Geometria B

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2017/2018
4 settembre 2018

Lo studente che intende avvalersi del voto ottenuto alla prova intermedia svolga solamente gli esercizi n. 3 e n. 4. Il tempo a sua disposizione è di due ore.

Lo studente che non si avvale della prova intermedia svolga tutti e quattro gli esercizi. Il tempo a sua disposizione è di tre ore.

Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

Attenzione. *Il testo è composto da due pagine (la seconda pagina è sul retro di questo foglio).*

Esercizio 1. Si risponda ai seguenti quesiti:

(1a) Sia X uno spazio topologico, sia A un sottoinsieme aperto di X e sia D un sottoinsieme denso di X. Si dimostri che $\overline{A} = \overline{A \cap D}$, ove $\overline{A}$ indica la chiusura di A in X e $\overline{A \cap D}$ indica la chiusura di $A \cap D$ in X.

Si fornisca un esempio di spazio topologico X, di sottoinsieme denso D di X e di sottoinsieme A di X tali che A non è aperto in X e $\overline{A} \neq \overline{A \cap D}$.

(1b) Sia j la topologia su $\mathbb{R}$ avente per base la seguente famiglia di intervalli:

$$\{[a, b) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \,|\, a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

Si dimostri che i sottospazi topologici $[0, 1)$ e $(0, 1]$ di $(\mathbb{R}, j)$ non sono omeomorfi.

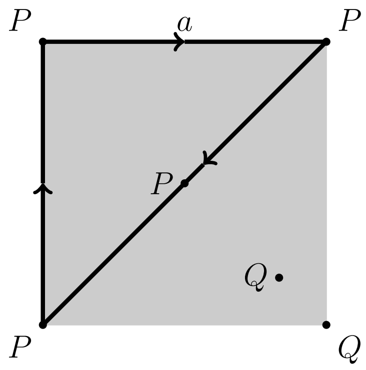
(1c) Sia j la topologia su $\mathbb{R}$ definita nel precedente punto (1b) e sia $(\mathbb{R}^2, \eta)$ il prodotto topologico di $(\mathbb{R}, j)$ con se stesso. Si dimostri che η è strettamente più fine della topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$. Si dica inoltre se $(\mathbb{R}^2, \eta)$ è di Hausdorff.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}^2$ il piano dotato della topologia euclidea, sia L il sottospazio topologico $(-1, 1) \times \{0, 1\}$ di $\mathbb{R}^2$ e sia X lo spazio topologico quoziente di L ottenuto identificando i punti $(x, 0)$ e $(x, 1)$ per ogni $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$. Indichiamo con $\pi : L \to X$ l'applicazione di passaggio al quoziente.

(2a) Si dimostri che X è uno spazio topologico locamente euclideo che non soddisfa la condizione di Hausdorff. Si dimostri inoltre che π non è chiusa.

(2b) Si dica se X è compatto e/o connesso.

Esercizio 3. Si consideri lo spazio topologico X ottenuto da un quadrato chiuso identificando i punti P tra di loro e i punti Q tra di loro come in figura. I lati non hanno identificazioni.



(3a) Si calcolino i gruppi fondamentali di X e di $X \setminus \{Q\}$.

(3b) Si stabilisca se X e $X \setminus \{Q\}$ sono spazi omeomorfi e/o omotopicamente equivalenti.

(3c) Si dica se il cappio a è omotopo al cammino costante in P.

Esercizio 4. (4a) Sia $\gamma_r(t) = re^{it}$ la circonferenza di centro l'origine e raggio r. Si calcoli l'integrale di linea

$$I_r = \int_{\gamma_r} \frac{e^{\sin(z^2)}}{(z^2+1)(z-2i)^3}\, dz.$$

per valori del raggio r nell'intervallo $(0, 2)$, differente da 1.

(4b) Si consideri l'equazione $z^4 - 3z + 1 = 0$. Quante radici ha nel disco unitario aperto?