Geometria III

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2016/2017
6 febbraio 2018

Si svolgano i seguenti quattro esercizi. **Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata**. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

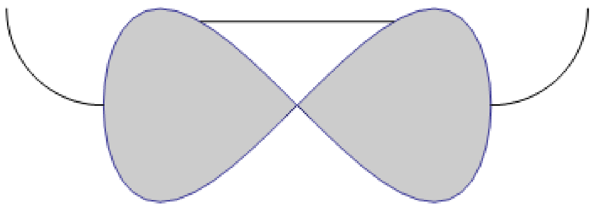
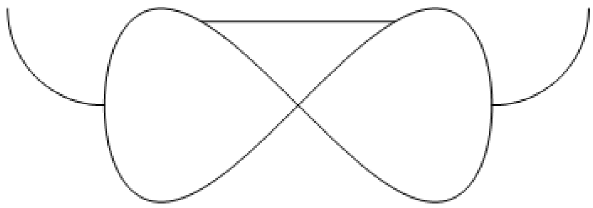
Esercizio 1. Sia $\mathbb{R}^3$ lo spazio tridimensionale ordinario dotato della topologia euclidea e siano S e X i sottospazi topologici di $\mathbb{R}^3$ definiti ponendo:

- S è il segmento di $\mathbb{R}^3$ avente per estremi i punti $(0,0,-1)$ e $(0,0,1)$;
- $X := \mathbb{S}^2 \cup S$, dove $\mathbb{S}^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$.

(1a) Si calcolino i gruppi di omologia $H_q(X)$ per ogni $q \in \mathbb{N}$ utilizzando il teorema di Mayer-Vietoris.

(1b) Si dica se esiste un punto P di X tale che il sottospazio topologico $X \setminus \{P\}$ di X sia omeomorfo a $\mathbb{S}^2$.

Esercizio 2. Si considerino i due sottospazi topologici di $\mathbb{R}^2$ rappresentati in figura: lo spazio topologico O ("occhiali") e il suo sottospazio M ("montatura").

(2a) Calcolare il gruppo fondamentale di O.

(2b) Stabilire se M è un retratto/retratto di deformazione di O.

Esercizio 3.

(3a) Calcolare l'integrale
$$\int_\gamma \frac{z^2-2}{(z-1)(z+1)^3}dz$$
lungo la circonferenza γ di centro l'origine e raggio 2 percorsa in senso antiorario.

(3b) Qual è il residuo all'infinito della funzione integranda $f(z) = \frac{z^2-2}{(z-1)(z+1)^3}$?

Esercizio 4. Sia $u(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione così definita:
$$u(x,y) = x^2 - y^2 + e^{kx} \cos y \sin y.$$

(4a) Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la funzione $u(x,y)$ è parte reale di una funzione olomorfa.

(4b) Per un valore di k trovato in (4a), determinare una funzione olomorfa f con parte reale u.