Geometria B

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2016/2017
6 febbraio 2018

Si svolgano i seguenti quattro esercizi. **Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata**. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

Attenzione. *Il testo è composto da due pagine (la seconda pagina è sul retro di questo foglio).*

Esercizio 1. Si risponda ai seguenti quesiti:

(1a) Sia X uno spazio topologico e siano A e B due sottoinsiemi di X. Indichiamo con $\mathrm{int}(A)$, $\mathrm{int}(B)$ e $\mathrm{int}(A \cap B)$ rispettivamente le parti interne in X di A, B e $A \cap B$. Si dimostri che $\mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B) = \mathrm{int}(A \cap B)$. Si costruisca inoltre un esempio esplicito di X, A e B tale che $\mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(B) \neq \mathrm{int}(A \cup B)$.

(1b) Sia $f : X \to Y$ una applicazione continua e surgettiva tra spazi topologici X e Y. Si dimostri che, se D è un sottoinsieme denso di X, allora $f(D)$ è un sottoinsieme denso di Y.

Esercizio 2. Sia $X := \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \geq 2\}$. Per ogni $n \in X$, definiamo

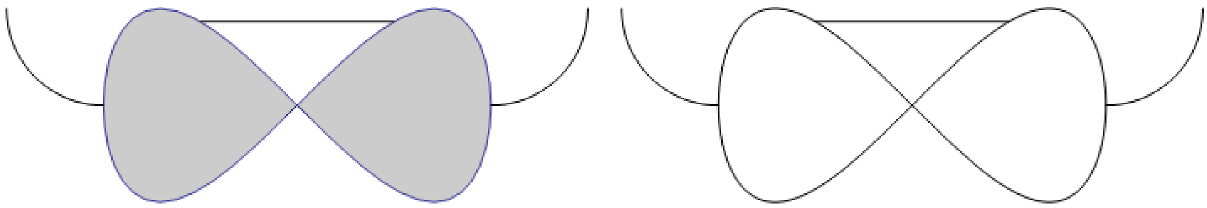
$$B_n := \{m \in X \,|\, m \text{ è un multiplo di } n\}.$$

Denotiamo con $\mathcal{B}$ la famiglia $\{B_n \in \mathcal{P}(X) \,|\, n \in X\}$ di sottoinsiemi di X.

(2a) Si dimostri che $\mathcal{B}$ è la base di una topologia τ di X. Si dica inoltre se (X, τ) è connesso e/o compatto.

(2b) Sia τ la topologia su X definita in (2a). Definiamo una relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ su X ponendo: $m \,\mathcal{R}\, n$ se e soltanto se $n - m = 2k$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Indichiamo con $(X/_{\mathcal{R}}, \eta)$ lo spazio topologico quoziente di (X, τ) modulo $\mathcal{R}$. Si determinino tutti gli aperti di η.

Esercizio 3. Si considerino i due sottospazi topologici di $\mathbb{R}^2$ rappresentati in figura: lo spazio topologico O ("occhiali") e il suo sottospazio M ("montatura").



(3a) Calcolare il gruppo fondamentale di O.

(3b) Stabilire se M è un retratto/retratto di deformazione di O.

Esercizio 4.

(4a) Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma \frac{z^2-2}{(z-1)(z+1)^3}dz$$

lungo la circonferenza γ di centro l'origine e raggio 2 percorsa in senso antiorario.

(4b) Sia $u(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione così definita:

$$u(x,y) = x^2 - y^2 + e^{kx} \cos y \sin y.$$

Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la funzione $u(x,y)$ è parte reale di una funzione olomorfa.