Geometria B

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2017/2018
11 gennaio 2019

Lo studente svolga i seguenti esercizi. **Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata**. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

Attenzione. *Il testo è composto da due pagine (la seconda pagina è sul retro di questo foglio).*

Esercizio 1. Sia $\mathbb{R}$ la retta reale, sia $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ l'insieme delle parti di $\mathbb{R}$ e sia τ la famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ definita ponendo:

$$\tau := \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \,|\, 0 \notin A\} \cup \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \,|\, 0 \in A, \mathbb{R} \setminus A \text{ è finito}\}.$$

(1a) Si dimostri che τ è una topologia su $\mathbb{R}$.

(1b) Si dica se la funzione $f : (\mathbb{R}, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau)$ definita ponendo $f(x) := \cos(x)$ è continua.

(1c) Si dimostri che $(\mathbb{R}, \tau)$ è totalmente sconnesso, cioè che la componente connessa di ogni punto x di $(\mathbb{R}, \tau)$ è uguale a $\{x\}$.

(1d) Si dica se il sottoinsieme $[0, 1)$ di $(\mathbb{R}, \tau)$ è compatto.

(1e) Sia $(\mathbb{R}^2, \eta)$ il prodotto topologico di $(\mathbb{R}, \tau)$ con se stesso e sia J il segmento $[1, 2] \times \{0\}$ di $\mathbb{R}^2$. Si calcoli la chiusura di J in $(\mathbb{R}^2, \eta)$.

Esercizio 2. Sia X l'intervallo $[-1, 1]$ della retta reale $\mathbb{R}$ dotato della topologia indotta da quella euclidea di $\mathbb{R}$. Definiamo la relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ su X ponendo:

$$x \,\mathcal{R}\, y \text{ se e soltanto se } (|x| = |y| \text{ e } |x| < 1) \text{ oppure } (x = y \text{ e } |x| = 1).$$

Indichiamo con $X/_{\mathcal{R}}$ lo spazio topologico quoziente di X modulo $\mathcal{R}$ e con $\pi : X \to X/_{\mathcal{R}}$ l'applicazione di passaggio al quoziente.

(2a) Si dimostri che $X/_{\mathcal{R}}$ è uno spazio topologico T_1 ma non T_2.

(2b) Si costruisca un sottoinsieme non vuoto e compatto di $X/_{\mathcal{R}}$ che non sia chiuso in $X/_{\mathcal{R}}$.

Esercizio 3. Sia $\mathbb{R}^3$ lo spazio tridimensionale euclideo e sia T il sottospazio topologico di $\mathbb{R}^3$ (un *toro solido*) ottenuto ruotando il disco

$$D = \{(x, y, z) \in R^3 \mid (x-2)^2 + z^2 \leq 1,\ y = 0\}$$

attorno all'asse z. Siano P e Q due punti appartenenti alla frontiera di T e sia X lo spazio topologico ottenuto da T identificando P e Q.

(3a) Si calcoli il gruppo fondamentale di X.

(3b) Si dica se esiste un retratto di deformazione di X omeomorfo a una superficie compatta.

Esercizio 4. (4a) Si consideri l'equazione

$$z^3 + 3z = \frac{1}{2} + \frac{1}{z}.$$

Si determini un disco centrato nell'origine che contenga tutte le soluzioni dell'equazione e si stabilisca quante soluzioni appartengono al disco unitario $|z| < 1$.

(4b) Si calcoli l'integrale

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4 + \sin x} dx.$$