A_1, A_1'; u_2 il numero dei punti uniti della corrispondenza (a_2, a_2') fra A_2, A_2'; ecc. È facile vedere che ognuno di quegli u_1 punti conterà λ_1 volte nel numero complessivo U dei punti uniti della corrispondenza (α, α') fra x, x'; e similmente gli u_2 punti saranno λ_2-pli nel numero U; ecc. Sarà dunque:

$$U = u_1 \lambda_1 + u_2 \lambda_2 + \dots$$

Ponendo questi valori di α, α', U nella formola:

$$U = \alpha + \alpha' + 2\gamma p,$$

(78) V. anche i citati lavori del sig. BRILL (Math. Ann., VI, VII e XXXI).

essa diventa:

$$(u_1 - a_1 - a'_1)\,\lambda_1 + (u_2 - a_2 - a'_2)\,\lambda_2 + \ldots = 2\gamma p\,.$$

Questa relazione generale serve a determinare il numero dei punti uniti (u_1, o u_2, ...) di una delle corrispondenze parziali (a_1, a'_1), (a_2, a'_2), ... quando si conoscano i numeri di punti uniti di tutte le altre.

È appunto questo caso che si presenta nel problema dei contatti, ossia in generale nel problema di determinare il numero dei gruppi di una g^r_n aventi un punto multiplo secondo k_1, uno multiplo secondo k_2, ..., ove $\Sigma\,(k-1) = r$. Nella citata Nota del sig. BRILL (Math. Ann., tom. VI; v. p. 46) si vedrà come, seguendo quel concetto e tenendo conto della natura delle corrispondenze che così si presentano (la quale deriva dal lavoro dello stesso scienziato citato in nota al n.⁰ 42), si possan subito ricavare due formole ricorrenti mediante cui si stabilisce la formola generale del sig. DE JONQUIÈRES (citata nella stessa nota al n.⁰ 42) che risolve il detto problema.

§ 13. Una formola generale per le involuzioni sopra un ente algebrico.

50. Abbiasi sopra una curva C d'ordine n appartenente allo spazio S_r una semplice infinità di gruppi di m punti tale che ogni punto stia in un sol gruppo, ossia un'involuzione di grado m. Siano di dimensione k, ossia degli S_k, gli spazi a cui appartengono i gruppi generici: sicchè sarà $k \leq r$. S'indichi con ν finchè $k \leq r-1$ il numero di quegli S_k che incontrano un S_{r-k-1} arbitrario, ossia l'ordine della varietà M_{k+1} costituita da quegli ∞^1 S_k (per $k = r-1$ la classe della ∞^1 d'iperpiani). Vedremo di esprimere in funzione di tutti questi numeri il numero y dei punti doppi di quell'involuzione [79].

A tal fine introduciamo gli ordini $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ delle varietà costituite risp. dalle rette, piani, ..., S_i, ... congiungenti $2, 3, \ldots, i+1, \ldots$ punti di un gruppo. Come ultimo di questi numeri si può assumere x_{k-1}; od anzi x_k, se $k \leq r-1$, ed allora sarà

---

[79] Il procedimento che seguiremo, come la formola a cui esso ci condurrà, son dovuti al sig. SCHUBERT. Veggasi, anche per il seguito, la mia Nota: *Sulle varietà algebriche*, ecc., citata nell'Introduzione. [V. in particolare la nota (1) a p. 115 di questo volume (N. d. R.)].

da porre (come apparirà poi) $x_k = \binom{m}{k+1}\nu$. Similmente si potrà cominciare col numero (corrispondente a $i = 0$) $x_0 = n$.

Applicando il principio di corrispondenza (80) ad un fascio d'iperpiani projettanti le coppie di punti che fan parte di uno stesso gruppo del sistema, il che dà in quel fascio una corrispondenza simmetrica d'indice $(m-1)n$, si ha anzitutto

$$2(m-1)n = 2x_1 + y.$$

Però se vi son dei punti doppi di C, ognun dei quali rappresenti due punti di uno stesso gruppo dell'involuzione, il loro numero raddoppiato si dovrà aggiungere al 2.° membro di quell'equazione, poichè ognuno di essi dà origine ad una coincidenza (doppia) che non conta in generale fra le y.

Più generalmente si considerino due S_i (per $i = 1, 2, \dots, k-1$) i quali congiungano sempre i punti $P_1 \dots P_i$ di un gruppo risp. a due ulteriori punti A, A' del gruppo medesimo; e fissato ad arbitrio un fascio di S_{r-i-1} (cioè l'S_{r-i} che li contiene e l'S_{r-i-2} per cui essi passano), si riguardino in esso come omologhi due spazi che siano incidenti a due tali S_i. Applicando a questo fascio ed alla corrispondenza che così si avrà fra i suoi elementi il principio di corrispondenza, si otterranno (pei suddetti valori di i) $k-1$ relazioni. L'ultima, cioè quella che si ha per $i = k-1$, quando fosse $k = r$ proverrebbe dal segare con una retta una corrispondenza fra iperpiani. — In generale, qualunque sia i, la corrispondenza fra gli S_i che formino coppia nel senso spiegato è simmetrica e d'indice $(i+1)(m-i-1)$: quindi quella che si ha fra gli S_{r-i-1} del fascio sarà pure simmetrica e d'indice $(i+1)(m-i-1)x_i$, ed avrà perciò

$$2(i+1)(m-i-1)x_i$$

coincidenze. Ora queste si possono avere nei 4 modi seguenti:

1.° Essendo i due S *distinti*, ma incidenti all'S_{r-i} del fascio in *uno* stesso punto: che sarà dunque nello spazio $S_{i-1}(P_1 \dots P_i)$ comune a quelli. Si hanno così x_{i-1} coincidenze, di cui ognuna, per l'arbitrio che rimane nella scelta di A, A' fra gli $m-i$ punti di un gruppo che restano togliendo $P_1 \dots P_i$, conta per $(m-i)(m-i-1)$ (81).

(80) V. n.° 8, anche per le coincidenze che contiamo come *doppie*.

(81) Qui e nel seguito siamo nel caso di coincidenze multiple nell'applicazione del principio di corrispondenza, ma senza le difficoltà che altre volte si hanno per la determinazione delle multiplicità. Si osservi in fatti che qui il problema algebrico, dal fascio di S_{r-i-1} si può riportare di nuovo ai particolari aggruppamenti $P_1 \dots P_i A A'$ di punti di C: donde segue che un elemento unito di quel fascio dovrà contare sempre tante volte quanti sono i particolari aggruppamenti da cui proviene. — Un'osservazione analoga si può fare spesso.

2.° Essendo i due S_i ***distinti*** ed incidenti all' S_{r-i} in *due* punti distinti: i quali dunque saranno in un S_{r-i-1} (unito) del fascio, sicchè la retta che li congiunge incontrerà il sostegno S_{r-i-2} di questo; ossia l' $S_{i+1}(P_1 \ldots P_i AA')$ di quei due S_i sarà incidente all' S_{r-i-2}. Si hanno dunque x_{i+1} coincidenze siffatte, ognuna multipla secondo $(i+1)(i+2)$. Ciò finchè i non arriva a $k-1$. Quando $i=k-1$, allora (se $k \leq r-1$) ognuno dei ν S_k (gli S_{i+1} del caso attuale) che incontrano l' S_{r-k-1} (l' S_{r-i-2}) dà $\binom{m}{k+1} \cdot k(k+1)$ aggruppamenti $(P_1 \ldots P_{k-1} AA')$, sicchè vale ancora la determinazione precedente del numero delle coincidenze, purchè si ponga $x_k = \binom{m}{k+1}\nu$. Solo se $k=r$ questa specie di coincidenze pel caso estremo $i=k-1$ non si presenta evidentemente più: ma siccome appunto allora il simbolo ν non ha significato, converremo di porre $\nu=0$ se $k=r$, e con ciò rimarrà vero anche allora quanto s'è detto.

3.° *Coincidendo* i due S_i *pel coincidere di* A *e* A': ciò dà $\binom{m-2}{i}y$ coincidenze nel fascio.

4.° *Coincidendo* i due S_i *senza* che coincidano A e A', cioè essendovi un S_i con $i+2$ punti di un gruppo. Ogni elemento unito del fascio ottenuto in questo modo conterebbe per $(i+1)(i+2)$. Però l'esistenza in un gruppo dell'involuzione (appartenente quindi ad un S_k) di $i+2$ punti situati in un S_i impone al gruppo $k-i$ condizioni; sicchè si può dire che in generale essa ha luogo solo nel caso estremo $i=k-1$, cioè che vi sono solo dei gruppi nei quali $k+1$ punti appartengono ad un S_{k-1}. Sia z il loro numero.

Sommando insieme tutte le coincidenze si ha la relazione generica, che per $i=1,2,\ldots,k-2,k-1$ dà il gruppo seguente:

$$1)\quad \left\{\begin{array}{lll}
2(m-1)n= & 1.2x_1 & +y \\
2.2(m-2)x_1=(m-1)(m-2)n & +2.3x_2 & +(m-2)y \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\
2(i+1)(m-i-1)x_i=(m-i)(m-i-1)x_{i-1} & +(i+1)(i+2)x_{i+1} & +\binom{m-2}{i}y \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\
2(k-1)(m-k+1)x_{k-2}=(m-k+2)(m-k+1)x_{k-3} & +(k-1)kx_{k-1} & +\binom{m-2}{k-2}y \\
2k(m-k)x_{k-1}=(m-k+1)(m-k)x_{k-2} & +k(k+1)\left[\binom{m}{k+1}\nu+z\right] & +\binom{m-2}{k-1}y
\end{array}\right.$$

Da esse si trae successivamente:

$$(1')\quad \begin{cases} x_1 = (m-1)\,n - \dfrac{1}{2}\,y \\ x_2 = \dbinom{m-1}{2}\,n - \dfrac{1}{2}\,(m-2)\,y \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_i = \dbinom{m-1}{i}\,n - \dfrac{1}{2}\dbinom{m-2}{i-1}\,y \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{cases}$$

e per ultima [82]:

$$(2)\qquad \binom{m}{k+1}\nu + z = \binom{m-1}{k}\,n - \frac{1}{2}\binom{m-2}{k-1}\,y\,,$$

che è appunto la formola cercata, la quale può servire a determinare y in funzione degli altri caratteri n, m, k, ν, z.

Riguardo agli ultimi due converrà tener presente che quando fosse $k = r$, cioè i gruppi dell'involuzione non stessero in spazi inferiori allo spazio di C, si dovrebbe porre $\nu = 0$; e che il simbolo z rappresenta il numero di quei gruppi che sono *singolari* pel fatto di contenere $k+1$ punti appartenenti ad un S_{k-1}. Se vi fossero (*eccezionalmente*) dei gruppi più particolari, nei quali un numero $< k+1$ di punti fossero già legati linearmente, il modo come abbiamo proceduto prova che la relazione (2) varrebbe ancora, dando a z il significato di una *somma* nella quale entrerebbero con determinati coefficienti i numeri di quei gruppi particolari dell'involuzione. In altri termini si può ritener sempre valida quella formola conservando a z il significato primitivo come numero dei gruppi *singolari* prima nominati, purchè in esso si computino convenientemente, cioè con le debite multiplicità, i gruppi eccezionali suddetti.

Si osservi anche, riandando il ragionamento fatto, che esso non esige che la ∞^1 dei gruppi di m punti su C sia un'involuzione, vale a dire che un punto individui il gruppo che lo contiene. Se ogni punto di C fosse su μ gruppi non vi sarebbe evidentemente altro da modificare che la 1.ª e la 2.ª delle relazioni (1), nelle quali

---

[82] Direttamente si trarrebbe la (2) dalle (1) moltiplicandole risp. pei fattori $k.(m-2)\ldots(m-k)$; $(k-1).(m-3)\ldots(m-k)$; ...; $(k-i)\,i!\,(m-i-2)\ldots\ldots(m-k)$; ...; $2\,(k-2)!\,(m-k)$; $(k-1)!$; e poi sommandole e dividendo per $(k+1)!$.

i termini contenenti n dovrebbero essere moltiplicati per μ (sarebbe cioè da porsi $x_0 = n\mu$). Dunque anche nelle (1) e nella (2) vi sarà solo da scrivere $n\mu$ in luogo di n. Ma invece di far ciò, a noi converrà rilevare questo: che la formola (2) vale anche per un'involuzione su una curva C *multipla*, purchè con n s'intenda l'ordine di questa curva tenuto conto della sua multiplicità (cioè moltiplicato per μ nel caso che C sia μ-pla).

51. Introducendo il genere p della curva C ed il genere π dell'involuzione, cioè della ∞^1 di gruppi di m punti di C, noi abbiamo pel numero y dei punti doppi l'espressione (n.^{0} 40):

(3) $$y = 2(p-1) - 2m(\pi - 1),$$

valida anche nel caso che C sia multipla, purchè allora p ne rappresenti il genere come curva multipla.

Dalle (2) e (3) eliminando y si trae la formola generale:

(4) $$z = \binom{m-1}{k}(n-k) - \binom{m}{k+1}\nu - \binom{m-2}{k-1}(p - m\pi),$$

nella quale pure converrà ricordare che n e p indicano l'ordine ed il genere della curva C tenuto conto della sua multiplicità.

52. Questa formola (4) è molto importante e dà luogo a vari corollari fecondi. Rileviamo subito il caso particolare che è essenziale per la teoria delle serie lineari, quale sarà svolta nel seguito; cioè quello in cui i gruppi di m punti dell'involuzione si compongono in generale di punti linearmente indipendenti, vale a dire appartengono in generale a spazi S_{m-1}. Sarà allora $k = m - 1$; sicchè la (4) diventa:

(5) $$n - p = \nu - m\pi + m - 1 + z.$$

In particolare se quell'involuzione è *razionale*, ossia è una serie lineare g_m^1 sarà:

(6) $$n - p = \nu + m - 1 + z.$$

53. Quando i gruppi dell'involuzione considerata su C non stiano in generale in spazi inferiori a quello di questa curva, cioè $k = r$, si deve porre (n.^{0} 50) $\nu = 0$. Con ciò la (4) diventa:

(7) $$z = \binom{m-1}{r}(n-r) - \binom{m-2}{r-1}(p - m\pi),$$

ed esprime il numero dei gruppi dell'involuzione che contengono $r + 1$ punti posti in un iperpiano.

Ora s'imagini che la curva C rappresenti una serie lineare qualunque g_n^r di un ente algebrico di genere p sul quale esiste l'involuzione di grado m e genere π. I gruppi dell'involuzione di C che contengono $r+1$ punti posti in un iperpiano sono i gruppi che hanno $r+1$ punti posti in un gruppo della g_n^r. Dunque la formola (7) dà *il numero dei gruppi di* $\mathrm{r}+1$ *punti dell'ente algebrico di genere* p *comuni ad una* $\mathrm{g}_\mathrm{n}^\mathrm{r}$ (cioè a gruppi di questa) *e ad un'involuzione di grado* $\mathrm{m}\,(>\mathrm{r})$ *e genere* π: s'intende, nel caso (generale) che il numero di quei gruppi non sia infinito. — Per $\pi=0$ la (7) diventa:

(8) $$z=\binom{m-1}{r}(n-r)-\binom{m-2}{r-1}p\,,$$

la quale assegnerà *il numero dei gruppi di* $\mathrm{r}+1$ *punti comuni ad una* $\mathrm{g}_\mathrm{n}^\mathrm{r}$ *ed una* g_m^1 (83).

Si noti che il teorema ora enunciato relativo alla formola (7) abbraccia a sua volta quello espresso dalla formola più generale (4). Basta applicarlo sostituendo alla g_n^r la g_n^k che sulla curva C è segata dagl'iperpiani passanti per un S_{r-k-1}: allora il numero dei gruppi di $k+1$ punti comuni a quella g_n^k ed all'involuzione di grado m sarà rappresentato da $\binom{m}{k+1}\nu+z$, ove a ν e z si dia di nuovo il significato generale che avevano nel n.º 51.

§ 14. Serie complete e curve normali. Serie residue.

54. Un altro teorema fondamentale sulle serie lineari, d'indole più elementare che quello del paragrafo prec., è il seguente: *Se sopra un ente algebrico due serie lineari d'ordine* n *hanno un gruppo (di* n *punti) comune, esse son contenute in una stessa serie lineare d'ordine* n.

Il concetto della dimostrazione consiste nel rappresentare l'ente algebrico con due curve, in corrispondenza univoca, imagini delle due serie (84), e quindi con la rigata luogo delle rette congiungenti

---

(83) Nelle *Ricerche di geometria sulle curve algebriche* (n.º 8) il sig. CASTELNUOVO ritrova per altra via (servendosi della formola data qui al n.º 42) la formola (8) — Nella Nota: *Un'applicazione della geometria enumerativa alle curve algebriche* (Rend. Palermo, 3, 1889) egli assegnò più in generale il numero dei gruppi di $r+r'$ punti comuni ad una g_n^r ed una $g_n^{r'}$.

(84) Le serie si posson supporre entrambe infinite; in caso opposto la proposizione sarebbe evidente.

i punti omologhi di quelle curve: dalla quale poi si deduce una terza curva che rappresenta una serie lineare contenente le due date.

Consideriamo anzitutto il caso di due serie g_n^r, $g_n^{r'}$ prive di punti fissi. Saran rappresentate da due curve (semplici o multiple) γ, γ' d'ordine n, appartenenti risp. ad S_r, $S_{r'}$, e in corrispondenza biunivoca fra loro. Supporremo quei due spazi indipendenti, cioè congiunti da un $S_{r+r'+1}$. Il gruppo di n punti comune alle due serie lineari sarà rappresentato su γ, γ' da due gruppi omologhi di n punti posti risp. in un S_{r-1} ed in un $S_{r'-1}$. Condotto per questi due spazi un iperpiano ($S_{r+r'}$), che non contenga nè l'S_r nè l'$S_{r'}$, esso segherà la rigata d'ordine $2n$ luogo delle congiungenti i punti omologhi di γ, γ' in n generatrici (le congiungenti quei due gruppi omologhi di punti) e poi ancora in una curva direttrice d'ordine n, γ''. Sulla rigata, considerata come imagine dell'ente algebrico (cfr. la seconda nota al n.⁰ 28) le due serie g_n^r, $g_n^{r'}$ (serie di gruppi di generatrici) son segate dagl'iperpiani passanti risp. per $S_{r'}$, S_r: quindi anche sulla curva γ'' le stesse serie (di gruppi di punti) son segate da quegl'iperpiani; e però saran contenute nella serie lineare d'ordine n che è rappresentata da γ'', cioè che è segata su questa curva dal sistema di tutti gl'iperpiani.

Poniamo ora che una almeno delle due serie abbia punti fissi. Possiam supporre per brevità che nessuno di questi sia fisso per entrambe: altrimenti, dimostrato il teorema per le serie che si avrebbero dalle date astraendo dai punti fissi comuni, rimarrebbe evidentemente provato anche per le serie primitive. Siano k i punti fissi della serie g_n^r e k' quelli della $g_n^{r'}$. Le due serie saran rappresentate da una curva γ d'ordine $n-k$ di S_r con k punti fissi A e da una curva γ' d'ordine $n-k'$ di $S_{r'}$ (spazio che assumeremo di nuovo indipendente da S_r) con k' punti fissi B'; gli omologhi A' dei punti A su γ' saran distinti dai punti B', e così gli omologhi B su γ dei B' saran distinti dai punti A. Il gruppo di n punti che si suppon comune alle due date serie lineari si comporrà dei $k+k'$ punti fissi rispettivi e di altri $n-k-k'$ punti: siano C e C' i punti imagini di questi ultimi risp. su γ e γ'; per essere quel gruppo di n punti nella g_n^r dovranno i punti B e C, che coi punti fissi A ne costituiscono l'imagine su γ, essere in un S_{r-1}, e similmente i punti A' e C' di γ' saranno in un $S_{r'-1}$. Indichiamo risp. con a, b, c le rette congiungenti i punti omologhi A e A', B e B', C e C' delle due curve γ e γ', vale a dire le rette che sono imagini dei tre gruppi di punti dell'ente algebrico sulla rigata luogo delle rette congiungenti i punti omologhi di γ, γ'. Questa rigata è d'ordine $2n-k-k'$;

e su essa la serie g_n^r si compone delle k generatrici a fisse insieme coi gruppi di $n-k$ generatrici variabili poste negl'iperpiani che passano per $S_{r'}$; e la serie $g_n^{r'}$ si compone delle k' generatrici b fisse insieme coi gruppi di $n-k'$ generatrici degl'iperpiani passanti per S_r. Ora un iperpiano passante per l'S_{r-1} dei punti B e C e per l'$S_{r'-1}$ degli A' e C' (ma non per S_r nè per $S_{r'}$) sega la rigata secondo le $n-k-k'$ generatrici c e secondo una curva direttrice d'ordine n, γ'', passante per i punti B ed A'; e su questa nuova curva quelle due serie saranno segate completamente da quegl'iperpiani passanti risp. per $S_{r'}$ (e quindi pei punti fissi A') e per S_r (e quindi pei punti fissi B): sicchè le serie $g_n^r, g_n^{r'}$ staranno nella serie d'ordine n che su γ'' è segata da tutti gl'iperpiani (85).

55. Dal teorema fondamentale così dimostrato seguono immediatamente corollari importanti.

Se due serie lineari d'ordine n hanno un gruppo (di n punti) comune, o l'una di esse starà nell'altra, o entrambe staranno in una serie lineare d'ordine n di maggior dimensione. Segue che se chiamiamo (come al n.° 26) *completa* (o *normale*) una serie lineare d'ordine n quando *non* sta in una (dello stesso ordine e) di maggior dimensione, e *parziale* od *incompleta* nel caso opposto, sarà certo parziale una serie che abbia comune un gruppo con un'altra senza contenerla tutta quanta; in altri termini *una serie completa contiene ogni serie con cui abbia un gruppo comune.* In particolare *due serie complete aventi un gruppo comune* (e quindi dello stesso ordine) *coincidono.*

---

(85) Sapendo che le due serie son contenute in una stessa serie lineare si può subito, grazie ad un'osservazione fatta al n.° 25 intorno alle serie lineari contenute in una serie lineare, e basandosi su una nota proposizione relativa alle intersezioni di spazi, ecc., precisare di più il nostro teorema così: Se una g_n^r ed una $g_n^{r'}$ hanno comuni *precisamente* ∞^i gruppi di n punti, cioè una g_n^i $(i \geq 0)$, e son contenute in una serie d'ordine n e dimensione t e *non minore* di t, si ha $t+i=r+r'$.

Qui rileviamo come lo stesso concetto che ha servito a dimostrare il teorema fondamentale di questo n.° 54 possa servire per stabilire l'analogo teorema relativo a due serie lineari di M_{k-1} sopra una M_k, qualunque sia k: si ricorrerà cioè ancora alla varietà delle rette congiungenti i punti omologhi di due M_k in corrispondenza biunivoca fra loro. Così pure le conseguenze che da quel teorema fondamentale trarremo nei n.i successivi hanno le analoghe nella geometria su una M_k qualunque.

Se un gruppo di n punti, o più in generale una serie g_n, non costituisce una serie completa (in particolare una g_n^0 completa), starà in serie lineari d'ordine n di maggior dimensione. Ma siccome questa dimensione non può essere maggiore di n (n.º 29), fra quelle serie contenenti la data ve ne sarà *almeno* una che non è più contenuta in una serie di maggior dimensione, ossia che è completa. La proposizione ultima ci prova che ve ne sarà *una* sola. Vale a dire *è ben determinata ed unica la serie completa d'ordine* n *che contiene un dato gruppo di* n *punti, o una data serie lineare d'ordine* n: s'intende che quella serie completa potrebbe anche ridursi ad un sol gruppo, cioè ad una g_n^0.

56. *Se una serie lineare* $\mathrm{g}_\mathrm{n}^\mathrm{r}$ *è completa, è tale anche la serie dei resti* (se ne esistono) *di* k *punti fissi rispetto ad essa*: vale a dire se k punti fissi A stanno precisamente in ∞^ϱ gruppi ($\varrho \geq 0$) cioè in una g_n^ϱ della g_n^r (sicchè $\varrho \geq r-k$), la serie lineare g_{n-k}^ϱ costituita da quei gruppi dai quali si tolgano i k punti A è completa [86]. Invero, posto che quest'ultima serie stia in una $g_{n-k}^{\varrho'}$, ove $\varrho' \geq \varrho$, aggiungendo a questa i k punti A come punti fissi si avrà una $g_n^{\varrho'}$ che ha comune colla g_n^r la g_n^ϱ su nominata; e quindi, poichè la g_n^r si suppone completa, essa conterrà (n.º 55) la $g_n^{\varrho'}$. Dunque nella g_n^r vi sono $\infty^{\varrho'}$ gruppi contenenti i punti A, sicchè $\varrho' \leq \varrho$; onde $\varrho' = \varrho$: sicchè la serie g_{n-k}^ϱ non è contenuta in una di maggior dimensione.

Non è escluso che sia $\varrho = r$, cioè che i k punti A sian comuni a *tutti* i gruppi della serie data.

57. I teoremi precedenti (n.i 55 e 56) si possono enunciare in altro modo, considerando in luogo delle serie lineari le curve imagini, le quali son *normali* se le serie son complete (n.º 26). Avremo [87]:

---

(86) Debbo quest'osservazione, come pure l'applicazione che ne faremo al n.º 77, al sig. CASTELNUOVO; il quale nell'autunno del 1890 mi comunicò gentilmente, per uso del mio corso, qualche aggiunta o perfezionamento alle sue *Ricerche di geometria sulle curve algebriche.*

(87) Si noti che queste proposizioni, e così altre che incontreremo in seguito, valgono anche, pel modo come son dedotte (cioè trasportando risultati relativi a serie lineari, che possono essere *composte*), per *curve multiple*. Così quando si projetta una curva su uno spazio inferiore può darsi che essa sia projettata *più volte*, cioè che la projezione sia una curva multipla. Le nostre proposizioni varranno anche allora, purchè, al solito, si tenga il debito conto della multiplicità nel valutar l'ordine della curva, nella considerazione delle corrispondenze, ecc.

Due curve d'ordine n in corrispondenza biunivoca tale che ad una particolare sezione iperplanare (gruppo di n punti) dell'una corrisponda una sezione iperplanare dell'altra son projezioni di una stessa curva d'ordine n. Se le due curve date son normali, la corrispondenza nominata sarà projettiva (una collineazione).

Le curve normali d'ordine n di cui una data curva qualsiasi del medesimo ordine è projezione sono tutte projettive (collineari) fra loro.

Projettando una curva normale d'ordine n appartenente ad S_r da k suoi punti qualunque, cioè dallo spazio che li congiunge (la cui dimensione sarà $h \leq k - 1$), sopra uno spazio duale di questo (cioè di dimensione $\varrho = r - h - 1$), si ottiene una curva (d'ordine $n - k$) normale.

58. Sia data sull'ente algebrico una serie lineare completa g_N^R. I resti (supposto che ne esistano) di un dato gruppo di n punti G_n rispetto ad essa formano (n.° 56) una serie lineare completa $g_{n'}^{r'}$, ove $n + n' = N$. E similmente i resti di *qualunque* gruppo $G'_{n'}$ di quest'ultima serie rispetto alla g_N^R formeranno una g_n^r completa; la quale dovrà contenere G_n e però sarà sempre *la* serie completa individuata (n.° 55) da questo gruppo. Se ora consideriamo i resti (sempre rispetto alla g_N^R) di un altro *qualunque* gruppo di questa g_n^r, essi formano una $g_{n'}$ completa che contiene il gruppo $G'_{n'}$ e quindi coincide colla $g_{n'}^{r'}$. Dunque non solo ogni gruppo della g_n^r ed ogni gruppo della $g_{n'}^{r'}$ saranno resti l'un dell'altro rispetto alla g_N^R; ma ciascuna delle due serie abbraccia *tutti* i resti di un gruppo qualunque dell'altra, rispetto alla g_N^R. Le due serie g_n^r, $g_{n'}^{r'}$ si dicono *residue* rispetto alla g_N^R. Fra gli ordini passa la relazione $n + n' = N$; e quanto alle dimensioni quella di ciascuna delle due serie dà l'indice d'infinità dei gruppi della g_N^R che contengono un dato gruppo qualsiasi dell'altra.

Se la g_N^R è rappresentata da una curva normale d'ordine N di S_R, abbiamo che su questa curva i gruppi della g_n^r appartengono a spazi $S_{R-r'-1}$ e quelli della g_n^r a spazi S_{R-r-1}, e che due spazi determinati risp. da gruppi delle due serie stanno sempre in un iperpiano S_{R-1}.

59. Una questione inversa, almeno in parte, a quella delle *serie residue* è quella della *serie somma* [88]. Siano date sull'ente algebrico

---

[88] Cfr. Castelnuovo: *Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti appartenente ad una curva algebrica* (Rend. Palermo, 7, 1893, n.° 1).

due serie lineari qualunque g_n^r, $g_{n'}^{r'}$. Presi in esse risp. due gruppi G_n, $G'_{n'}$, si consideri la serie completa g_N^R d'ordine $N = n + n'$ che è individuata dal gruppo *somma* (cioè insieme) di quei due. Rispetto a questa nuova serie saranno residue (n.° 58) le due serie complete d'ordini n, n' individuate risp. dai gruppi G_n, $G'_{n'}$: serie che contengono risp. g_n^r e $g_{n'}^{r'}$. Dunque ogni gruppo di g_n^r ed ogni gruppo di $g_{n'}^{r'}$ presi insieme dànno sempre un gruppo di N punti della g_N^R. *Esiste quindi una serie lineare d'ordine* $\mathrm{N} = \mathrm{n} + \mathrm{n}'$ *che contiene tutti i gruppi somma di un gruppo della* $\mathrm{g}_\mathrm{n}^\mathrm{r}$ *con un gruppo della* $\mathrm{g}_{\mathrm{n}'}^{\mathrm{r}'}$. — La minima serie lineare d'ordine N così fatta è quella che il sig. CASTELNUOVO (loc. cit.) chiama *serie somma* di g_n^r e $g_{n'}^{r'}$. I gruppi somme dei gruppi di queste due sono $\infty^{r+r'}$: ma essi non costituiscono in generale una serie lineare. La dimensione della serie somma sarà dunque $\geq r + r'$.

Dalla definizione della somma di *due* serie si passa subito a quella della somma di *più* serie lineari, come pure delle *serie multiple* di una serie lineare data: nozione fondamentale per alcune importanti ricerche [89].

---

(89) V. specialmente il lavoro citato nella nota preced. — Cfr. anche, per la questione del *massimo genere* di un ente algebrico contenente una g_n^r (questione che si tratta appunto considerando i successivi multipli di questa serie) l'ultima parte delle *Ricerche*, ecc., del CASTELNUOVO e la Nota del prof. BERTINI: *Intorno ad alcuni teoremi della geometria sopra una curva algebrica* (Atti Acc. Torino, XXVI, 1890).