The October 1666 tract on fluxions

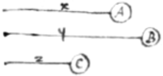
Trento, 2020

Qualche informazione preliminare

- La nota (1) di Whiteside nel primo volume dei *Mathematica Papers* di Newton[1] spiega in modo esauriente l'origine, lo sviluppo e le motivazioni di questo trattato.
- Il trattato inizia con alcune osservazioni "to resolve Problems by Motion" che trascuro, poiché oggi sono divenute parte del patrimonio culturale comune (come la regola del parallelogramma, ecc.).
- Tratterò invece di questioni legate a problemi formulati in termini di quantità variabili considerate in modo "algebrico".

[1] *Cf.* (Newton, 1981, vol. 1, p. 400).

Verso il *calcolo*



È data un'equazione che esprime la relazione tra linee $x, y, z, \&c$ descritte nello stesso tempo.[2] Con $p, q, r, \&c$ si indicano le *velocità*. Ecco il contenuto della fondamentale Regola 7.

> *...multiply each term by so many times $\frac{p}{x}$ as x hath dimensions in that terme...*

Analogamente con $y, z, \ldots$
In termini moderni, se si ha $f(x, y, z, \ldots) = 0$ si ha anche

$$p\frac{\partial f}{\partial x} + q\frac{\partial f}{\partial y} + r\frac{\partial f}{\partial z} + \cdots = 0.$$

[2] *Cf.* (Newton, 1981, vol. 1, pp 400 e sgg.). Il materiale è anche disponibile in rete nel Newton project:
http://www.newtonproject.ox.ac.uk/, ricercando il titolo inglese *The Octber 1666 tract on fluxions*. Ho usato alcune figure di questo materiale disponibili.

Ciò che Newton giudica della massima importanza

> *If two bodies A & B, by their velocities p & q describe the lines x & y. & an equation bee given expressing the relation twixt one of the lines x & the ratio $\frac{q}{p}$ of their motions q & p; To find the other line y.*
> *Could this ever bee done all problems whatever might bee resolved. But by the following rules it may be very often done.*[3]

Un esempio:

$$ax^{\frac{m}{n}} = \frac{q}{p}.$$

Allora si ha

$$\frac{na}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}} = y.$$

La questione sarà ripresa in modo più sistematico nel *De analysi*.

[3] *Ibid.* p. 403.

Lo“stile” matematico di Newton nel Trattato. 1

Ed anche successivamente. *Cf.* (Newton, 1981, vol. 1, pp. 404-405).

Intanto occorre osservare che per Newton non si dà ancora un risultato come[4]

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \log(1+x).$$

Per Newton si tratta dell’area sottostante all’iperbole, una quantità *nota*, della quale si può calcolare il valore numerico con le tavole dei logaritmi e che può indicare con

$$\square \frac{1}{1+x}.$$

[4]Uso una notazione non di Newton. Per Newton si dà $\frac{q}{p} = \frac{1}{1+x}$ e bisogna risalire all’area sottostante. Non necessariamente esprimibile nella forma $f(x)$.

Lo“stile” matematico di Newton nel Tattato. 2

Dagli esempi ad una regola (*Ibid.* p. 405)

Ora Newton osserva che data la “funzione” $\frac{cx}{a+bx^2}$ con il cambiamento di variabili $bx^2 = z$ il calcolo si riconduce a

$$\square \frac{c}{2ab + 2bz}.$$

ossia a valutare un’area sottostante ad un’iperbole e dunque calcolabile come visto. Fa la stessa cosa con $\frac{cx^2}{a+bx^3}$, $\frac{cx^3}{a+bx^4}$ per concludere che in generale il calcolo di $\frac{cx^{n-1}}{a+bx^n}$ con il cambiamento di variabili $bx^n = z$ si riconduce a

$$\square \frac{c}{nba + nbz}.$$

Abbiamo qui una regola per il cambiamento di variabili che può essere riproposta per altri esempi ed acquisire progressivamente generalità.

Altri esempi

Newton considera in effetti anche altri esempi.[5] Tra questi abbiamo il "calcolo degli integrali" di

$$\frac{cx^{kn}}{x}\sqrt{a+bx^n},\ \frac{cx^{kn}}{\sqrt{a+bx^n}},\ \frac{cx^{kn}}{x\sqrt{ax^n+bx^{2n}}},\ldots$$

È evidente la padronanza completa della regola per cambiare le variabili in un integrale. Ma l'idea guida è quella di creare una sorta di *database che renda i calcoli non necessari*.

[5] *Ibid.*, pp. 406-407. Newton considera i casi di $k = 1, 2, 3\ldots$, fermandosi, per ogni caso, ad un certo punto, quando gli sembra chiara la generalità del risultato.

“Regole” date in modo un po’ sbrigativo

Oggi, poco dopo aver descritto il procedimento con il quale da $f(x)$ si può ottenere $f'(x)$, si enuncia e si *dimostra* la regola per $f(x) + g(x)$. Ecco invece Newton (*ibid*, pp. 410-411): “Si noti che se il valore di $\dfrac{q}{p}$ consiste di diverse parti, ogni parte va considerata disgiuntamente.

Così se abbiamo $\dfrac{ax^3 - b^2x^2}{c^4} = \dfrac{q}{p}$ allora

$$\Box\frac{ax^3}{c^4} = \frac{ax^4}{4c^4}, \quad \& \quad \Box\frac{b^2x^2}{c^4} = \frac{b^2x^3}{3c^4} \quad \text{e quindi}$$

$$\Box\frac{ax^3 - b^2x^2}{c^4} = \frac{ax^4}{4c^4} - \frac{b^2x^3}{3c^4}.\text{”}$$

Il lettore ne può ricavare la regola generale… E così per altre situazioni, come $\frac{f(x)}{g(x)}$, ecc.

Un esempio (dimostrazione...) di Newton nel Trattato

Newton considera l'equazione[6]

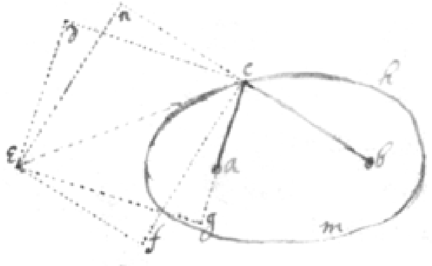
$$f(x,y) = x^3 - abx + a^3 - dy^2 = 0. \tag{1}$$

- Sostituzione nella (1): $x \hookleftarrow x + po, y \hookleftarrow y + qo$,
- Si eliminano tutti i termini che non contengono o e tutti quelli che contengono o^n con $n \geq 2$:
- Risultato: $\left(-abp - 2\,dqy + 3\,px^2\right) o = 0$.
- Si divide per o:
- $-abp - 2dqy + 3px^2 = 0$

Questo esempio, a giudizio di Newton, contiene tutto ciò che serve per una dimostrazione generale.

[6] *Cf.* (Newton, 1981, Vol. 1, p. 414).

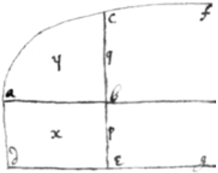
L'uso delle coordinate bipolari



Con riferimento alla figura, sia $x = ac, y = bc$ e consideriamo l'equazione dell'ellisse: $x + y = 2a$ (Newton considera un esempio più complicato). Abbiamo allora $p + q = 0$ e dobbiamo utilizzare la regola del parallelogramma, utilizzando la composizione di due moti. Ne segue la consueta proprietà: la tangente è la bisettrice dell'angolo $\angle acn$.

Verso il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale...

L'enunciato di Newton, come Problema 5 (*Ibid.* p. 427): Trovare la natura di una linea curva (crooked line) la cui area sia espressa da una data equazione.



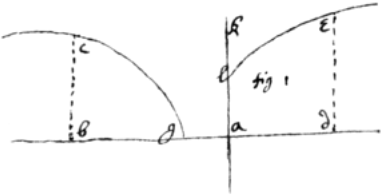
Newton pone $ad = be = 1$. Quindi x misura anche l'area $abed$ e $p = 1$. Newton suppone che x e y siano legati da una equazione $F(x, y) = 0$. Utilizzando notazioni che presto saranno abbandonate ottiene il risultato che in termini moderni si esprime come

$$F_x(x, y) + qF_y(x, y) = 0.$$

Con $F(x, y) = y - f(x) = 0$ si ha il risultato solito: $q = f'(x)$.

Figure che si fanno equlibrio. 1

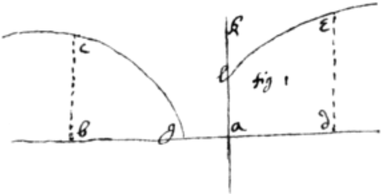
Nella parte finale del Trattato *(ibid.* pp. 443-447), Newton considera una situazione di possibile equilibrio.



Con riferimento alla figura, dobbiamo immaginare quanto segue: i **segmenti** $ab = x$ e $ad = y$ (si noti la scrittura di d, che assomiglia a ∂) variano al variare del tempo e sono legati da un'equazione. $bc = z$ e $de = v$ (le ordinate corrispondenti a x e y) generano due **superfici**.
Le due **superfici** debbono in ogni istante e**ssere in equilibrio rispetto alla retta** ak.

Figure che si fanno equilibrio. 2

La condizione di equilibrio

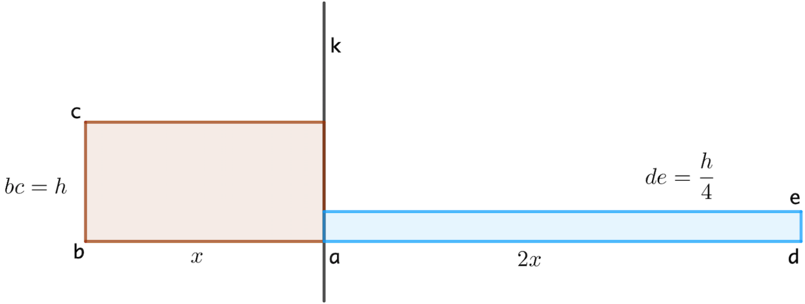


Se p e q sono le velcità di x e y e consideriamo le aree infinitesime generate in un intervallo infinitesimo di tempo dovrà essere

$$pxz = qyv$$

Se x e y sono legati da una certa equazione $\varphi(x, y) = 0$ nota ed è nota $z = f(x)$ possiamo ricavare v.

Un esempio semplice (troppo semplice per Newton)



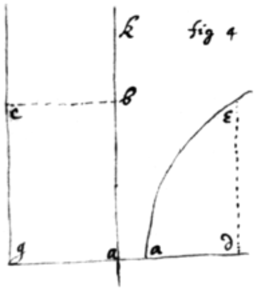
Sia $z(x) = h = cost$. Da $y = 2x$ si ha $q = 2p$ e quindi

$$pxh = \frac{1}{2}qxh = q2xv \Rightarrow v = \frac{h}{4}.$$

E per l'equilibrio si ha a sinistra $hx\frac{x}{2}$ ed ha destra la quantità uguale data da $\frac{h}{4}2xx$.

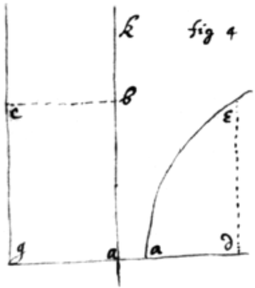
Un esempio di Newton. 1

Newton utilizza la stessa figura per alcune situazioni correlate, e quindi va considerata in modo "qualitativo".



Nell'esempio che considero questa volta $x = ab$ è sull'asse ak ed è $z = bc = a = cost$. Il baricentro del rettangolo variabile $abcg$ si trova quindi sempre alla distanza $\frac{a}{2}$ dalla retta ak. Newton suppone che sia $b + x = y^2$ e quindi $p = 2qy$.

Un esempio di Newton. 2

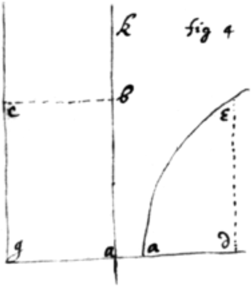


L'area "infinitesima" che corrisponde ad un valore x è allora data da $ap\frac{a}{2}$ e questa deve essere bilanciata da qvy. Allora

$$\frac{1}{2}pa^2 = qya^2 = qvy \Rightarrow v = a^2.$$

Quindi de ha valore costante dato da a^2.

Un esempio di Newton. 3



A sinistra abbiamo allora una rettangolo di area ax avente il baricentro alla distanza $\frac{a}{2}$ dalla retta ak. A destra, essendo $y = \sqrt{b+x}$ abbiamo un rettangolo[7] per il quale la base ad ha gli estremi $a = \sqrt{b}$ e $d = \sqrt{b+x}$.

---

[7] La figura ha invece una forma diversa e si noti che la lettera a è ripetuta.

Un esempio di Newton. 4

Il rettangolo ha quindi area

$$a^2(\sqrt{b+x}-\sqrt{b}).$$

La distanza del baricentro di questo rettangolo dalla retta ak è data da

$$\sqrt{b}+\frac{\sqrt{b+x}-\sqrt{b}}{2}=\frac{\sqrt{b+x}+\sqrt{b}}{2}.$$

Quindi

$$a^2(\sqrt{b+x}-\sqrt{b})\frac{\sqrt{b+x}+\sqrt{b}}{2}=a^2\,\frac{b+x-b}{2}=\frac{a^2x}{2}.$$

Abbiamo quindi l'equilibrio richiesto.

Newton I. (1967-1981). *The Mathematical Papers of Isaac Newton, edited by D. T. Whiteside*. Cambridge University Press, Cambridge.