La *Arithmetica Universalis* di Newton

Massimo Galuzzi

Trento, 2020

- La *Arithmetica Universalis* è un testo che ha una genesi complessa.
- Nel contesto "cartesiano" dei Paesi Bassi della seconda metà del Seicento, Gerard Kinckhuysen pubblica un'*Algebra* (1661), tradotta in latino nel 1669 da Mercator.
- Collins cerca, senza successo, di pubblicarla con note ed aggiunte di Newton.
- Parte del materiale delle note sarà poi utilizzato da Newton per la *Arithmetica Universalis*.
- Tuttavia non sarà Newton a pubblicare il testo, ma William Whiston (1707). Il nome di Newton non compare.
- Newton "avrebbe dovuto" depositare il testo delle lezioni tenute (?) dal 1672 al 1683; ma probabilmente il materiale manoscritto, poi utilizzato da Whiston, è stato redatto interamente nell'inverno 1683-84 (Whiteside).

Un cenno sui contenuti (edizione del 1728)

- Parte iniziale: manipolazioni algebriche (su numeri e quantità simboliche)
  - Notazione, addizione, sottrazione, divisione [...]
  - [...] Eliminazione di una quantità incognita: quattro regole
  - Come le questioni possono trasformarsi in equazioni
  - Problemi aritmetici (16)
  - Come le questioni *geometriche* possono ricondursi ad equazioni
  - Discussione. Problemi geometrici (61)
- Parte finale: sulle equazioni
  - Somme di potenze delle radici
  - Un limite superiore per le radici positive
- Appendice: sulla costruzione lineare delle equazioni (soluzione, mediante l'uso di un opportuno postulato, delle equazioni di terzo grado)

- Dopo avere presentato le regole per le manipolazioni algebriche (ora abituali) Newton decrive come l'allievo deve esercitare il suo ingegno per trasformare le condizioni in equazioni.

  [...] egli deve considerare dapprima se le proposizioni o le frasi con le quali il problema è espresso siano adatte ad essere trasformate in termini algebrici (p. 67).

- Dopo la traduzione occorre operare per *risolvere* il problema.

  [...] deve dare dei nomi alle quantità note ed incognite [...] ed esprimere il senso della questione nel linguaggio analitico (ibidem).

Newton propone due esempi. Ecco il primo: come formulare in *equazioni* il *problema* consistente nel trovare tre numeri in proporzione continua la cui somma sia 20 e la cui somma dei quadrati sia 140.

Tre numeri,	x, y, z
in proporzione continua.	$x : y = y : z$ o $xz = y^2$
La somma vale 20	$x + y + z = 20$
e la somma dei quadrati vale 140	$x^2 + y^2 + z^2 = 140$

La soluzione diviene più agevole se vi sono meno incognite.
x e y sono sufficienti, perché $z = \frac{y^2}{x}$.

Il problema è risolto successivamente, come *Problema XIII*.

- Ecco la *Regola III* che consente il calcolo esplicito della eliminazione della variabile x tra le due seguenti equazioni:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$
$$fx^2 + gx + h = 0.$$

- Si ottiene una espressione assai complessa contenente gli 8 parametri a, b, c, d, e, f, g, h:

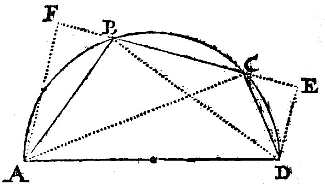
  $a^2h^4 - abgh^3 - 2\,acfh^3 + acg^2h^2 + 3\,adfgh^2 - adg^3h + 2\,aef^2h^2 - 4\,aefg^2h + aeg^4 + b^2fh^3 - bcfgh^2 - 2\,bdf^2h^2 + bdfg^2h + 3\,bef^2gh - befg^3 + c^2f^2h^2 - cdf^2gh - 2\,cef^3h + cef^2g^2 + d^2f^3h - def^3g + e^2f^4.$
- Tuttavia Newton propone l'uso effettivo di questa espressione come *regola di sostituzione!*

- Veniamo alla soluzione del *Problema XIII* (pp. 82-83).
- Come abbiamo visto, i primi due numeri sono x, y e il terzo è $\frac{y^2}{x}$;
- si ha $x + y + \frac{y^2}{x} = 20,\ x^2 + y^2 + \frac{y^4}{x^2} = 140.$
- Riscritte le equazioni eliminando i denominatori, si ha $x^2 + (y - 20)x + y^2 = 0,\ x^4 + (y^2 - 140)x^2 + y^4 = 0.$
- Si tratta ora di applicare la *Regola III*. E le cose vanno piuttosto bene, perché si ottiene, eliminando x:
- $y = \frac{13}{2}$, ecc. $\left(x = \frac{27}{4} \pm \frac{\sqrt{53}}{4}, z = \frac{27}{4} \mp \frac{\sqrt{53}}{4}\right)$.
- Si noti il procedere "cartesiano" di Newton: anziché sfruttare la particolarità della situazione, preferisce applicare la sua *Regola III*.

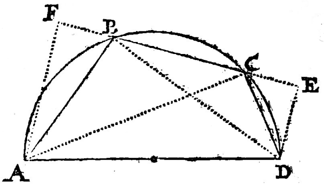
- Una parte interessante del testo newtoniano è quella ove gli strumenti algebrici si applicano ai problemi geometrici.
- Nella parte finale del testo (*Appendice*, p. 228) Newton critica severamente l'approccio dei cartesiani, che confondono aritmetica e geometria:
  Gli antichi distinguevano l'una dall'altra con molta cura tanto che essi non introdussero mai termini aritmetici in geometria; ...ma gente dei nostri tempi, confondendole l'una coll'altra ha perso la semplicità nella quale consiste tutta l'eleganza della geometria.
- In ciò che precede l'*Appendice*, il comportamento di Newton, a prima vista, non sembra differire eccessivamente da quello di Descartes. Tuttavia vi è una diversità notevole.

Un problema di van Schooten ripreso da Newton con uno scopo diverso

- Van Schooten vuole presentare un problema geometrico *significativo* che dia luogo al *caso irriducibile* di un'equazione di terzo grado.



Dati i segmenti $AB = a, BC = b, CD = c$, si vuole determinare $AD = x$ che realizzi quanto mostra la figura: l'iscrizione in un semicerchio di diametro AD.



Si ha $AD^2 - AB^2 = BD^2 = x^2 - a^2$.

Considerando il triangolo BCD:

$BD^2 = BC^2 + CD^2 + 2BC \times CE$.

Quindi: $2b \times CE = x^2 - a^2 - b^2 - c^2$.

I triangoli ABD e CDE sono simili.

$AD : AB = CD : CE \Rightarrow CE = \frac{ac}{x}$.

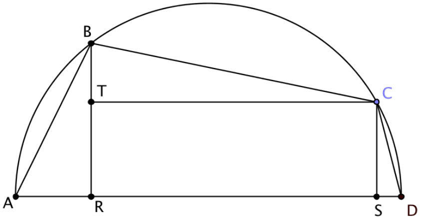
L'equazione finale: $x^3 = (a^2 + b^2 + c^2)x + 2abc$.

- Van Schooten ha un'equazione *interessante* che ha sempre tre radici reali.
- Il discriminante, a meno del fattore costante 4, è

  $(a^2 + b^2 + c^2)^3 - 27a^2b^2c^2$.

  Van Schooten dimostra che questa quantità è sempre maggiore od uguale a 0.
- Newton riprende il problema con uno scopo diverso.
- Ci sono *molti modi* per giungere alla stessa equazione, utilizzando *diversi strumenti geometrici*.

- Newton presenta altre possibili vie per giungere all'equazione.



$AB : AR = AD : AB \Rightarrow AR = \frac{a^2}{x}$.

Simmetricamente: $SD = \frac{c^2}{x}$.

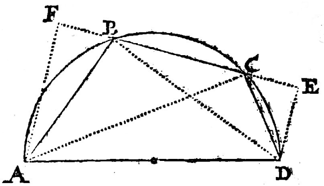
$RS = x - \frac{a^2}{x} - \frac{c^2}{x}$.

$BR : AB = BD : AD \Rightarrow BR = \frac{a}{x}\sqrt{x^2 - a^2}$.

Analogamente $CS = \frac{c}{x}\sqrt{x^2 - c^2}$.

Infine $(BR - CS)^2 + RS^2 = b^2$, ecc.

- Dopo aver illustrato molte possibilità, Newton presenta la più semplice. Dal Teorema di Tolomeo:

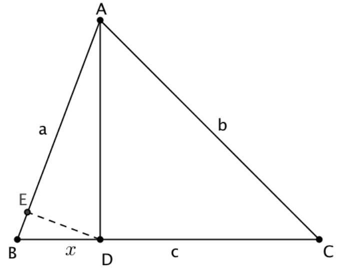


$$AB \times CD + BC \times AD = AC \times BD.$$
$$\sqrt{x^2 - a^2}\,\sqrt{x^2 - c^2} = ac + bx.$$

Quadrando ambo i menbri, si ottiene immediatamente l'equazione.

- Il vero scopo di Newton è quello di mostrare che la pluralità di modi con i quali si può risolvere un problema è un dato significativo.
- Una ricchezza che non va dispersa e sacrificata cercando la sola soluzione ottimale (contro Descartes).

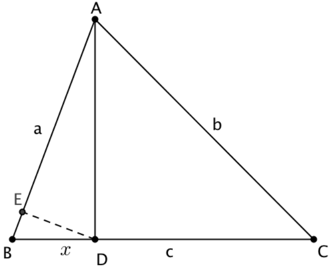
Tra i problemi geometrici risolti: il *Problema II.*



Date le lunghezze dei lati, come in figura, si tratta di calcolare BD.

Utilizzando il teorema di Pitagora, Newton ottiene facilmente $BD = x = \dfrac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}$.

Ma si può fare di meglio (a giudizio di Newton ...): sostituendo l'uso del teorema di Pitagora con la similitudine.



$$AB : BD = BD : BE \Rightarrow a : x = x : \frac{x^2}{a}.$$

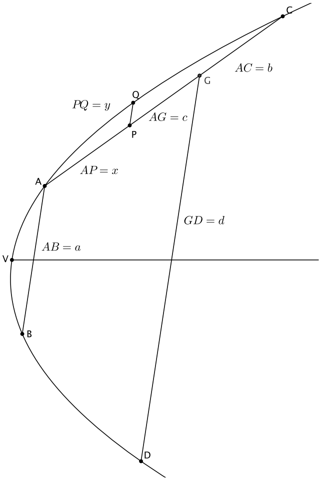
$EA = a - \frac{x^2}{a}$; $EA : AD = AD : AB \Rightarrow a^2 - x^2 = AD^2$.

Per simmetria, otteniamo lo stesso risultato dal triangolo ADC, utilizzando b e $c - x$.

$a^2 - x^2 = AD^2 = b^2 - (c - x)^2$. Si ottiene di nuovo il valore di x.

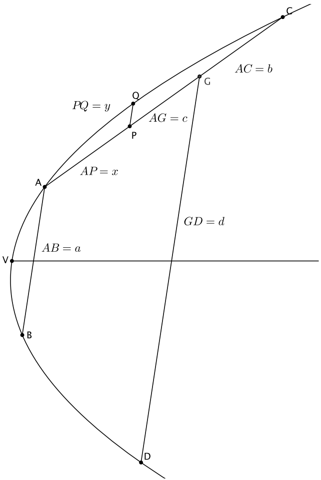
- Ma negli *Elementi* la I.47 *non è* ottenuta dalla similitudine!
- Newton non sembra avere un grande rispetto filologico.

Il *Problema 58*: una parabola per 4 punti



Dopo avere assegnato valori alle quantità *note* ed *ignote* Newton scrive l'equazione della parabola:
$y = e + fx \pm \sqrt{g^2 + hx}$.

Poi procede in modo assai "cartesiano":



Se $x = 0$ si ha $y = e \pm g$. Ma A ha ordinata 0, mentre B ha ordinata $-a$. Quindi $e + g = 0, e - g = a$. Ecc.

Somme di potenze delle radici

- Newton enuncia (e non dimostra) questo risultato:
  Data l'equazione $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - rx^{n-3} + sx^{n-4} - \cdots$ ed indicate con $a, b, c, d, \ldots$ la somma delle radici, la somma dei quadrati, la somma delle potenze di ordine tre, ecc., si ha:

  $$a = p, b = pa + 2q, c = pb + qa + 3r, d = pc + qb + ra + 4s, \ldots$$

- In termini moderni, indicando le somme con S_k:

  $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} \Rightarrow \sum_{i=0}^{r-1} a_i S_{r-i} + r a_r = 0.$$

- Poiché S_1 è noto i valori di S_k si ottengono per ricorrenza (e si assume $a_k = 0$ per $k > n$).

La dimostrazione di Lagrange

- Scriviamo $f(x)$ in due modi, mettendo in evidenza le radici: $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$.
- Ne segue che

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)a_k x^{n-k-1}}{\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \cdots + \frac{1}{x - x_n}.$$

- Utilizzando la serie geometrica, abbiamo:

$$\frac{1}{x - x_k} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x_k}{x}} = \frac{1}{x} + \frac{x_k}{x^2} + \frac{x_k^2}{x^3} + \cdots$$

- Quindi

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)a_k x^{n-k-1}}{\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}} = \frac{n}{x} + \frac{S_1}{x^2} + \frac{S_2}{x^3} + \cdots$$

- Da questa uguaglianza si ricava facilmente la definizione ricorsiva.

Un altro risultato: un limite superiore per le radici positive

- Newton considera un esempio numerico (completamente esplicativo):

$$x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 = 0. \tag{1}$$

- L'interpretazione più diffusa è che Newton calcoli tutte le derivate della funzione a primo membro della (1) e determini un valore per le quali siano tutte positive.
- Tuttavia, come suggerisce Jackie Stedall, il risultato si può ottenere in modo leggermente diverso.[1]
- Vediamo l'effetto del cambiamento di variabili

$$x \longleftarrow y + k.$$

[1] *Cf.* [Stedall(2011), p. 74].

$$
\begin{aligned}
&y^5+5ky^4+10k^2y^3+10k^3y^2+5k^4y+k^5\\
&-2(y^4+4ky^3+6k^2y^2+4k^3y+k^4)\\
&-10(y^3+3ky^2+3k^2y+k^3)\\
&+30(y^2+2ky+k^2)\\
&+63(y+k)\\
&-120
\end{aligned}
$$

Se imponiamo che tutti i coefficienti di y siano positivi, ovviamente ritroviamo, a meno di fattori numerici, la regola per le derivate.

Per i coefficienti abbiamo in effetti da chiedere

$$
\begin{aligned}
& k^5 - 2k^4 - 10k^3 + 30^2 + 63l - 120 > 0, \\
& 5k^4 - 8k^3 - 30k^2 + 60k + 63 > 0; \\
& 10k^3 - 12k^2 - 30k + 30 > 0, \\
& \textit{ecc.}
\end{aligned}
$$

e le derivate del primo membro della (1) valutate in k si ottengono moltiplicando per $0!, 1!, 2!, \ldots$ le quantità precedenti a sinistra del simbolo $>$.
Si noti che, essendo il coefficiente del termine direttivo sempre positivo, esiste certamente un valore di k abbastanza grande per il quale tutte le disuguaglianze siano verificate.

[Newton(1707)] Newton I. (1707).
Arithmetica Universalis ; sive de Compositione et Resolutione Arithmetica Liber.
Typis Academicis, Cantabrigiæ.

[Newton(1720)] Newton I. (1720).
Universal Arithmetick : or, a Treatise of Arithmetical Composition and Resolution.
J. Senex, etc., London.

[Stedall(2011)] Stedall J. (2011).
From Cardano's great art to Lagrange's reflections: filling a gap in the history of algerba.
European Mathematical Society.