Geometria B

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2017/2018
4 settembre 2018

Lo studente che intende avvalersi del voto ottenuto alla prova intermedia svolga solamente gli esercizi n. 3 e n. 4. Il tempo a sua disposizione è di due ore.

Lo studente che non si avvale della prova intermedia svolga tutti e quattro gli esercizi. Il tempo a sua disposizione è di tre ore.

Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

Attenzione. *Il testo è composto da due pagine (la seconda pagina è sul retro di questo foglio).*

Esercizio 1. Si risponda ai seguenti quesiti:

(1a) Sia X uno spazio topologico, sia A un sottoinsieme aperto di X e sia D un sottoinsieme denso di X. Si dimostri che $\overline{A} = \overline{A \cap D}$, ove $\overline{A}$ indica la chiusura di A in X e $\overline{A \cap D}$ indica la chiusura di $A \cap D$ in X.

Si fornisca un esempio di spazio topologico X, di sottoinsieme denso D di X e di sottoinsieme A di X tali che A non è aperto in X e $\overline{A} \neq \overline{A \cap D}$.

(1b) Sia j la topologia su $\mathbb{R}$ avente per base la seguente famiglia di intervalli:

$$\{[a, b) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

Si dimostri che i sottospazi topologici $[0, 1)$ e $(0, 1]$ di $(\mathbb{R}, j)$ non sono omeomorfi.

(1c) Sia j la topologia su $\mathbb{R}$ definita nel precedente punto (1b) e sia $(\mathbb{R}^2, \eta)$ il prodotto topologico di $(\mathbb{R}, j)$ con se stesso. Si dimostri che η è strettamente più fine della topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$. Si dica inoltre se $(\mathbb{R}^2, \eta)$ è di Hausdorff.

SOLUZIONE:

(1a) Evidentemente $\overline{A} \supset \overline{A \cap D}$. Sia $x \in \overline{A}$ e sia U un intorno di x in X. A meno di restringere U, possiamo assumere che U sia aperto. Segue che $A \cap U$ è un aperto non vuoto di X. Sia y un punto di $A \cap U$. Poiché D è denso in X, y è aderente a D e quindi l'intorno $A \cap U$ di y interseca D. In altre parole $(A \cap D) \cap U = A \cap U \cap D \neq \emptyset$. Segue che $x \in \overline{A \cap D}$.

Sia X l'insieme $\{0, 1\}$ dotato della topologia banale, sia $A := \{0\}$ e sia $D := \{1\}$. Vale: D è denso, A non è aperto e $X = \overline{A} \neq \overline{A \cap D} = \emptyset$. Ecco un altro esempio: $X := \mathbb{R}$ con topologia euclidea, $A := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e $D := \mathbb{Q}$.

(1b) I due sottospazi topologici non sono omeomorfi in quanto il singoletto $\{1\}$ è aperto in $(0, 1]$ mentre $[0, 1)$ non ha singoletti aperti.

(1c) Per verifica diretta.

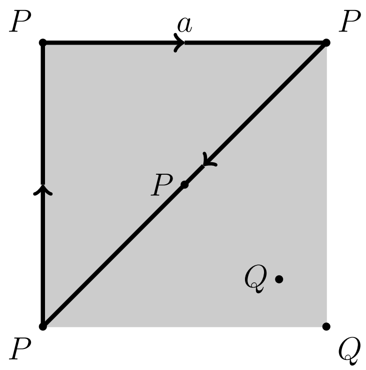
Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}^2$ il piano dotato della topologia euclidea, sia L il sottospazio topologico $(-1, 1) \times \{0, 1\}$ di $\mathbb{R}^2$ e sia X lo spazio topologico quoziente di L ottenuto identificando i punti $(x, 0)$ e $(x, 1)$ per ogni $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$. Indichiamo con $\pi : L \to X$ l'applicazione di passaggio al quoziente.

(2a) Si dimostri che X è uno spazio topologico locamente euclideo che non soddisfa la condizione di Hausdorff. Si dimostri inoltre che π non è chiusa.

(2b) Si dica se X è compatto e/o connesso.

SOLUZIONE:
(2a) Prima parte: similmente all'Osservazione 1.5 a pagina 4 degli appunti di Gianluca.
Seconda parte: $(-1,1) \times \{0\}$ è chiuso in L, ma la sua π-saturazione $L \setminus \{(0,1)\}$ non lo è.
(2b) X non è compatto: dal suo ricoprimento aperto $\{\pi((-1+\epsilon, 1-\epsilon) \times \{0,1\})\}_{\epsilon \in (0,1)}$ non si può estrarre nessun sottoricoprimento finito. X è immagine tramite π del sottospazio topologico connesso $(-1,1) \times \{0\}$ di L, dunque è connesso

Esercizio 3. Si consideri lo spazio topologico X ottenuto da un quadrato chiuso identificando i punti P tra di loro e i punti Q tra di loro come in figura. I lati non hanno identificazioni.



(3a) Si calcolino i gruppi fondamentali di X e di $X \setminus \{Q\}$.

(3b) Si stabilisca se X e $X \setminus \{Q\}$ sono spazi omeomorfi e/o omotopicamente equivalenti.

(3c) Si dica se il cappio a è omotopo al cammino costante in P.

SOLUZIONE: (3a) Lo spazio X ha come retratto di deformazione il sottospazio costituito dalle due diagonali del quadrato, con 3 vertici identificati col centro P, e col quarto vertice identificato con Q. Dunque X ha lo stesso tipo di omotopia di un bouquet di 4 circonferenze, con $\pi(X,P) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

Sia C una circonferenza contenuta nel triangolo in basso e centrata in Q. Lo spazio $X \setminus \{Q\}$ ha come retratto di deformazione il sottospazio costituito dalla diagonale contenuta in a, dalla parte dell'altra diagonale che non passa per Q, da C e da un arco che unisce il centro P alla circonferenza C. Dunque anche $X \setminus \{Q\}$ ha lo stesso tipo di omotopia di un bouquet di 4 circonferenze, con gruppo fondamentale $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

(3b) Per quanto visto sopra X e $X \setminus \{Q\}$ sono omotopicamente equivalenti. Non sono omeomorfi (ad esempio, X è compatto).

(3c) Sì: nel bouquet il cammino a corrisponde ad un cammino che percorre 3 mezze diagonali due volte in direzioni opposte, per cui si può contrarre al cammino costante in P.

Esercizio 4. (4a) Sia $\gamma_r(t) = re^{it}$ la circonferenza di centro l'origine e raggio r. Si calcoli l'integrale di linea

$$I_r = \int_{\gamma_r} \frac{e^{\sin(z^2)}}{(z^2+1)(z-2i)^3}\, dz.$$

per valori del raggio r nell'intervallo $(0,2)$, differente da 1.

(4b) Si consideri l'equazione $z^4 - 3z + 1 = 0$. Quante radici ha nel disco unitario aperto?

SOLUZIONE: (4a) Per $0 < r < 1$, si ha $I_r = 0$ per il Toerema di Cauchy, poiché la funzione integranda è olomorfa nel disco di raggio r. Per $1 < r < 2$, applicando il Teorema dei residui (nei poli $i, -i$) si ottiene che l'integrale I_r è uguale a $-i\pi(1 - 3^{-3})e^{-\sin 1}$.

(4b) Usando il Teorema di Rouché con $f(z) = z^4 - 3z + 1$ e $g(z) = -3z$, si ottiene che il disco unitario contiene una sola radice dell'equazione.