# Geometria B

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2017/2018
4 febbraio 2019

Lo studente svolga i seguenti esercizi. **Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata**. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

Attenzione. *Il testo è composto da due pagine (la seconda pagina è sul retro di questo foglio).*

**Esercizio 1.** Sia $\mathbb{R}$ la retta reale, sia $\tau$ la topologia euclidea di $\mathbb{R}$ e sia $\eta$ la famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ definita ponendo:

$$\eta := \{\emptyset\} \cup \{A \in \tau \,|\, \mathbb{R} \setminus A \text{ è limitato}\}.$$

(1a) Si dimostri che $\eta$ è una topologia su $\mathbb{R}$ che non soddisfa la condizione di Hausdorff.

(1b) Si dica se lo spazio topologico $(\mathbb{R}, \eta)$ è compatto.

(1c) Definiamo la relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ su $\mathbb{R}$ ponendo:

$$x \,\mathcal{R}\, y \text{ se e soltanto se } x, y \in [-1, 1] \text{ oppure } (x = y \text{ e } x \notin [-1, 1]).$$

Si dimostri che lo spazio topologico quoziente $(\mathbb{R}/_{\mathcal{R}}, \tau_{\mathcal{R}})$ di $(\mathbb{R}, \tau)$ modulo $\mathcal{R}$ è omeomorfo a $(\mathbb{R}, \tau)$ stesso.

(1d) Sia $(\mathbb{R}^2, \xi)$ lo spazio topologico prodotto di $(\mathbb{R}, \tau)$ e $(\mathbb{R}, \eta)$. Si calcoli la chiusura di $\mathbb{Z} \times \{0\}$ in $(\mathbb{R}^2, \xi)$. Si calcoli inoltre la parte interna di $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{Z})$ in $(\mathbb{R}^2, \xi)$.

**Esercizio 2.** Sia $X$ uno spazio topologico compatto, sia $Y$ uno spazio topologico metrizzabile e sia $f : X \to Y$ una applicazione continua e surgettiva. Consideriamo un sottospazio topologico $A$ di $X$ e un sottospazio topologico $B$ di $Y$ tali che $A = f^{-1}(B)$. Indichiamo con $g : A \to B$ la restrizione di $f$ da $A$ a $B$. Si dimostri che $g$ è una applicazione continua, surgettiva e chiusa.

**Esercizio 3.** Siano $S$ e $T$ i sottospazi topologici di $\mathbb{R}^2$ così definiti:

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + (y-4)^2 \leq 4,\ y \neq 2\} \quad \text{(corona circolare privata di un punto)},$$
$$T = T_1 \cup T_2 \cup \{P\},\ \text{con } P = (2,4), \text{ e } T_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + (y-4)^2 \leq 4,\ y > 4\},$$
$$T_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq (x-4)^2 + (y-4)^2 \leq 4,\ y > 4\} \quad \text{(due semi-corone circolari unite in un punto)}.$$

Siano $S'$ e $T'$ ottenuti da $S$ e $T$ mediante la riflessione rispetto all'asse $x$. Sia $X$ lo spazio quoziente ottenuto da $S \cup S'$ identificando i punti della frontiera di $S$ appartenenti a $S$ con i punti simmetrici rispetto all'asse $x$, appartenenti a $S'$. Analogamente, sia $Y$ ottenuto da $T \cup T'$ con la stessa identificazione.

(3a) Si mostri che $X$ e $Y$ sono omotopicamente equivalenti e si calcoli il loro gruppo fondamentale.

(3b) Si dica se $X$ e $Y$ sono spazi omeomorfi.

**Esercizio 4.**

(4a) Si consideri la funzione di due variabili reali $u(x,y) = e^{-y} \cos x$. Esiste una funzione olomorfa $f = u + iv$ con parte reale $u$? In caso affermativo, si trovi $v$ tale che $v(0) = 1$.

(4b) Si mostri, usando il Teorema dei residui, che vale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{e}.$$