Geometria B

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2017/2018

2 luglio 2019

Lo studente svolga i seguenti esercizi. **Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata**. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

Attenzione. *Il testo è composto da due pagine (la seconda pagina è sul retro di questo foglio).*

Esercizio 1. Sia J l'intervallo $[0,2]$ della retta reale, sia τ la topologia su J indotta da quella euclidea di $\mathbb{R}$, e siano α e β i seguenti due sottoinsiemi di τ:

$$\alpha := \{\emptyset\} \cup \{A \in \tau \,|\, 1 \in A\}, \qquad \beta := \{\emptyset\} \cup \{A \in \tau \,|\, (1,2] \subset A\}.$$

(1a) Si dimostri che α e β sono due topologie su J che non soddisfano la condizione di Hausdorff e che non sono confrontabili.

(1b) Si definisca una applicazione continua $f : (J,\alpha) \to (J,\beta)$ che non sia costante.

(1c) Si dica se (J,α) è connesso per archi. Si dica inoltre se (J,β) è connesso.

(1d) Sia $\mathcal{R}$ la relazione di equivalenza su J definita ponendo:

$$x \,\mathcal{R}\, y \text{ se e soltanto se } x = y \text{ oppure } x \neq y \text{ e } \{x,y\} \subset (1,2].$$

Si dimostri che lo spazio topologico quoziente di (J,β) modulo $\mathcal{R}$ non è omeomorfo a (J,α).

(1e) Si dica se il prodotto topologico tra (J,α) e (J,β) è compatto.

Esercizio 2. Sia X uno spazio topologico e sia A un suo sottoinsieme. Si dimostri che

$$\mathrm{Fr}(\mathrm{int}(A)) \cup \mathrm{Fr}(\,\overline{A}\,) \subset \mathrm{Fr}(A),$$

dove $\mathrm{int}(A)$ è la parte interna di A in X, $\overline{A}$ è la chiusura di A in X e $\mathrm{Fr}(B)$ è la frontiera di B in X per ogni $B \in \mathcal{P}(X)$.

Si esibisca inoltre un esempio di spazio topologico X e di un suo sottoinsieme A tale che $\mathrm{Fr}(\mathrm{int}(A)) \cup \mathrm{Fr}(\,\overline{A}\,) \neq \mathrm{Fr}(A)$.

Esercizio 3. Siano C e C' le circonferenze nel piano $y = 0$ definite da

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0,\ (x-2)^2 + z^2 = 1\}$$

$$C' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0,\ (x-3)^2 + z^2 = 4\}$$

e sia X lo spazio topologico ottenuto ruotando l'insieme $C \cup C'$ attorno all'asse z.

(3a) Si calcoli il gruppo fondamentale di X.

(3b) Si calcoli l'abelianizzato del gruppo fondamentale di X e si stabilisca se X è omeomorfo a una superficie compatta.

Esercizio 4. (4a) Si calcoli l'integrale

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{5 + 4\sin x}\, dx.$$

(4b) Si determini un disco aperto centrato nell'origine che contenga tutti gli zeri del polinomio $f(z) = z^{11} + 12z^7 - 3z^2 + z - 2$. Quanti zeri di f stanno nel disco aperto di raggio uno centrato nell'origine?