La *Geometria Curvilinea*

Trento, 2020

In [Newton(1981), vol. 4], Whiteside ha raccolto, sotto il titolo di *Geometria Curvilinea* un manoscritto di Newton. Si tratta di un testo che lo stesso Whiteside giudica come “more technically ingenious than effective”.[1]
Il suo giudizio è certamente autorevole. Tuttavia io credo che anche qui Newton “formi” in qualche modo lo stile dei successivi *Principia*, ove il calcolo assume, nella maggior parte dei casi, una forma essenzialmente geometrica.

[1] *Ivi*, nota 1, p. 420.

L'inizio del testo:[2]

> *Gli uomini dei tempi recenti, desiderosi di aumentare le scoperte degli antichi, hanno unito l'aritmetica delle variabili con la geometria. Beneficiando di questo, il progresso è stato ampio e di vasta portata se si considera l'abbondanza di quanto si è prodotto, ma questo progresso è meno rilevante se si considera la complessità delle conclusioni. Perché questi calcoli, che utilizzano solo operazioni aritmetiche, spesso esprimono in maniera intollerabilmente complicata quantità che in geometria si indicano semplicemente tracciando una linea.*

[2] *Ivi*, p. 420-423. La traduzione è mia.

Definizioni, assiomi e postulati

Il tutto è abbastanza prevedibile, considerando quanto Newton ha già prodotto ed ora vuole presentare in modo rigoroso. Mi limito ad un accenno.

- Tra le *definizioni*: 1 e 2. **fluente** e **flussione** (la velocità di cambiamento);
- Tra gli *assiomi*: 6. Le flussioni delle quantità sono nel **primo rapporto** delle parti nascenti ... o nell'**ultimo rapporto** delle parti evanescenti;
- Tra i *postulati*: 2. una linea è **data** dall'intersezione di linee che si muovono in modo geometrico.

La *Proposizione* I

Ivi, pp. 428-429.

> *Se di tre quantità in proporzione continua è* ***data*** *la quantità intermedia, mentre* ***le altre due fluiscono*** *allora la* ***proflussione*** *di un'estrema sta alla* ***deflussione*** *dell'altra come la prima sta all'altra.*

Si hanno tre quantità $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ tali che

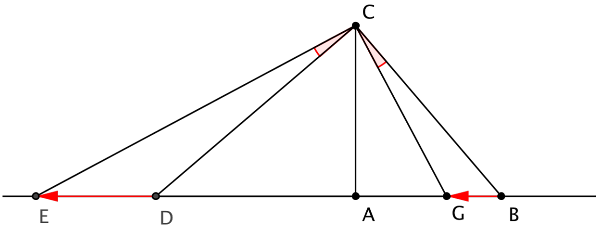
$$\mathcal{B} : \mathcal{C} = \mathcal{C} : \mathcal{D}.$$

e $\mathcal{C}$ è data. Allora (con le notazioni di Whiteside)[3]

$$\mathcal{B} : \mathcal{D} = -fl(\mathcal{B}) : +fl(\mathcal{D}).$$

[3]La notazione di Newton è un po' diversa: usa $defl$ e $profl$.

La *Proposizione* I. Visualizzazione geometrica



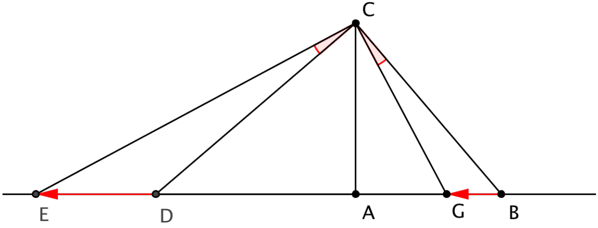
Newton pone $AB = \mathcal{B}, AD = \mathcal{D}, AC = \mathcal{C}$ e dimostra, in termini geometrici, che

$$\mathcal{B} : \mathcal{D} = -fl(\mathcal{B}) : +fl(\mathcal{D}).$$

In termini moderni, anticipando l'uso delle notazioni successive:

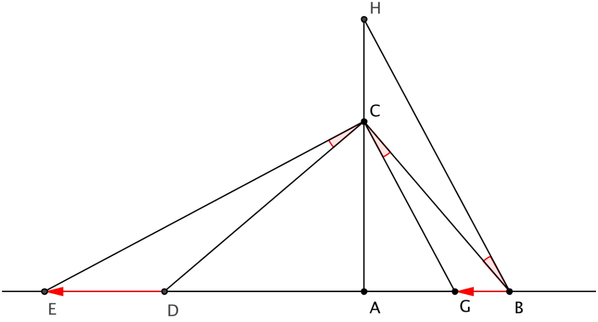
$$xy = h \Rightarrow \frac{x}{y} = -\frac{\dot{x}}{\dot{y}}\,.$$

Proposizione I. Dimostrazione 1



Supponiamo che AB diventi AG e coerentemente AD divenga AE. Se si sottrae l'angolo $\widehat{DCG}$ sia da $\widehat{DCB}$ sia da $\widehat{GCE}$, si ha che gli angoli $\widehat{BCG}$ e $\widehat{DCE}$ sono uguali.

Proposizione I. Dimostrazione 2



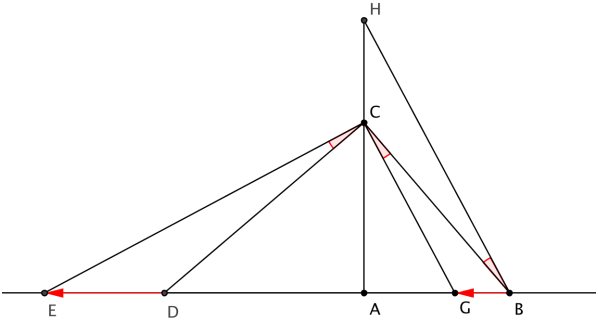
Si tracci BH parallela a CG. I triangoli DCE e CBH sono simili.
Allora

$$\frac{DE}{CH} = \frac{CD}{BC} = \frac{AD}{AC}.$$

ed anche

$$\frac{CH}{BG} = \frac{AC}{AG}.$$

Proposizione I. Dimostrazione 3



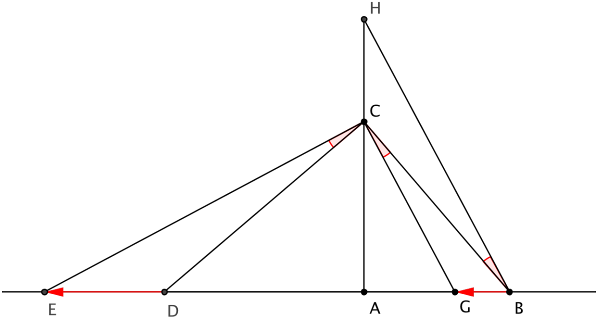
Allora “ex æquo”

$$\frac{DE}{\cancel{CH}} \times \frac{\cancel{CH}}{BG} = \frac{AD}{\cancel{AC}} \times \frac{\cancel{AC}}{AG}$$

e quindi

$$\frac{DE}{BG} = \frac{AD}{AG}.$$

Proposizione I. Dimostrazione 4



Ora il 'limite' (ultimo rapporto) di DE e BG è $\frac{AD}{AB} = \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{B}}$ e per l'assioma 6 abbiamo

$$\mathcal{B} : \mathcal{D} = -fl(\mathcal{B}) : +fl(\mathcal{D}).$$

[Si noti che quando $\mathcal{B} = AB$ diminuisce $\mathcal{D} = AD$ aumenta e viceversa.]

Altri risultati e nuove notazioni

Prop. II. Se $\mathcal{A} : \mathcal{B} = \mathcal{B} : \mathcal{C}$ ed è data $\mathcal{A}$, allora

$$\mathcal{A} : 2\mathcal{B} = fl(\mathcal{B}) : fl(\mathcal{C}).$$

Nella Proposizione III, Newton considera il caso generale di

$$\mathcal{A} : \mathcal{B} = \mathcal{B} : \mathcal{C}$$

Ma **cambia le notazioni**: indica ora le flussioni con a, b, c. Il risultato assume la forma

$$2\mathcal{B}b = \mathcal{A}c + \mathcal{C}a$$

Di questo risultato Newton dà anche una dimostrazione 'algebrica'[4].

[4] *Ivi*, pp. 432-434

Un po' di algebra, in uno Scolio, *Ivi*, pp. 430-432.

Supponiamo che le "tres fluentes et perpetim proportionales" quantità $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ divengano $\mathcal{A}+\mathcal{D}, \mathcal{B}+\mathcal{E}, \mathcal{C}+\mathcal{F}$. Allora

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}+\mathcal{D})(\mathcal{C}+\mathcal{F}) &= (\mathcal{B}+\mathcal{E})^2, \\ \cancel{\mathcal{A}\mathcal{C}}+\mathcal{A}\mathcal{F}+\mathcal{D}\mathcal{C}+\mathcal{D}\mathcal{F} &= \cancel{\mathcal{B}^2}+2\mathcal{B}\mathcal{E}+\mathcal{E}^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Newton ora divide tutto per $\mathcal{E}$:

$$\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{E}} \cdot A + \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{E}} \cdot (\mathcal{C}+\mathcal{F}) = 2\mathcal{B}+\mathcal{E} \tag{2}$$

Ora, utilizzando l'assioma 6 $(\ldots)$, Newton ottiene

$$\frac{c}{b} \cdot \mathcal{A} + \frac{a}{b} \cdot C = 2\mathcal{B},$$

e quindi

$$c \cdot \mathcal{A} + a \cdot C = 2\mathcal{B} \cdot b.$$

Scegliendo che cosa ritenere costante si hanno varie possibilità.

Un altro esempio. 1

In questo esempio (*ivi*, pp. 474) Newton considera questa situazione. Abbiamo sei quantità A, B, C, D, E, F in proporzione continua e tali che $A + F$ sia una quantità data (”constituunt rectam”). Si tratta di individuare il massimo della quantità B.
Ripropongo la cosa in termini “moderni”, ma vicini al modo di procedere di Newton. Sia $A + F = a$ Abbiamo, indicando le quantità con $x, y, z, t, u, a - x$,

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{t} = \frac{t}{u} = \frac{u}{a - x}.$$

Quindi dal prodotto delle quantità uguali eseguito in due modi, si ha

$$\frac{x^5}{y^5} = \frac{x}{a - x} \quad \Rightarrow \quad y^5 = x^4(a - x).$$

Un altro esempio. 2

Ora, sempre in termini moderni, abbiamo

$$5y^4y' = 4x^3(a-x) - x^4 = 4ax^3 - 5x^4.$$

Quindi eguagliando a 0, si ha $x = \frac{4}{5}a$ oppure, come Newton preferisce, $a - x = \frac{1}{5}a$.
Ovviamente il risultato si può estendere ad un numero arbitrario di quantità in proporzione continua...e si ottiene sempre un risultato interessante *dal punto di vista geometrico.*
In questo caso abbiamo suddiviso una retta in parti uguali.
Ma è un modo semplice e naturale di trovare il massimo di una funzione della forma

$$y^n = x^{n-1}(a-x)$$

con $n \in \mathbb{N}$?

Esercizio

Con $n = 2$ si ha un'interpretazione geometrica semplice. Quale?

Al termine del trattato *De Methodis serierum et fluxionum* (rimasto inedito sino alla traduzione in inglese di Colson del 1736, ma ampiamente diffuso in forma manoscritta[5]) Newton aveva posto un *Addendum*[6] già inteso a riproporre il calcolo in termini *geometrici*.

Si tratta di dimostrare (con lo stesso apparato di assiomi, ecc.) che, se quattro quantità indicate con AB, AD, AE, AC sono tali che

$$AB : AD = AE : AC$$

allora

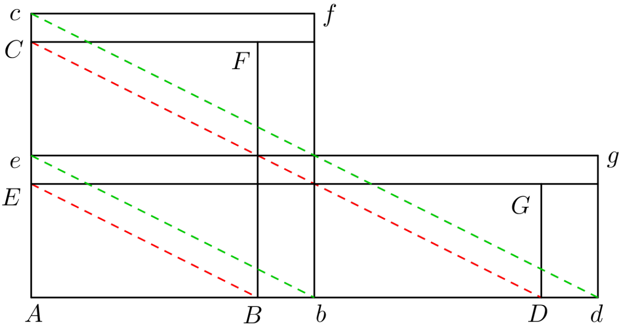
$$AB \cdot fl(AC) + AC \cdot fl(AB) = AD \cdot fl(AE) + AE \cdot fl(AD).$$

[5] *Cf.* [Guicciardini(2009), pp. 346-351].

[6] *Cf.*[Newton(1981), vol. 3, pp. 328-353].

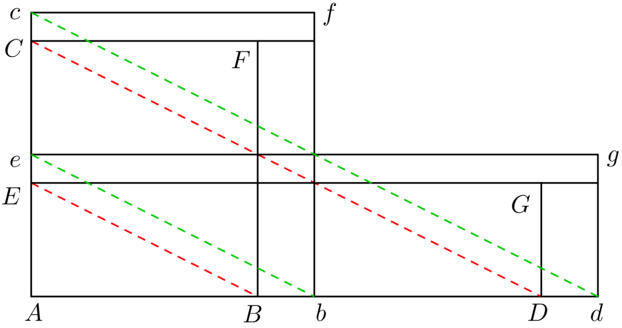
Una dimostrazione geometrica 1

Il rettangolo $AB \cdot AC$ si mantiene uguale al rettangolo $AD \cdot AE$.



Questo deve avvenire anche se le quantità fluiscono e, quindi deve essere $Ab \cdot Ac = Ad \cdot Ae$.

Una dimostrazione geometrica 2



Allora

$$Ab \cdot Cc + AC \cdot Bb = Ad \cdot Ee + AE \cdot Dd,$$

ossia

$$Ab + AC \cdot \frac{Bb}{Cc} = Ad \cdot \frac{Ee}{Cc} + AE \cdot \frac{Dd}{Cc}$$

Una dimostrazione geometrica 3

"Passando al limite":

$$AB + AC \cdot \frac{fl(AB)}{fl(AC)} = AD \cdot \frac{fl(AE)}{fl(AC)} + AE \cdot \frac{fl(AD)}{fl(AC)}$$

Moltiplicando per $fl(AC)$ si ha il risultato:

$$AB \cdot fl(AC) + AC \cdot fl(AB) = AD \cdot fl(AE) + AE \cdot fl(AD).$$

Si possono ottenere molti risultati particolari; ad esempio con $AD = AE = cost.$, ecc.

[Guicciardini(2009)] Guicciardini N. (2009).
Isaac Newton on Mathematical Certainty and Method.
MIT Press, Cambridge, Mass.

[Newton(1981)] Newton I. (1967-1981).
The Mathematical Papers of Isaac Newton, edited by D. T. Whiteside.
Cambridge University Press, Cambridge.