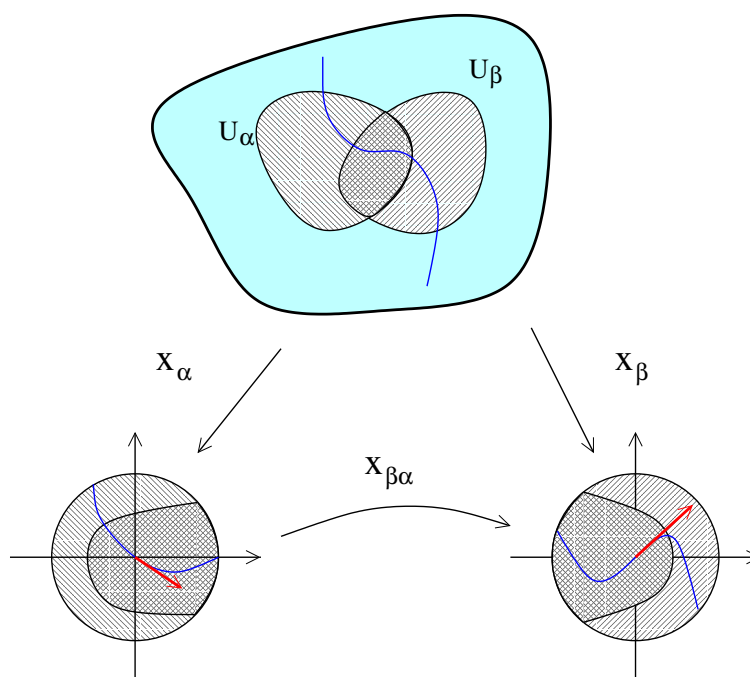


---

Gianluca Occhetta

---

Introduzione alla  
GEOMETRIA DIFFERENZIALE



---

Dipartimento di Matematica  
Università di Trento  
Via Sommarive 14  
38123 - Povo (TN)

---



---

## Nota per la lettura

---

Queste note raccolgono gli argomenti (alcuni variabili negli anni) svolti nel corso di Geometria V unità didattica del Corso di Laurea in Matematica all'Università di Trento dall'a.a. 2002-2003 all'a.a. 2008-2009, riorganizzati ed ampliati per il corso di Geometria Differenziale dell'a.a. 2010-2011 e seguenti.

Per alcune parti di queste note, nonché per suggerimenti e correzioni, sono debitore a Davide Panizzolo, Elisa Tasso, Roberto Pignatelli, Riccardo Ghiloni e Valentina Paterno. Sono anche grato agli studenti che mi hanno via via segnalato imprecisioni e proposto modifiche e a quelli che continueranno a farlo.

Gianluca Occhetta

---

# Indice

---

<b>Nota per la lettura</b>	<b>iii</b>
<b>Indice</b>	<b>iv</b>
<b>1 Curve differenziabili</b>	<b>1</b>
1.1 Curve regolari - lunghezza d'arco	1
1.2 Il triedro di Frenet	4
1.3 Curve con parametro arbitrario	7
1.4 Curvatura e torsione	7
1.5 Forma canonica locale - Enti osculatori	12
1.6 Curve piane	16
1.7 Evolute ed involute	17
1.8 Alcune importanti curve piane	19
1.9 Proprietà globali di curve piane	25
<b>2 Superfici differenziabili</b>	<b>29</b>
2.1 Superfici elementari in $\mathbb{R}^3$	29
2.2 Prima forma fondamentale	36
2.3 Applicazioni tra superfici	40
2.4 Seconda forma fondamentale	45
2.5 Curvatura normale - Curvature principali	49
2.6 Curvatura di Gauss	52
2.7 Altre applicazioni della II forma fondamentale	59
2.8 Theorema Egregium	62
2.9 Curvatura media - Superfici minimali	65
2.10 Geodetiche	67
2.11 Teorema di Gauss-Bonnet	73
<b>3 Varietà differenziabili</b>	<b>79</b>
3.1 Varietà topologiche	79
3.2 Varietà differenziabili	82

---

3.3	Funzioni e applicazioni differenziabili . . . . .	84
3.4	Spazio tangente . . . . .	86
3.5	Differenziale e applicazioni . . . . .	90
3.6	Spazio cotangente . . . . .	96
3.7	Fibrato tangente e cotangente . . . . .	97
3.8	Varietà Riemanniane - Cenni . . . . .	99
	<b>Indice analitico</b>	<b>103</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>105</b>



# Capitolo 1

---

## Curve differenziabili

---

### 1.1 CURVE REGOLARI - LUNGHEZZA D'ARCO

**Definizione 1.1.1.** Una *curva parametrizzata* di classe  $\mathcal{C}^k$  in  $\mathbb{R}^3$  è un'applicazione differenziabile  $\mathbf{P} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  di classe  $\mathcal{C}^k$ , con  $k \geq 1$ , dove  $J$  è un intervallo di  $\mathbb{R}$ ; se  $J$  non è aperto si assume che  $\mathbf{P}$  sia definita e di classe  $\mathcal{C}^k$  su un intervallo aperto contenente  $J$ . Se  $k = \infty$  la curva si dice *liscia*. L'immagine  $\mathbf{P}(J) \subset \mathbb{R}^3$  si dice *supporto* o *sostegno* della curva. La curva si dice *semplice* se  $\mathbf{P}$  è un'applicazione iniettiva.

**Definizione 1.1.2.** Un *diffeomorfismo di classe  $\mathcal{C}^k$*  tra due intervalli  $J', J$  di  $\mathbb{R}$  è un'applicazione biunivoca  $\theta : J' \rightarrow J$  di classe  $\mathcal{C}^k$  con inversa di classe  $\mathcal{C}^k$ . Se  $k = \infty$  il diffeomorfismo si dice *liscio*. Poiché  $\theta$  è invertibile, si ha che  $\theta'$  non è mai nulla su  $J'$ .

**Definizione 1.1.3.** Due curve parametrizzate di classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $\mathbf{P} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{Q} : J' \rightarrow \mathbb{R}^3$  si dicono *equivalenti* se esiste un diffeomorfismo  $\theta : J' \rightarrow J$  di classe  $\mathcal{C}^k$  tale che  $\mathbf{Q} = \mathbf{P} \circ \theta$ ; diremo che  $\mathbf{Q}$  è una *riparametrizzazione* di  $\mathbf{P}$ .

Diremo che la riparametrizzazione  $\mathbf{Q}$  ha la stessa orientazione di  $\mathbf{P}$  se  $\theta'(t) > 0$  per ogni  $t \in J'$ , che ha l'orientazione opposta se  $\theta'(t) < 0$  per ogni  $t \in J'$ .

**Definizione 1.1.4.** Una *curva differenziabile* di classe  $\mathcal{C}^k$  in  $\mathbb{R}^3$  è una classe di equivalenza di curve parametrizzate di classe  $\mathcal{C}^k$ .

Nel seguito, dicendo "sia  $\mathbf{P} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva differenziabile" intenderemo che  $\mathbf{P}$  è una parametrizzazione della curva considerata.

**Definizione 1.1.5.** Una *curva regolare* in  $\mathbb{R}^3$  è una curva differenziabile di classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $\mathbf{P} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $\dot{\mathbf{P}}(t) \neq \mathbf{0}$  per ogni  $t \in J$ .

**Osservazione 1.1.6.** E' immediato verificare che la condizione di regolarità non dipende dalla parametrizzazione; infatti, se  $\mathbf{Q}$  è una riparametrizzazione di  $\mathbf{P}$  data da un diffeomorfismo  $\theta$ , si ha che

$$\dot{\mathbf{Q}}(\tau) = \dot{\mathbf{P}}(\theta(\tau))\theta'(\tau). \quad (1.1.7)$$

**Definizione 1.1.8.** Sia  $\mathbf{P} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regolare. Per ogni  $t \in J$  si possono associare al punto  $\mathbf{P}(t)$  della traccia di  $\mathbf{P}$  il vettore tangente o vettore velocità  $\dot{\mathbf{P}}(t) \neq \mathbf{0}$  e la retta tangente, individuata dal punto  $\mathbf{P}(t)$  e dal vettore  $\dot{\mathbf{P}}(t)$ . Dalla (1.1.7) è evidente che, mentre modulo e verso del vettore tangente dipendono dalla parametrizzazione, mentre la direzione ne è indipendente. Pertanto la retta tangente non dipende dalla parametrizzazione della curva.

Sia  $\mathbf{P} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regolare, sia  $[a, b] \subset J$ ; e sia  $S$  una suddivisione di  $J$  del tipo  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ ; denoteremo con  $\|S\| := \max_{i=1, \dots, n} |t_i - t_{i-1}|$ . Consideriamo il numero reale

$$l(\mathbf{P}, S) = \sum_{i=1}^n \|\mathbf{P}(t_i) - \mathbf{P}(t_{i-1})\|,$$

che è la lunghezza della poligonale inscritta in  $\mathbf{P}([a, b])$  con i vertici in  $\mathbf{P}(t_i)$ .

**Definizione 1.1.9.** La lunghezza della curva  $\mathbf{P}$  tra  $\mathbf{P}(a)$  e  $\mathbf{P}(b)$  è definita come

$$l(\mathbf{P}) = \sup_S l(\mathbf{P}, S),$$

al variare delle suddivisioni  $S$  di  $J$  del tipo  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ .

**Teorema 1.1.10.** Sia  $\mathbf{P} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regolare e  $[a, b] \subset J$ ; allora

$$l(\mathbf{P}) = \int_a^b \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| dt.$$

**Dim.** Sia  $S$  una suddivisione del tipo  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ ; allora, per il teorema fondamentale del calcolo,

$$\mathbf{P}(t_i) - \mathbf{P}(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\mathbf{P}}(t) dt,$$

e quindi

$$\|\mathbf{P}(t_i) - \mathbf{P}(t_{i-1})\| = \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\mathbf{P}}(t) dt \right\| \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| dt,$$

da cui otteniamo  $l(\mathbf{P}) \leq \int_a^b \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| dt$ .

Poiché l'applicazione  $\dot{\mathbf{P}}$  è continua sul compatto  $[a, b]$ , è anche uniformemente continua, quindi, dato  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che  $\|\dot{\mathbf{P}}(t) - \dot{\mathbf{P}}(\bar{t})\| < \varepsilon$  se  $|t - \bar{t}| < \delta$ . Sia  $S$  una suddivisione di  $[a, b]$  tale che  $\|S\| < \delta$ ; sia  $t \in [t_{i-1}, t_i]$ ; per la disuguaglianza triangolare

$$\|\dot{\mathbf{P}}(t)\| \leq \|\dot{\mathbf{P}}(t) - \dot{\mathbf{P}}(t_i)\| + \|\dot{\mathbf{P}}(t_i)\| < \varepsilon + \|\dot{\mathbf{P}}(t_i)\|$$



e quindi

$$\begin{aligned}
 \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| dt &< \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\mathbf{P}}(t_i)\| dt + \varepsilon(t_i - t_{i-1}) \\
 &= \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\mathbf{P}}(t_i) dt \right\| + \varepsilon(t_i - t_{i-1}) \\
 &\leq \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\mathbf{P}}(t) dt \right\| + \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\dot{\mathbf{P}}(t_i) - \dot{\mathbf{P}}(t)] dt \right\| + \varepsilon(t_i - t_{i-1}) \\
 &\leq \|\mathbf{P}(t_i) - \mathbf{P}(t_{i-1})\| + 2\varepsilon(t_i - t_{i-1}).
 \end{aligned}$$

Sommando su tutti gli intervalli di  $S$  segue che

$$\int_a^b \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| dt < l(\mathbf{P}, S) + 2\varepsilon(b - a) \leq l(\mathbf{P}) + 2\varepsilon(b - a).$$

Per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$  si ha che  $\int_a^b \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| dt \leq l(\mathbf{P})$ , e il teorema è provato.  $\square$

**Corollario 1.1.11.** *La lunghezza di una curva regolare non dipende dalla parametrizzazione scelta.*

**Dim.** Se  $\mathbf{Q} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una riparametrizzazione di  $\mathbf{P} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  via un diffeomorfismo  $\theta : [c, d] \rightarrow [a, b]$ , allora, se  $\theta' > 0$ ,

$$\int_a^b \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| dt = \int_c^d \|\dot{\mathbf{P}}(\theta(\tau))\| \theta'(\tau) d\tau = \int_c^d \|\dot{\mathbf{Q}}(\tau)\| d\tau$$

mentre, se  $\theta' < 0$ ,

$$\int_a^b \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| dt = \int_d^c \|\dot{\mathbf{P}}(\theta(\tau))\| (-|\theta'(\tau)|) d\tau = \int_c^d \|\dot{\mathbf{Q}}(\tau)\| d\tau;$$

in entrambi i casi si è utilizzata la regola per l'integrazione con sostituzione.  $\square$

Possiamo utilizzare il Teorema (1.1.10) per trovare una parametrizzazione intrinseca della curva: chiamiamo parametro *lunghezza d'arco* di una curva regolare  $\mathbf{P}(t)$ , fissato un punto  $\mathbf{P}(t_0)$ , il parametro  $s$  così definito:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\mathbf{P}}(h)\| dh.$$

Osserviamo che  $ds/dt = \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| > 0$ , e quindi la funzione  $s(t)$  è invertibile (e, per come è definita, di classe  $C^k$ ). Osserviamo anche che il parametro arco è essenzialmente unico, in quanto è definito a meno della scelta di un punto sulla curva e dell'orientazione della curva stessa.

**Proposizione 1.1.12.** *Se  $\mathbf{P} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una curva regolare parametrizzata con la lunghezza d'arco, allora ha vettore tangente  $\mathbf{P}'(s)$  di norma unitaria.*

**Dim.** Per la regola di derivazione di funzioni composte

$$\mathbf{P}'(s) = \frac{d\mathbf{P}(t(s))}{ds} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{\mathbf{P}}(t)}{\|\dot{\mathbf{P}}(t)\|}.$$

Prendendo la norma di ambo i membri si ha la tesi.  $\square$

**Osservazione 1.1.13.** Ove non altrimenti specificato, la derivata rispetto ad un parametro qualsiasi verrà indicata con il punto ( $\dot{\mathbf{P}}$ ), mentre quella rispetto al parametro arco con l'apice ( $\mathbf{P}'$ ).

**Esempio 1.1.14. Elica circolare** Siano  $a, b$  reali positivi, e consideriamo la curva

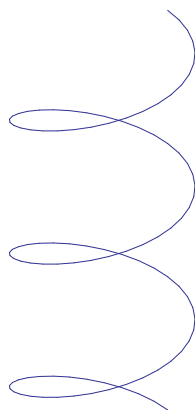
$$\mathbf{P}(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt) \quad t \in \mathbb{R}$$

Il suo vettore tangente è dato da  $\dot{\mathbf{P}}(t) = (-a \sin(t), a \cos(t), b)$  e la norma di tale vettore è  $\|\dot{\mathbf{P}}(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Pertanto il parametro arco (scegliendo  $t_0 = 0$ ) è dato da

$$s(t) = \int_0^t (\sqrt{a^2 + b^2}) dh = (\sqrt{a^2 + b^2})t.$$

Posto  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$  possiamo scrivere la parametrizzazione naturale dell'elica in questo modo:

$$\mathbf{P}(s) = (a \cos(s/c), a \sin(s/c), b s/c).$$



## 1.2 IL TRIEDRO DI FRENET

**Definizione 1.2.1.** Una curva *fortemente regolare* o *biregolare* è una curva regolare  $\mathbf{P} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  di classe almeno  $\mathcal{C}^2$  tale che, per ogni  $t \in J$ , si ha  $\dot{\mathbf{P}}(t) \wedge \ddot{\mathbf{P}}(t) \neq \mathbf{0}$ .

**Osservazione 1.2.2.** Se  $\mathbf{Q} : J' \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una riparametrizzazione di  $\mathbf{P}$  via un diffeomorfismo  $\theta : J' \rightarrow J$ , allora  $\dot{\mathbf{Q}} = \theta' \dot{\mathbf{P}}$  e  $\ddot{\mathbf{Q}} = \theta'' \dot{\mathbf{P}} + (\theta')^2 \ddot{\mathbf{P}}$ , da cui segue che la condizione di biregolarità non dipende dalla parametrizzazione.

Sia  $\mathbf{P} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva fortemente regolare parametrizzata con il parametro lunghezza d'arco e sia  $\mathbf{t}(s) = \mathbf{P}'(s)$  il versore tangente alla curva.

Consideriamo il vettore  $\mathbf{k}(s) = \mathbf{P}''(s) = \mathbf{t}'(s)$ , detto *vettore curvatura* della curva; si ha che  $\mathbf{t} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{P}' \cdot \mathbf{P}'' = 0$ ; infatti poiché  $\mathbf{t}$  è un versore, derivando la relazione  $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} \equiv 1$  si ha che  $2\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}' = 0$ .

Posto  $v = \|\dot{\mathbf{P}}(t)\|$ , abbiamo che

$$\ddot{\mathbf{P}}(t) = \frac{d}{dt}(v\mathbf{P}') = \frac{dv}{dt}\mathbf{P}' + v\frac{d}{dt}\mathbf{P}' = \frac{dv}{dt}\mathbf{P}' + v^2\mathbf{P}'', \quad (1.2.3)$$

e quindi, poichè  $\mathbf{P}' \cdot \mathbf{P}'' = 0$  e  $\mathbf{P}' \neq \mathbf{0}$  la condizione di biregolarità è equivalente a  $\|\mathbf{P}''(s)\| \neq 0$  per ogni  $s$ .

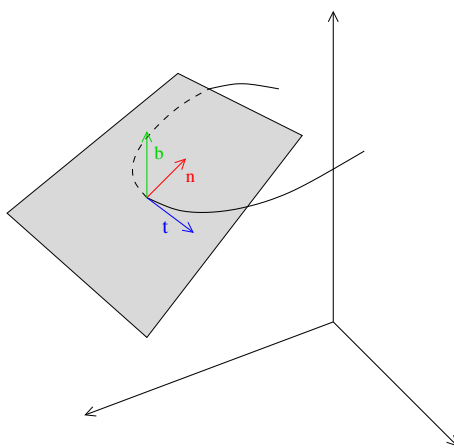
Possiamo quindi definire la (*prima*) *curvatura* di  $\mathbf{P}$  come  $\kappa(s) = \|\mathbf{P}''(s)\|$ , e il *versore normale* come

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{P}''(s)}{\|\mathbf{P}''(s)\|}.$$

Dalla definizione è chiaro che, se  $\mathbf{P}$  è di classe  $\mathcal{C}^k$ , allora  $\kappa$  e  $\mathbf{n}$  sono di classe  $\mathcal{C}^{k-2}$ .

Il piano individuato dal versore tangente e dal versore normale è detto *piano osculatore*; il versore normale a questo piano, che forma con  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{n}$  una base ortonormale positivamente orientata, cioè  $\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$  è detto *versore binormale*.

il piano individuato da  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{b}$  è detto *piano normale*, quello individuato da  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{b}$  è detto *piano rettificante*. La terna  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$  è detta *terna di Frenet*.



**Definizione 1.2.4.** Una *curva di Frenet* in  $\mathbb{R}^3$  è una curva fortemente regolare  $\mathbf{P} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  di classe almeno  $\mathcal{C}^3$ .

Sia  $\mathbf{P} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva di Frenet. Il modulo della derivata del versore binormale misura la velocità di cambiamento dei piani osculatori, e quindi quanto rapidamente la curva si allontana dal piano osculatore.

Calcoliamo perciò il vettore  $\mathbf{b}'(s)$ ; dalla definizione di  $\mathbf{b}$  abbiamo che

$$\mathbf{b}'(s) = \mathbf{t}'(s) \wedge \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}'(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}'(s).$$

Quindi, oltre ad essere ortogonale a  $\mathbf{b}(s)$  perché quest'ultimo è un versore,  $\mathbf{b}'(s)$  è anche ortogonale a  $\mathbf{t}(s)$ ; può quindi essere scritto in questo modo:

$$\mathbf{b}'(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s).$$

La funzione  $\tau(s)$  è detta *torsione* o *seconda curvatura* della curva. Poiché  $\mathbf{b}$  è di classe  $\mathcal{C}^{k-2}$  e  $\tau = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{n}$  la torsione è una funzione di classe  $\mathcal{C}^{k-3}$ .

**Proposizione 1.2.5.** *Sia  $\mathbf{P}$  una curva di Frenet, sia  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$  la sua terna di Frenet, e siano  $\kappa$  e  $\tau$  la curvatura e la torsione. Valgono le seguenti relazioni, dette formule di Frenet:*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}.$$

**Dim.** Dobbiamo provare l'uguaglianza  $\mathbf{n}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s)$ . Calcoliamo la derivata di  $\mathbf{n}(s)$ , ricordando che  $\mathbf{n}(s) = \mathbf{b}(s) \wedge \mathbf{t}(s)$ :

$$\mathbf{n}'(s) = \mathbf{b}'(s) \wedge \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s) \wedge \mathbf{t}'(s) = \tau(s)\mathbf{b}(s) - \kappa(s)\mathbf{t}(s).$$

Abbiamo così provato le relazioni sopra scritte. La matrice antisimmetrica che le esprime è detta *matrice di Frenet*.  $\square$

**Esempio 1.2.6.** Calcoliamo la matrice di Frenet dell'elica circolare

$$\mathbf{P}(s) = (a \cos(s/c), a \sin(s/c), b s/c)$$

$$\mathbf{t}(s) = (-a/c \sin(s/c), a/c \cos(s/c), b/c)$$

Calcoliamo la derivata  $\mathbf{t}'(s) = -\frac{a}{c^2}(\cos(s/c), \sin(s/c), 0)$ ; la norma di questo vettore è  $\sqrt{\frac{a^2}{c^4}} = \frac{a}{a^2 + b^2}$ , quindi  $\kappa(s) = \frac{a}{a^2 + b^2}$  e

$$\mathbf{n}(s) = (-\cos(s/c), -\sin(s/c), 0)$$

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s) = (b/c \sin(s/c), -b/c \cos(s/c), a/c)$$

Calcoliamo la derivata  $\mathbf{b}'(s) = \frac{b}{c^2}(\cos(s/c), \sin(s/c), 0) = -\frac{b}{c^2}\mathbf{n}(s)$ , e quindi troviamo la torsione  $\tau(s) = \frac{b}{a^2 + b^2}$ . La matrice di Frenet dell'elica circolare è pertanto

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{a}{a^2 + b^2} & 0 \\ -\frac{a}{a^2 + b^2} & 0 & \frac{b}{a^2 + b^2} \\ 0 & -\frac{b}{a^2 + b^2} & 0 \end{bmatrix}$$

Prendendo il caso particolare  $b = 0$ , che corrisponde ad una circonferenza di raggio  $a$ , troviamo  $\kappa(s) = 1/a$  e  $\tau(s) = 0$ .

## 1.3 CURVE CON PARAMETRO ARBITRARIO

Vediamo ora le formule per trovare terna di Frenet, curvatura e torsione per curve parametrizzate con un parametro qualsiasi:

**Proposizione 1.3.1.** *Sia  $\mathbf{P} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva di Frenet; allora*

$$\mathbf{t} = \frac{\dot{\mathbf{P}}}{\|\dot{\mathbf{P}}\|}, \quad \mathbf{b} = \frac{\dot{\mathbf{P}} \wedge \ddot{\mathbf{P}}}{\|\dot{\mathbf{P}} \wedge \ddot{\mathbf{P}}\|}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{t}$$

$$\kappa = \frac{\|\dot{\mathbf{P}} \wedge \ddot{\mathbf{P}}\|}{\|\dot{\mathbf{P}}\|^3}, \quad \tau = \frac{(\dot{\mathbf{P}} \wedge \ddot{\mathbf{P}}) \cdot \ddot{\mathbf{P}}}{\|\dot{\mathbf{P}} \wedge \ddot{\mathbf{P}}\|^2}$$

**Dim.** Innanzitutto, poiché  $\mathbf{t} = \mathbf{P}'$ , dalla derivazione di funzione composta otteniamo

$$\dot{\mathbf{P}}(s(t)) = \mathbf{P}'(s(t)) \frac{ds}{dt};$$

ricordiamo che  $ds = \|\dot{\mathbf{P}}(t)\|dt$ , e quindi otteniamo subito l'espressione del vettore tangente; ponendo  $v = \|\dot{\mathbf{P}}(t)\|$ , dalla (1.2.3), utilizzando le formule di Frenet, abbiamo che

$$\ddot{\mathbf{P}}(t) = \frac{dv}{dt} \mathbf{t} + v^2 \kappa \mathbf{n}$$

e quindi troviamo

$$\dot{\mathbf{P}} \wedge \ddot{\mathbf{P}} = \kappa v^3 \mathbf{b}, \quad (1.3.2)$$

e da questa espressione ricaviamo la formula per la curvatura e per  $\mathbf{b}$ .

Ci resta da calcolare l'espressione della torsione; dobbiamo calcolare innanzitutto  $(\dot{\mathbf{P}} \wedge \ddot{\mathbf{P}}) \cdot \ddot{\mathbf{P}}$ ; avendo già notato che  $\dot{\mathbf{P}} \wedge \ddot{\mathbf{P}} = \kappa v^3 \mathbf{b}$  è sufficiente trovare la componente di  $\ddot{\mathbf{P}}$  lungo  $\mathbf{b}$ ; scriviamo

$$\ddot{\mathbf{P}}(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{dv}{dt} \mathbf{P}' + v^2 \mathbf{P}'' \right) = \frac{d^2 v}{dt^2} \mathbf{P}' + v \frac{dv}{dt} \mathbf{P}'' + 2v \frac{dv}{dt} \mathbf{P}'' + v^3 \mathbf{P}'''$$

e notiamo che l'unico addendo che ha una componente non nulla lungo  $\mathbf{b}$  è l'ultimo. Da  $\mathbf{P}'' = \kappa \mathbf{n}$  ricaviamo

$$\mathbf{P}''' = \kappa' \mathbf{n} - \kappa^2 \mathbf{t} + \tau \kappa \mathbf{b}$$

e quindi  $(\dot{\mathbf{P}} \wedge \ddot{\mathbf{P}}) \cdot \ddot{\mathbf{P}} = \tau \kappa^2 v^6$ , da cui si conclude.  $\square$

## 1.4 CURVATURA E TORSIONE

Abbiamo visto come sia possibile associare ad una curva di Frenet in  $\mathbb{R}^3$  due funzioni: la curvatura  $\kappa(s) > 0$  e la torsione  $\tau(s)$ ; vedremo ora come tali funzioni individuino la curva a meno di isometrie dello spazio euclideo.

**Teorema 1.4.1.** Siano  $\mathbf{P} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $\mathbf{Q} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  due curve di Frenet con parametro arco tali che  $\kappa_P(s) = \kappa_Q(s)$  e  $\tau_P(s) = \tau_Q(s)$  per ogni  $s \in J$ . Allora esiste un'isometria  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $\varphi \circ \mathbf{P} = \mathbf{Q}$ .

**Dim.** Possiamo supporre che  $0 \in J$ ; siano  $\{\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0\}$  e  $\{\bar{\mathbf{t}}_0, \bar{\mathbf{n}}_0, \bar{\mathbf{b}}_0\}$  le terne di Frenet delle due curve per  $s = 0$ . Esiste un'isometria  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , composizione di una traslazione e di una rotazione, che manda  $\mathbf{P}(0)$  in  $\mathbf{Q}(0)$  e  $\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0$  rispettivamente in  $\bar{\mathbf{t}}_0, \bar{\mathbf{n}}_0, \bar{\mathbf{b}}_0$ .

Assumiamo pertanto che  $\mathbf{P}(0) = \mathbf{Q}(0)$  e che le terne di Frenet delle due curve coincidano per  $s = 0$  e mostriamo che  $\mathbf{P}(s) = \mathbf{Q}(s)$  per ogni  $s \in J$ . A tal fine consideriamo la seguente funzione:

$$A(s) = \|\mathbf{t} - \bar{\mathbf{t}}\|^2 + \|\mathbf{n} - \bar{\mathbf{n}}\|^2 + \|\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}\|^2.$$

Vogliamo mostrare che tale funzione è costante; calcoliamo perciò la derivata rispetto ad  $s$

$$A'(s) = 2(\mathbf{t} - \bar{\mathbf{t}}) \cdot (\mathbf{t}' - \bar{\mathbf{t}}') + 2(\mathbf{n} - \bar{\mathbf{n}}) \cdot (\mathbf{n}' - \bar{\mathbf{n}}') + 2(\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}) \cdot (\mathbf{b}' - \bar{\mathbf{b}}').$$

Utilizzando le formule di Frenet per calcolare le derivate dei versori, e ponendo  $\kappa(s) := \kappa_P(s) = \kappa_Q(s)$ ,  $\tau(s) := \tau_P(s) = \tau_Q(s)$ , otteniamo  $A'(s) = 0$  (verificarlo!).

Poiché  $A(0) = 0$ , allora  $A(s) \equiv 0$ , e quindi le terne di Frenet coincidono su tutto l'intervallo di definizione; in particolare  $\mathbf{t}(s) = \bar{\mathbf{t}}(s)$ . Ricordando che  $\mathbf{t}(s) = \mathbf{P}'(s)$  e che  $\bar{\mathbf{t}}(s) = \mathbf{Q}'(s)$  e integrando otteniamo  $\mathbf{P}(s) = \mathbf{Q}(s) + \mathbf{c}$ . Essendo  $\mathbf{P}(0) = \mathbf{Q}(0)$  si ha  $\mathbf{P}(s) \equiv \mathbf{Q}(s)$ .  $\square$

Si può provare che non solo una curva di Frenet è unicamente individuata dalla sua curvatura e dalla sua torsione (a meno di isometrie), ma che, comunque assegnate due funzioni sufficientemente differenziabili  $\kappa(s) > 0$  e  $\tau(s)$ , queste sono curvatura e torsione di una curva. Utilizzeremo il seguente risultato dalla teoria delle equazioni differenziali (e otterremo anche un'altra dimostrazione del Teorema (1.4.1)):

**Teorema 1.4.2.** Dati un intervallo  $J \subset \mathbb{R}$ , un punto  $s_0 \in J$ , un vettore  $\boldsymbol{\xi}_0 \in \mathbb{R}^n$  e due applicazioni  $A : J \rightarrow \text{Mat}(n, \mathbb{R})$ ,  $\mathbf{f} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  di classe  $\mathcal{C}^k$ , con  $k \geq 1$ , allora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{\xi}'(s) = A(s)\boldsymbol{\xi}(s) + \mathbf{f}(s) \\ \boldsymbol{\xi}(s_0) = \boldsymbol{\xi}_0 \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione  $\boldsymbol{\xi} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  di classe  $\mathcal{C}^{k+1}$ .

**Teorema 1.4.3.** Sia  $k$  un intero  $\geq 4$ . Date due funzioni differenziabili  $\kappa(s) > 0$  di classe  $\mathcal{C}^{k-2}$ ,  $\tau(s) : J \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $\mathcal{C}^{k-3}$ , un punto  $s_0 \in J$ , un punto  $\mathbf{P}_0$  di  $\mathbb{R}^3$ , e una terna ortonormale positivamente orientata  $\{\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0\}$  esiste un'unica curva di Frenet  $\mathbf{P} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ , di classe  $\mathcal{C}^k$ , le cui funzioni curvatura e torsione sono  $\kappa(s)$  e  $\tau(s)$ , tale che  $\mathbf{P}(s_0) = \mathbf{P}_0$  e che la terna di Frenet di  $\mathbf{P}$  in  $s_0$  sia  $\{\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0\}$ .

**Dim.** Osserviamo che le equazioni di Frenet

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix},$$

una volta posto  $\mathbf{t} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ,  $\mathbf{n} = (\xi_4, \xi_5, \xi_6)$  e  $\mathbf{b} = (\xi_7, \xi_8, \xi_9)$ , possono essere considerate come un sistema di equazioni differenziali del tipo  $\xi' = A\xi$ , dove  $A \in \text{Mat}(9, \mathbb{R})$  è:

$$A = \left[ \begin{array}{c|c|c} 0 & \kappa I & 0 \\ \hline -\kappa I & 0 & \tau I \\ \hline 0 & -\tau I & 0 \end{array} \right]$$

Pertanto, per il Teorema (1.4.2), esiste una famiglia di terne  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$  tale che  $\{\mathbf{t}(s_0), \mathbf{n}(s_0), \mathbf{b}(s_0)\} = \{\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0\}$ . Dal teorema citato segue anche che  $\mathbf{t}$  è di classe  $\mathcal{C}^{k-1}$  e  $\mathbf{n}, \mathbf{b}$  sono di classe  $\mathcal{C}^{k-2}$ .

Mostriamo innanzitutto che, per ogni  $s \in J$  la terna  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$  è ortonormale. A tal fine, consideriamo le sei funzioni

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{t} \cdot \mathbf{b}, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}, \quad \mathbf{t} \cdot \mathbf{t}, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}.$$

Derivandole, ed usando le formule di Frenet, vediamo che esse debbono soddisfare il seguente sistema:

$$\begin{cases} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{t})' = 2\kappa(\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}) \\ (\mathbf{t} \cdot \mathbf{n})' = \kappa(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) + \tau(\mathbf{t} \cdot \mathbf{b}) - \kappa(\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}) \\ (\mathbf{t} \cdot \mathbf{b})' = \kappa(\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}) - \tau(\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}) \\ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})' = -2\kappa(\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}) + 2\tau(\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}) \\ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{b})' = -\kappa(\mathbf{t} \cdot \mathbf{b}) + \tau(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - \tau(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) \\ (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})' = -2\tau(\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}) \end{cases}.$$

E' immediato verificare che  $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} \equiv \mathbf{t} \cdot \mathbf{b} \equiv \mathbf{n} \cdot \mathbf{b} \equiv 0$  e  $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} \equiv \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \equiv \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \equiv 1$  è una soluzione del problema di Cauchy definito dal precedente sistema con condizioni iniziali  $0, 0, 0, 1, 1, 1$ .

Per l'unicità della soluzione, la famiglia di terne  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$  è ortonormale per ogni  $s \in J$ . Inoltre, poiché la funzione  $(\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}) \cdot \mathbf{b}$  è continua e vale 1 per  $s = s_0$ , le terne  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$  sono positivamente orientate per ogni  $s \in J$ .

Definiamo ora la curva  $\mathbf{P} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  ponendo

$$\mathbf{P}(s) = \int_{s_0}^s \mathbf{t}(h)dh + \mathbf{P}_0;$$

vogliamo mostrare che tale curva è la curva cercata. La curva è parametrizzata con parametro arco ed è di classe  $\mathcal{C}^k$ , in quanto  $\|\mathbf{t}(s)\| \equiv 1$  e  $\mathbf{t}$  è di classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ .

Dalle formule di Frenet abbiamo  $\mathbf{P}'' = \kappa_{\mathbf{P}}\mathbf{n}_{\mathbf{P}}$ ; d'altro canto  $\mathbf{P}'' = \mathbf{t}' = \kappa\mathbf{n}$  e quindi

deduciamo che  $\kappa$  è la curvatura e  $\mathbf{n}$  è il versore normale di  $\mathbf{P}$ , che risulta quindi fortemente regolare.

Segue che  $\mathbf{b}$  è il versore binormale di  $\mathbf{P}$ , e, utilizzando nuovamente le formule di Frenet, troviamo che  $\tau$  è la torsione di  $\mathbf{P}$ . L'unicità segue dal Teorema (1.4.2).  $\square$

Vediamo ora che curve corrispondono a valori speciali di curvatura e torsione.

**Proposizione 1.4.4.**

- 1) Una curva regolare  $\mathbf{P} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  ha sostegno contenuto in una retta se e solo se  $\mathbf{P}'' = 0$ .
- 2) Una curva di Frenet  $\mathbf{P} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  è piana se e solo se  $\tau(s) \equiv 0$ .

**Dim.** Assumiamo che  $0 \in J$ . Dimostriamo la 1). Da  $\mathbf{P}''(s) \equiv 0$  segue che  $\mathbf{P}'(s) = \mathbf{t}(s)$  è costante:  $\mathbf{t}(s) = \mathbf{t}_0 = \mathbf{t}(0)$ . Pertanto  $\mathbf{P}(s) = s\mathbf{t}_0 + \mathbf{P}(0)$ .

Se il supporto di  $\mathbf{P}$  è contenuto in una retta allora  $\mathbf{P}(s) - \mathbf{P}(0) = st(0)$  dalla definizione di parametro arco, e quindi  $\mathbf{P}'' = 0$ .

Dimostriamo ora la 2). Se la curva è piana, allora  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{n}$  individuano lo stesso piano per ogni valore di  $s$ ; in particolare  $\mathbf{b}$  è costante e  $\tau$  è nulla dalle formule di Frenet. Viceversa, se  $\tau \equiv 0$ , allora, dalle formule di Frenet,  $\mathbf{b}$  è costante; consideriamo la funzione

$$f(s) = (\mathbf{P}(s) - \mathbf{P}(0)) \cdot \mathbf{b}$$

e deriviamola

$$f'(s) = \mathbf{t} \cdot \mathbf{b} = 0.$$

Segue che  $f(s) \equiv f(0) = 0$ , cioè la curva giace nel piano ortogonale a  $\mathbf{b}$  e passante per  $\mathbf{P}(0)$ .  $\square$

**Proposizione 1.4.5.**

- 1) Una curva di Frenet  $\mathbf{P} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  con curvatura costante e torsione nulla è una circonferenza.
- 2) Una curva di Frenet  $\mathbf{P} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  con curvatura e torsione costanti è un'elica circolare.

**Dim.** In virtù della seconda parte della Proposizione (1.4.4) la prima affermazione è un caso particolare della seconda.

Per la dimostrazione utilizzeremo il Teorema (1.4.1). Sia  $\mathbf{Q} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'elica circolare  $\mathbf{Q}(s) = (a \cos(s/c), a \sin(s/c), b s/c)$ ; la curvatura e la torsione di tale curva sono date rispettivamente da

$$\kappa_{\mathbf{Q}} = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \tau_{\mathbf{Q}} = \frac{b}{a^2 + b^2};$$



siano  $\kappa_{\mathbf{P}}$  e  $\tau_{\mathbf{P}}$  la curvatura e la torsione della curva  $\mathbf{P}$ .  
Con semplici passaggi algebrici si trova che, posto

$$a = \frac{\kappa_{\mathbf{P}}}{\kappa_{\mathbf{P}}^2 + \tau_{\mathbf{P}}^2} \quad b = \frac{\tau_{\mathbf{P}}}{\kappa_{\mathbf{P}}^2 + \tau_{\mathbf{P}}^2}$$

si ha  $\kappa_{\mathbf{Q}} = \kappa_{\mathbf{P}}$  e  $\tau_{\mathbf{Q}} = \tau_{\mathbf{P}}$ , e quindi esiste un'isometria che porta  $\mathbf{P}$  in  $\mathbf{Q}$ .  $\square$

Abbiamo visto, nelle sezioni precedenti, l'elica circolare; ora considereremo una famiglia più generale di curve, dette *eliche*.

**Definizione 1.4.6.** Sia  $\mathbf{P} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva di Frenet non piana; tale curva è detta *elica* se esiste un versore  $\mathbf{u}$  tale che l'angolo tra  $\mathbf{u}$  e il versore tangente a  $\mathbf{P}$  sia costante.

**Proposizione 1.4.7.** Una curva di Frenet è un'elica se e solo se il rapporto tra la torsione e la curvatura è costante.

**Dim.** Sia  $\mathbf{P} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  un'elica, e sia  $\mathbf{u}$  un versore tale che  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}(s)$  sia costante. Derivando tale relazione otteniamo  $\kappa(s)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}(s)) = 0$ . Esiste perciò un angolo  $\theta(s)$  tale che il versore  $\mathbf{u}$  si scrive come

$$\mathbf{u} = \cos \theta(s) \mathbf{t} + \sin \theta(s) \mathbf{b}; \quad (1.4.8)$$

poiché  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}(s)$  è costante, troviamo che anche  $\theta$  è costante. Derivando la (1.4.8) e ricordando le formule di Frenet otteniamo

$$\mathbf{0} = (\kappa \cos \theta - \tau \sin \theta) \mathbf{n},$$

e quindi  $\tau/\kappa = \cot \theta$ .

Viceversa, sia  $\theta$  tale che  $\frac{\tau}{\kappa} = \cot \theta$ , e consideriamo il versore

$$\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{t} + \sin \theta \mathbf{b};$$

tale versore è costante, come si può verificare calcolando la sua derivata. Chiamamente l'angolo tra  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{t}$  è costante.  $\square$

Vogliamo ora giustificare il nome di elica dato a una curva come in (1.4.6). Sia  $\mathbf{P} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  un'elica, parametrizzata con parametro arco  $s$ , e  $\mathbf{u}$  un versore tale che  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}$  sia costante; sia  $\theta$  tale che  $\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{t} + \sin \theta \mathbf{b}$  e consideriamo una nuova curva:

$$\gamma(s) = \mathbf{P}(s) - s \cos \theta \mathbf{u}.$$

Mostriamo che tale curva è piana. Poniamo attenzione al fatto che  $s$  non è il parametro naturale per  $\gamma$ . Da

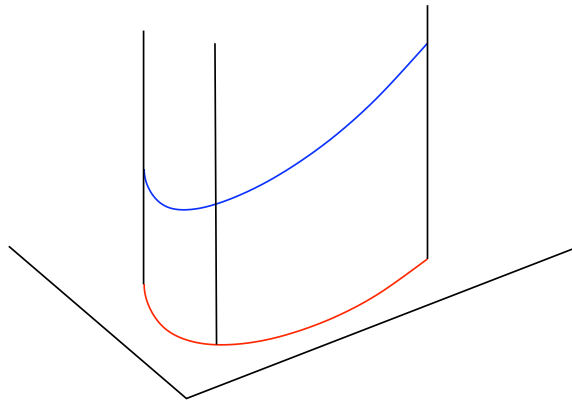
$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \mathbf{t} - \cos \theta \mathbf{u} \\ \ddot{\gamma} &= \kappa \mathbf{n} \end{aligned}$$

otteniamo che il versore binormale a  $\gamma$  è  $\mathbf{u}$ ; infatti

$$\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma} = \kappa \sin \theta \mathbf{u}.$$

Poiché il versore binormale è costante, la curva  $\gamma$  giace in un piano  $\pi$  ortogonale ad  $\mathbf{u}$ . Pertanto la curva  $\mathbf{P}$  ha supporto contenuto nel cilindro su  $\gamma$  di direttrici parallele a  $\mathbf{u}$ . Notiamo inoltre che, essendo  $\|\dot{\gamma}\| = \sin \theta$ , si ha che il parametro naturale per  $\gamma$  è  $s_\gamma = \sin \theta s$ .

Abbiamo quindi mostrato che un'elica si ottiene da una curva piana  $\gamma$  muovendosi nella direzione ortogonale al piano che la contiene di una funzione lineare del parametro arco.



### 1.5 FORMA CANONICA LOCALE - ENTI OSCULATORI

Siano  $\mathbf{P} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $\mathbf{Q} : J' \rightarrow \mathbb{R}^3$  due curve regolari di classe  $\mathcal{C}^k$  i cui sostegni abbiano un punto in comune; a meno di riparametrizzarle e di restringere gli intervalli di definizione possiamo assumere che  $J = J'$  e che il punto in comune sia  $\mathbf{P}(0) = \mathbf{Q}(0)$ . Assumiamo anche che il punto di contatto sia isolato, cioè che  $\mathbf{P}(s) - \mathbf{Q}(s) \neq \mathbf{0}$  in un intorno di 0.

**Definizione 1.5.1.** Se i versori tangenti  $\mathbf{t}_{\mathbf{P}}(0)$  e  $\mathbf{t}_{\mathbf{Q}}(0)$  non sono paralleli diremo che il contatto tra le due curve è semplice, o di ordine uno. Se invece i versori tangenti sono paralleli, a meno di riorientare una delle due curve possiamo assumere che i versori tangenti coincidano.

In questo caso diremo che le due curve hanno *ordine di contatto*  $n$  in  $\mathbf{P}(0)$  se  $\mathbf{P}(s) - \mathbf{Q}(s) = o(s^{n-1})$ , ma  $\mathbf{P}(s) - \mathbf{Q}(s) \neq o(s^n)$  per  $s \rightarrow 0$ .

**Proposizione 1.5.2.** Le curve  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$  hanno un contatto di ordine  $n$  in  $\mathbf{P}(0) = \mathbf{Q}(0)$  se e solo se  $\mathbf{P}'(0) = \mathbf{Q}'(0), \dots, \mathbf{P}^{(n-1)}(0) = \mathbf{Q}^{(n-1)}(0), \mathbf{P}^{(n)}(0) \neq \mathbf{Q}^{(n)}(0)$ .

**Dim.** Scrivendo le serie di Taylor di  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$  in un intorno di zero troviamo che

$$\mathbf{P}(s) - \mathbf{Q}(s) = (\mathbf{P}^{(n)}(0) - \mathbf{Q}^{(n)}(0)) \frac{s^n}{n!} + o(s^n),$$

ove  $n$  è tale che  $\mathbf{P}^{(k)}(0) = \mathbf{Q}^{(k)}(0)$  per  $k \leq n - 1$  e  $\mathbf{P}^{(n)}(0) \neq \mathbf{Q}^{(n)}(0)$ . □

**Corollario 1.5.3.** Due curve di Frenet  $\mathbf{P} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $\mathbf{Q} : J' \rightarrow \mathbb{R}^3$  hanno un contatto di ordine almeno tre in un punto comune se e solo se in tale punto hanno uguali versori tangente e normale e ugual curvatura.

Dal corollario segue che la circonferenza che ha ordine di contatto maggiore con una curva  $\mathbf{P} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  nel punto  $\mathbf{P}(s_0)$  è la circonferenza giacente sul piano osculatore in  $\mathbf{P}(s_0)$  di centro  $\mathbf{P}(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)} \mathbf{n}(s_0)$  e raggio  $\frac{1}{\kappa(s_0)}$ . Tale circonferenza è detta *circonferenza osculatrice*.

Siano  $\mathbf{P} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regolare di classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}(0)$  un suo punto e  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $\mathcal{C}^k$ , ove  $\Omega$  è un intorno aperto di  $\mathbf{P}_0$  in  $\mathbb{R}^3$ ; sia

$$Z = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid F(\mathbf{x}) = 0\}$$

e assumiamo che la funzione  $f(s) = F \circ \mathbf{P}(s)$  abbia uno zero isolato in  $s = 0$ . Diremo che  $\mathbf{P}$  e  $Z$  hanno ordine di contatto  $n$  in  $\mathbf{P}_0$  se  $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$  e  $f^{(n)}(0) \neq 0$ .

Vogliamo ora capire quali siano il piano e la sfera che hanno l'ordine di contatto più alto possibile con una curva di Frenet in un suo punto. Utilizzeremo a tale scopo la *forma canonica locale*.

Vediamo cioè come si scrivono le equazioni di una curva fortemente regolare nel riferimento dato dal triedro di Frenet: scegliamo un punto  $\mathbf{P}(s_0)$  e prendiamolo come origine, prendendo come riferimento ortonormale  $\mathbf{t}_0 = \mathbf{t}(s_0)$ ,  $\mathbf{n}_0 = \mathbf{n}(s_0)$ ,  $\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}(s_0)$ ; supponiamo che  $s_0 = 0$  e scriviamo  $\mathbf{P}(s)$  in serie di Taylor in un intorno del punto

$$\mathbf{P}(s) = \mathbf{P}'(0)s + \frac{\mathbf{P}''(0)}{2}s^2 + \frac{\mathbf{P}'''(0)}{6}s^3 + o(s^3)$$

Sappiamo che  $\mathbf{P}' = \mathbf{t}$ ,  $\mathbf{P}'' = \kappa \mathbf{n}$  e  $\mathbf{P}''' = \kappa' \mathbf{n} - \kappa^2 \mathbf{t} + \kappa \tau \mathbf{b}$ . Abbiamo perciò

$$\mathbf{P}(s) = \left( s - \frac{\kappa_0^2 s^3}{6} \right) \mathbf{t}_0 + \left( \frac{\kappa_0 s^2}{2} + \frac{\kappa_0' s^3}{6} \right) \mathbf{n}_0 + \frac{\kappa_0 \tau_0 s^3}{6} \mathbf{b}_0 + o(s^3),$$

che può essere riscritta come

$$\begin{cases} x(s) = s - \frac{\kappa_0^2 s^3}{6} + o(s^3) \\ y(s) = \frac{\kappa_0 s^2}{2} + \frac{\kappa_0' s^3}{6} + o(s^3) \\ z(s) = \frac{\kappa_0 \tau_0 s^3}{6} + o(s^3) \end{cases} \quad (1.5.4)$$

Da tale scrittura si leggono agevolmente le derivate rispetto ad  $s$  delle componenti di  $\mathbf{P}$ , calcolate in  $s = 0$ :

	$x(s)$	$y(s)$	$z(s)$
$(\ )'(0)$	1	0	0
$(\ )''(0)$	0	$\kappa_0$	0
$(\ )'''(0)$	$-\kappa_0^2$	$\kappa_0'$	$\kappa_0 \tau_0$

Consideriamo il generico piano passante per l'origine:

$$ax + by + cz = 0;$$

tale piano è il luogo di zeri della funzione  $F(x, y, z) = ax + by + cz$ ; imporre l'annullamento della derivata  $r$ -sima di  $F \circ \mathbf{P}$  equivale a richiedere che  $ax^{(r)}(0) + by^{(r)}(0) + cz^{(r)}(0) = 0$ ; annullando la derivata prima e la derivata seconda si ottiene:

$$\begin{cases} a = 0 \\ b\kappa_0 = 0 \end{cases}$$

quindi troviamo che il massimo ordine di contatto di un piano con la curva è ottenuto per  $a = b = 0$ , cioè dal piano  $z = 0$ , che è il piano osculatore; in generale (cioè se  $\tau_0 \neq 0$ ) tale massimo è tre.

Una sfera di centro  $(\alpha, \beta, \gamma)$  passante per l'origine è il luogo di zeri della funzione  $F(x, y, z) = x^2 - 2\alpha x + y^2 - 2\beta y + z^2 - 2\gamma z$ ; calcoliamo le derivate di  $f = F \circ \mathbf{P}$ :

$$\begin{aligned} f' &= 2(xx' - \alpha x' + yy' - \beta y' + zz' - \gamma z') \\ f'' &= 2((x')^2 + xx'' - \alpha x'' + (y')^2 + yy'' - \beta y'' + (z')^2 + zz'' - \gamma z'') \\ f''' &= 2(3x'x'' + xx''' - \alpha x''' + 3y'y'' + yy''' - \beta y''' + 3z'z'' + zz''' - \gamma z''') \end{aligned}$$

e imponiamone l'annullamento in  $s = 0$ , utilizzando la tabella delle derivate calcolate in precedenza:

$$\begin{cases} -\alpha = 0 \\ 1 - \beta\kappa_0 = 0 \\ \alpha\kappa_0^3 - \beta\kappa_0' - \gamma\kappa_0\tau_0 = 0 \end{cases}$$

da cui troviamo  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \frac{1}{\kappa_0}$ ,  $\gamma = -\frac{\kappa_0'}{\tau_0\kappa_0^2}$ .

Abbiamo perciò trovato che il massimo ordine di contatto di una sfera con la curva è maggiore di tre (in generale è quattro). La sfera che realizza tale massimo è detta *sfera osculatrice*. Il suo centro è

$$\mathbf{C}(s) = \mathbf{P}(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}(s) - \frac{\kappa'(s)}{\tau(s)\kappa(s)^2}\mathbf{b}(s)$$

e il suo raggio è

$$r(s) = \sqrt{\frac{1}{\kappa(s)^2} + \frac{\kappa'(s)^2}{\tau(s)^2\kappa(s)^4}}$$

**Osservazione 1.5.5.** Le stesse condizioni possono essere usate per stabilire se una curva giace su una sfera  $S$  (una tale curva sarà detta *sferica*); in tal caso,

infatti, tutte le derivate della funzione  $f$  sopra considerata devono essere nulle, e quindi raggio e centro della sfera devono essere:

$$r(s) = \sqrt{\frac{1}{\kappa(s)^2} + \frac{\kappa'(s)^2}{\tau(s)^2\kappa(s)^4}} = \bar{r} \quad (1.5.6)$$

$$\mathbf{C}(s) = \mathbf{P}(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}(s) - \frac{\kappa'(s)}{\tau(s)\kappa(s)^2}\mathbf{b}(s) = \bar{\mathbf{C}} \quad (1.5.7)$$

**Proposizione 1.5.8.** *Una curve di Frenet di classe  $C^4$ , non piana, è sferica se e solo se*

1. *E' soddisfatta la (1.5.6).*
2. *E' soddisfatta la (1.5.7).*
3. *E' soddisfatta la seguente equazione:*

$$\left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)' = \frac{\tau}{\kappa}. \quad (1.5.9)$$

**Dim.** Mostriamo innanzitutto l'equivalenza di 1. e 3. Elevando a quadrato e derivando la (1.5.6) troviamo che

$$2rr' = -\frac{2\kappa'}{\kappa^3} + 2\left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)\left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)';$$

è ora semplice verificare che  $r' = 0$  se e solo se vale la (1.5.9).

Mostriamo ora l'equivalenza di 2. e 3. Calcoliamo a tal fine

$$\mathbf{C}'(s) = \mathbf{t} - \frac{\kappa'}{\kappa^2}\mathbf{n} + \frac{1}{\kappa}(-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}) - \left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)'\mathbf{b} + \frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\tau\mathbf{n} = \left(\frac{\tau}{\kappa} - \left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)'\right)\mathbf{b},$$

da cui segue l'equivalenza cercata. □

**Osservazione 1.5.10.** Dalle equazioni trovate possiamo osservare che la circonferenza osculatrice è data dall'intersezione della sfera osculatrice con il piano osculatore.

## 1.6 CURVE PIANE

Sia  $\mathbf{P} : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva piana regolare con parametro naturale, di classe almeno  $\mathcal{C}^2$ ; poiché la curva è piana, la direzione normale è determinata dalla conoscenza del versore tangente, ed è definita anche se  $\mathbf{P}''(s) = \mathbf{0}$ : per questo non è necessario richiedere che la curva sia fortemente regolare.

Definiamo versore normale quello che costituisce con  $\mathbf{t}$  una base ortonormale positivamente orientata (attenzione: la definizione è diversa da quella data nel caso delle curve fortemente regolari in  $\mathbb{R}^3$ ). La curvatura  $\kappa$  della curva sarà data dalla formula

$$\kappa(s) = \mathbf{P}''(s) \cdot \mathbf{n}(s)$$

e potrà pertanto assumere anche valori negativi. Si noti che non abbiamo richiesto alla curva di essere fortemente regolare, pertanto è anche possibile che la curvatura si annulli; un punto nel quale la curvatura si annulla è detto *punto di flesso* della curva. Scrivendo le equazioni della curva come  $\mathbf{P}(s) = (x(s), y(s))$  si ha

$$\begin{cases} \mathbf{t}(s) = (x'(s), y'(s)) \\ \mathbf{n}(s) = (-y'(s), x'(s)) \end{cases} ;$$

e pertanto la curvatura può essere espressa come

$$\kappa = \mathbf{P}'' \cdot \mathbf{n} = x'y'' - y'x''.$$

Dalla definizione di curvatura  $\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$  e quindi  $(x'', y'') = \kappa(-y', x')$ ; in particolare  $x'' = -\kappa y'$  e  $y'' = \kappa x'$ , e quindi continua a valere la formula di Frenet

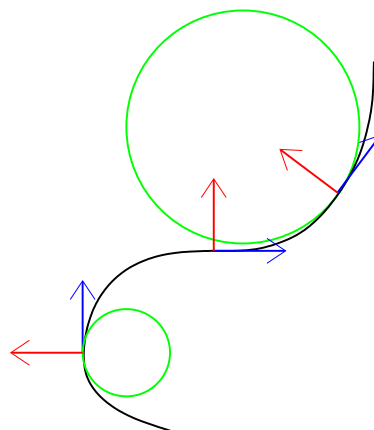
$$\mathbf{n}' = -\kappa\mathbf{t}.$$

Infatti  $\mathbf{n}' = (-y'', x'') = (-\kappa x', -\kappa y')$ .

Se la curvatura è diversa da zero, allora la quantità  $|1/\kappa|$  è detta *raggio di curvatura* della curva; il punto

$$\mathbf{C}(s) = \mathbf{P}(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}(s),$$

che abbiamo visto essere il centro della circonferenza osculatrice è detto *centro di curvatura*. In particolare avremo che la curvatura è positiva nei punti in cui il versore normale è diretto verso il centro di curvatura, negativa altrimenti.



Per trovare la curvatura di una curva con parametro qualsiasi possiamo pensare a  $\mathbf{P}$  come ad una curva nello spazio e ragionare come nella dimostrazione della

Proposizione (1.3.1), per ottenere (usando solo la formula di Frenet  $\mathbf{t}' = \kappa \mathbf{n}$ ) la formula (1.3.2):

$$\dot{\mathbf{P}} \wedge \ddot{\mathbf{P}} = \kappa \|\dot{\mathbf{P}}\|^3 \mathbf{b}$$

e, osservando che

$$\dot{\mathbf{P}} \wedge \ddot{\mathbf{P}} = \det \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{bmatrix} \mathbf{b},$$

ottenere la seguente espressione per la curvatura:

$$\kappa = \det \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{P}} \\ \ddot{\mathbf{P}} \end{bmatrix} / \|\dot{\mathbf{P}}\|^3,$$

dove ora  $\dot{\mathbf{P}}$  e  $\ddot{\mathbf{P}}$  sono considerati come vettori di  $\mathbb{R}^2$ .

## 1.7 EVOLUTE ED INVOLUTE

Vediamo ora un'altra dimostrazione della

**Proposizione 1.7.1.** *Se  $\mathbf{P} : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  è una curva regolare piana di classe  $\mathcal{C}^2$  con  $\kappa(s) = \kappa \neq 0$  costante, allora il suo supporto è contenuto in una circonferenza di raggio  $|1/\kappa|$ .*

**Dim.** Consideriamo i centri delle circonferenze osculatrici

$$\mathbf{C}(s) = \mathbf{P}(s) + \frac{1}{\kappa} \mathbf{n}(s) \tag{1.7.2}$$

e deriviamo rispetto a  $s$

$$\dot{\mathbf{C}} = \mathbf{t} + \frac{1}{\kappa} (-\kappa \mathbf{t}) \equiv 0,$$

cioè  $\mathbf{C}(s) = \overline{\mathbf{C}}$  è costante; quindi

$$\|\mathbf{P}(s) - \overline{\mathbf{C}}\| = |1/\kappa|. \quad \square$$

**Definizione 1.7.3.** Sia  $\mathbf{P} : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva regolare piana di classe  $\mathcal{C}^3$ , con curvatura non costante e mai nulla. I centri delle circonferenze osculatrici  $\mathbf{C}(s) = \mathbf{P}(s) + 1/\kappa \mathbf{n}(s)$  definiscono una curva, detta *evoluta* di  $\mathbf{P}$ .

**Osservazione 1.7.4.** L'evoluta di una curva regolare di classe  $\mathcal{C}^k$  è una curva piana di classe  $\mathcal{C}^{k-2}$ , regolare tranne che per i valori di  $s$  che sono stazionari per la curvatura di  $\mathbf{P}$ ; infatti

$$\dot{\mathbf{C}}(s) = -\frac{\kappa'}{\kappa^2} \mathbf{n}(s). \tag{1.7.5}$$

**Proposizione 1.7.6.** *Sia  $\mathbf{P} : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva regolare piana di classe  $\mathcal{C}^3$ , con curvatura non costante e mai nulla, e sia  $\mathbf{C} : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  la sua evoluta. La curva  $\mathbf{C}$  è caratterizzata dall'essere l'involuppo delle normali di  $\mathbf{P}$ ; cioè  $\mathbf{C}$  è l'evoluta di  $\mathbf{P}$  se e solo se la retta tangente a  $\mathbf{C}$  in  $\mathbf{C}(s)$  è normale alla curva  $\mathbf{P}$  in  $\mathbf{P}(s)$  per ogni  $s \in J$ .*

**Dim.** Se  $C$  è l'evolva di  $P$ , allora la proprietà richiesta per le rette tangenti segue dalle (1.7.2) e (1.7.5).

Viceversa, supponiamo di avere una curva  $C(s)$  con la proprietà sopra descritta. Allora

$$(\mathbf{P}(s) - \mathbf{C}(s)) \cdot \mathbf{t} = 0$$

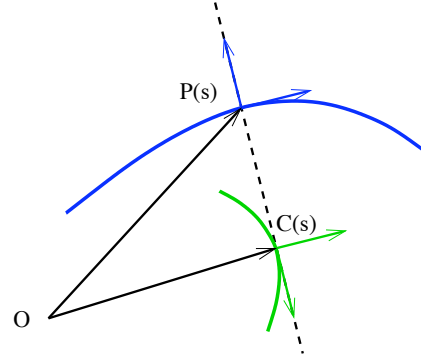
e quindi possiamo scrivere

$$\mathbf{C}(s) = \mathbf{P}(s) + f(s)\mathbf{n}(s);$$

derivando troviamo

$$\dot{\mathbf{C}}(s) = \mathbf{t}(s) + f'(s)\mathbf{n}(s) - \kappa(s)f(s)\mathbf{t}(s)$$

e quindi, poiché  $\dot{\mathbf{C}}(s)$  è diretto come  $\mathbf{n}$  concludiamo che  $f(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$ .  $\square$



**Definizione 1.7.7.** Sia  $\mathbf{P} : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva regolare piana di classe  $\mathcal{C}^2$ ; una involuta di  $\mathbf{P}$  è una curva  $\mathbf{I} : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che la retta normale ad  $\mathbf{I}$  in  $\mathbf{I}(s)$  è tangente a  $\mathbf{P}$  in  $\mathbf{P}(s)$ .

**Proposizione 1.7.8.** Una curva regolare  $\mathbf{P}(s)$  possiede infinite involute, date dall'equazione

$$\mathbf{I}(s) = \mathbf{P}(s) + (a - s)\mathbf{t}(s),$$

ove  $a$  è una costante reale.

**Dim.** Dall'espressione di  $\mathbf{I}$  è evidente che  $\mathbf{I}(s)$  sta sulla retta tangente a  $\mathbf{P}$  in  $\mathbf{P}(s)$ . Derivando otteniamo

$$\dot{\mathbf{I}}(s) = (a - s)\kappa(s)\mathbf{n}(s),$$

e quindi, poiché il vettore tangente ad  $\mathbf{I}$  in  $\mathbf{I}(s)$  è normale a  $\mathbf{P}$  in  $\mathbf{P}(s)$ , il versore normale ad  $\mathbf{I}$  in  $\mathbf{I}(s)$  sarà tangente a  $\mathbf{P}$  in  $\mathbf{P}(s)$ .

Viceversa, per definizione di involuta la retta normale ad  $\mathbf{I}$  in  $\mathbf{I}(s)$  è tangente a  $\mathbf{P}$  in  $\mathbf{P}(s)$ , pertanto abbiamo che  $(\mathbf{I}(s) - \mathbf{P}(s)) \cdot \mathbf{n} = 0$  e quindi possiamo scrivere

$$\mathbf{I}(s) = \mathbf{P}(s) + f(s)\mathbf{t}(s);$$

derivando troviamo

$$\dot{\mathbf{I}}(s) = \mathbf{t}(s) + f'(s)\mathbf{t}(s) + f(s)\kappa(s)\mathbf{n}(s)$$

da cui  $f'(s) = -1$  e quindi  $f(s) = -s + a$ .  $\square$

**Osservazione 1.7.9.** L'involuta di una curva regolare di classe  $\mathcal{C}^2$  è una curva regolare tranne che per i valori di  $s$  che annullano la curvatura di  $\mathbf{P}$  e per  $s = a$ ; infatti

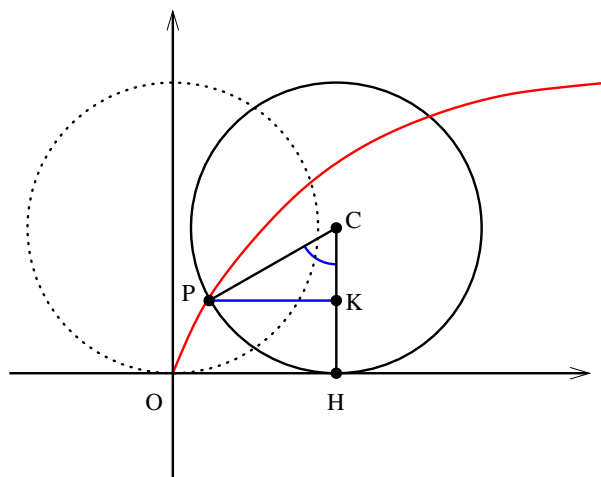
$$\dot{\mathbf{I}}(s) = \kappa(s)(a - s)\mathbf{n}(s).$$



## 1.8 ALCUNE IMPORTANTI CURVE PIANE

## 1. La cicloide

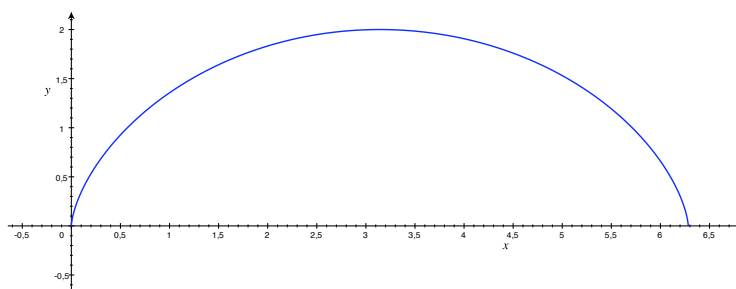
E' la curva descritta da un punto sulla circonferenza di un cerchio che rotola senza strisciare; consideriamo un cerchio di raggio unitario che parte con il centro in  $(0, 1)$  e rotola senza strisciare sull'asse  $x$ , nel verso delle ascisse positive:



Sia  $t$  l'angolo  $\widehat{PCH}$  (in radianti). L'arco  $HP$  e il segmento  $OH$  hanno lunghezza  $t$ . L'ascissa del punto  $P$  si ottiene sottraendo la lunghezza del segmento  $PK$  dalla ascissa di  $H$ , mentre l'ordinata di  $P$  si ottiene sottraendo la lunghezza del segmento  $CK$  dall'ordinata di  $C$ .

Pertanto le equazioni della curva sono

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$



Troviamo la lunghezza di un arco di cicloide (per  $t$  che varia da 0 a  $2\pi$ ); abbiamo che

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix};$$

pertanto

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = \left[ -4 \cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = 8.$$

Calcoliamo ora la curvatura della cicloide; abbiamo che

$$\ddot{\mathbf{P}}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix};$$

troviamo quindi che

$$\dot{\mathbf{P}}(t) \wedge \ddot{\mathbf{P}}(t) = (\cos t - 1)\mathbf{k}.$$

La curvatura è data da

$$\kappa(t) = \frac{\det[\dot{\mathbf{P}}(t) \mid \ddot{\mathbf{P}}(t)]}{\|\dot{\mathbf{P}}(t)\|^3} = \frac{\cos t - 1}{(2 - 2 \cos t)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2\sqrt{2 - 2 \cos t}}.$$

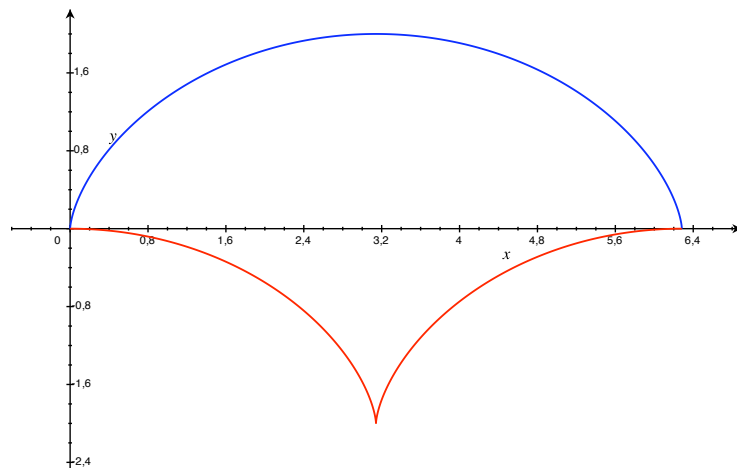
Troviamo ora l'equazione dell'evoluta della cicloide; il versore normale è dato da

$$\mathbf{n}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 - 2 \cos t}}$$

e quindi l'equazione dell'evoluta è

$$\mathbf{C}(t) = \begin{pmatrix} t + \sin t \\ \cos t - 1 \end{pmatrix};$$

si tratta di un'altra cicloide.



Per finire troviamo le equazioni delle involute; per far questo dobbiamo trovare il parametro arco

$$s(t) = \int \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| dt = \int \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = -4 \cos \frac{t}{2};$$

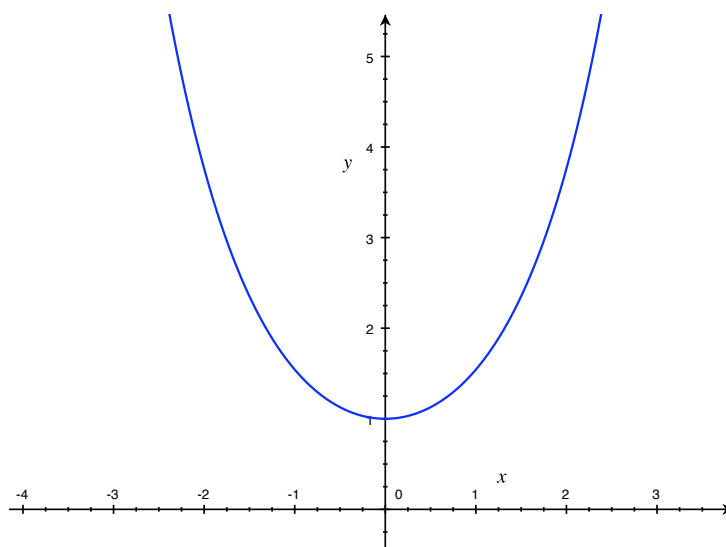
Le involute avranno perciò equazioni

$$\mathbf{I}(t) = \mathbf{P}(t) + \left( a + 4 \cos \frac{t}{2} \right) \mathbf{t}(t).$$

## 2. La catenaria

E' la curva di equazioni

$$\begin{cases} x = t \\ y = \cosh t \end{cases} .$$



Calcoliamo la curvatura della catenaria; abbiamo che

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh t \end{pmatrix};$$

$$\ddot{\mathbf{P}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cosh t \end{pmatrix};$$

troviamo quindi che

$$\dot{\mathbf{P}}(t) \wedge \ddot{\mathbf{P}}(t) = (\cosh t)\mathbf{k}$$

La curvatura è data da

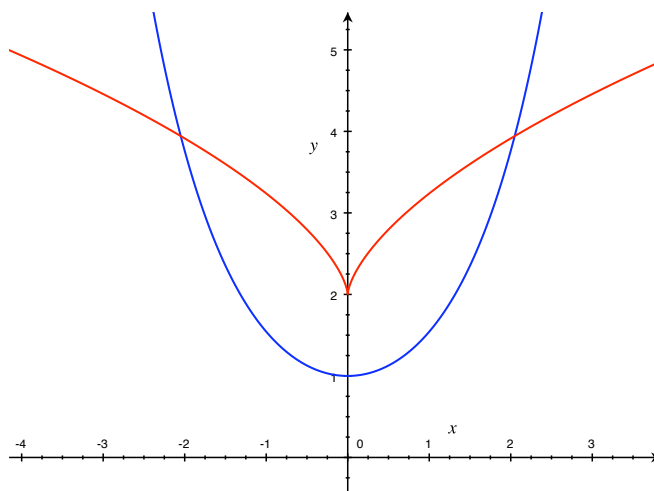
$$\kappa(t) = \frac{\det[\dot{\mathbf{P}}(t) \mid \ddot{\mathbf{P}}(t)]}{\|\dot{\mathbf{P}}(t)\|^3} = \frac{\cosh t}{\cosh^3 t} = \frac{1}{\cosh^2 t}.$$

Troviamo ora l'equazione dell'evolvente della catenaria; il versore normale è dato da

$$\mathbf{n}(t) = \begin{pmatrix} -\sinh t \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\cosh t}$$

e quindi l'equazione dell'evolvente è

$$\mathbf{C}(t) = \begin{pmatrix} t - \sinh t \cosh t \\ 2 \cosh t \end{pmatrix}.$$



Troviamo ora l'equazione delle involute; il versore tangente è:

$$\mathbf{t} = \frac{\dot{\mathbf{P}}(t)}{\|\dot{\mathbf{P}}(t)\|} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh t \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\cosh t}$$

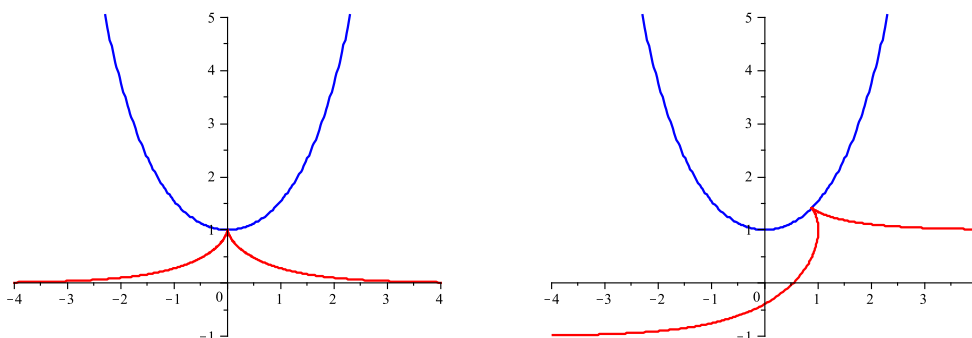
e il parametro naturale è dato da

$$s = \int_0^t \|\dot{\mathbf{P}}(\theta)\| d\theta = \int_0^t \cosh \theta d\theta = \sinh t.$$

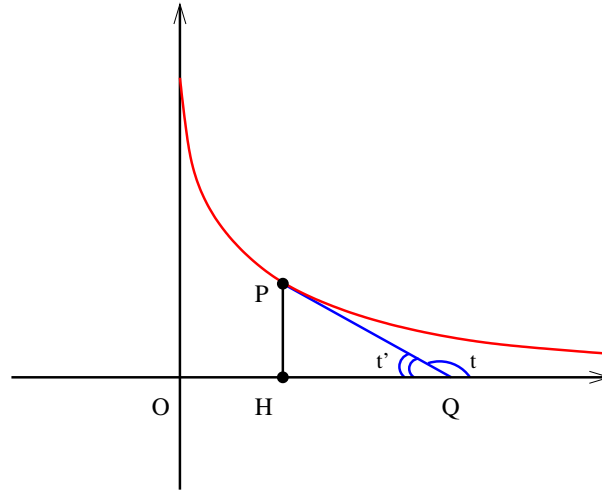
Pertanto le equazioni cercate sono:

$$\mathbf{I}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cosh t \end{pmatrix} + (a - \sinh t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh t \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\cosh t};$$

Per  $a = 0$  l'equazione si riduce a  $\mathbf{I}(t) = \left( t - \frac{\sinh t}{\cosh t}, \frac{1}{\cosh t} \right)$ . Vediamo il grafico di due involute (per  $a = 0$  e  $a = 1$ ):



3. La *trattrice*  $E'$  una curva piana tale che il segmento di tangente che unisce un punto della curva con una retta fissata abbia lunghezza costante. Scegliamo come retta l'asse  $x$  e come lunghezza del segmento quella unitaria:



Possiamo prendere come parametro l'angolo  $t$  o l'angolo  $t'$  in figura. Scegliendo l'angolo  $t$  – che varierà quindi in  $[\pi/2, \pi]$  – osserviamo che  $y = \sin t$ . Per trovare  $x(t)$  dobbiamo imporre la condizione che definisce la curva, cioè che il segmento  $PQ$ , tangente alla curva in  $P(t) = (x(t), y(t))$  abbia lunghezza unitaria.

Ciò equivale a dire che il vettore tangente  $(x', y')$  è  $(-\cos t, -\sin t)$ . Ricaviamo dunque che

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy} \frac{dy}{dt} = \cot t \cos t,$$

da cui

$$dx = \frac{\cos^2 t}{\sin t} dt = \left( \frac{1}{\sin t} - \sin t \right) dt.$$

Osservando che

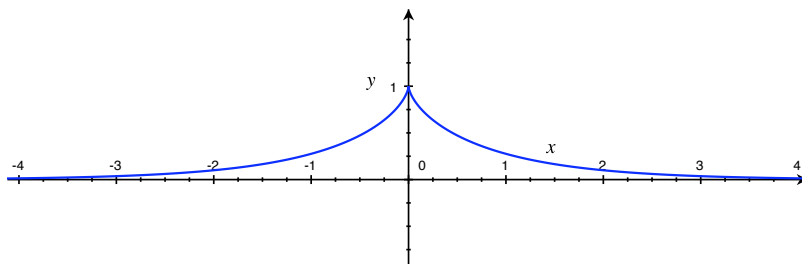
$$\frac{1}{\sin t} = \frac{1}{2 \sin t/2 \cos t/2} = \frac{\sin^2 t/2 + \cos^2 t/2}{2 \sin t/2 \cos t/2} = \frac{1}{2} (\tan t/2 + \cot t/2), \quad (1.8.1)$$

possiamo calcolare

$$\begin{aligned} x(t) &= \int \left( \frac{1}{2} (\tan t/2 + \cot t/2) - \sin t \right) dt = \ln(\sin t/2) - \ln(\cos t/2) + \cos t + C = \\ &= \ln(\tan t/2) + \cos t + C. \end{aligned}$$

Osservando che, per  $t = \pi/2$  si ha  $x = 0$  troviamo  $C = 0$ , e quindi la curva ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \cos t + \ln \tan \left( \frac{t}{2} \right) \\ y = \sin t \end{cases}.$$



Calcoliamo la curvatura della trattrice; abbiamo che

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t + \frac{1}{\sin t} \\ \cos t \end{pmatrix};$$

$$\ddot{\mathbf{P}}(t) = \begin{pmatrix} -\cos t - \frac{\cos t}{\sin^2 t} \\ -\sin t \end{pmatrix};$$

troviamo quindi che

$$\|\dot{\mathbf{P}}(t)\| = |\cot t|$$

$$\dot{\mathbf{P}}(t) \wedge \ddot{\mathbf{P}}(t) = (\cot^2 t)\mathbf{k}$$

La curvatura è data da

$$\kappa(t) = \frac{\det[\dot{\mathbf{P}}(t) \mid \ddot{\mathbf{P}}(t)]}{\|\dot{\mathbf{P}}(t)\|^3} = \frac{\cot^2 t}{|\cot^3 t|} = |\tan t|.$$

Troviamo ora l'equazione dell'evoluta della trattrice; il versore normale è dato da

$$\mathbf{n}(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t + \frac{1}{\sin t} \end{pmatrix} \cdot |\tan t|$$

e quindi l'equazione dell'evoluta è

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \ln \tan \left( \frac{t}{2} \right) \\ \frac{1}{\sin t} \end{pmatrix}.$$

Si tratta della catenaria, come si può vedere dalla riparametrizzazione  $t' = \ln \tan \left( \frac{t}{2} \right)$ , utilizzando la (1.8.1).

## 1.9 PROPRIETÀ GLOBALI DI CURVE PIANE

**Definizione 1.9.1.** Una curva piana regolare *chiusa* di classe  $\mathcal{C}^k$  è una curva regolare  $\mathbf{P} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  di classe  $\mathcal{C}^k$  tale che  $\mathbf{P}(a) = \mathbf{P}(b)$  e che  $\mathbf{P}^{(n)}(a) = \mathbf{P}^{(n)}(b)$  per ogni  $n \leq k$ .

**Osservazione 1.9.2.** La funzione  $\mathbf{P} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  può essere pensata come una funzione definita su tutto  $\mathbb{R}$  e periodica di periodo  $b - a$ .

**Osservazione 1.9.3.** Riparametrizzando la curva con il parametro naturale, scegliendo come punto iniziale il punto  $a$ , indicata con  $l$  la lunghezza della curva, l'intervallo di definizione di  $\mathbf{P}$  sarà  $[0, l]$ .

Sia  $\mathbf{P} : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva regolare di classe  $\mathcal{C}^k$ ; denotando con  $\vartheta(s)$  l'angolo formato dal versore tangente  $\mathbf{t}(s)$  con l'asse delle ascisse avremo

$$\begin{cases} \mathbf{t} = (\cos \vartheta, \sin \vartheta) \\ \mathbf{n} = (-\sin \vartheta, \cos \vartheta) \end{cases} ;$$

Quindi  $\mathbf{t}' = (-\sin \vartheta \vartheta', \cos \vartheta \vartheta')$ , e, dalla formula di Frenet,

$$\kappa(s) = \vartheta'(s).$$

**Definizione 1.9.4.** L'indice di rotazione di una curva chiusa  $\mathbf{P} : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  di classe almeno  $\mathcal{C}^2$  è

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^l \kappa(s) ds.$$

Osserviamo che l'indice di rotazione  $\mathbf{P}$  può assumere come valori solo numeri interi; infatti, essendo  $\kappa(s) = \vartheta'(s)$  si ha che il valore dell'integrale è  $\vartheta(l) - \vartheta(0)$  e, poiché  $\mathbf{t}(l) = \mathbf{t}(0)$  i corrispondenti valori di  $\vartheta$  differiscono per  $2m\pi$  per qualche intero  $m$ .

**Definizione 1.9.5.** Una curva piana regolare chiusa si dice *convessa* se, per ogni retta  $\ell$  tangente alla curva, la curva giace in uno dei due semipiani (chiusi) individuati da  $\ell$ .

**Osservazione 1.9.6.** Una curva piana regolare chiusa  $\mathbf{P} : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  è convessa se e solo se – a meno di riorientare la curva – per ogni  $s_0 \in [0, l]$  la funzione  $f_{s_0} : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$  definita ponendo

$$f_{s_0}(s) = (\mathbf{P}(s) - \mathbf{P}(s_0)) \cdot \mathbf{n}(s_0)$$

è nonnegativa.

**Proposizione 1.9.7.** Sia  $\mathbf{P} : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva piana chiusa regolare, semplice di classe  $\mathcal{C}^2$ . Se  $\mathbf{P}$  è convessa, a meno dell'orientazione,  $\kappa(s) \geq 0$  per ogni  $s \in [0, l]$ .

**Dim.** La funzione  $F(t, s) = f_t(s)$ , definita nell'Osservazione (1.9.6), è continua, e di segno costante per ogni  $t$  fissato.

Osserviamo inoltre che non può esistere  $t \in [0, l]$  tale che  $f_t \equiv 0$ . Infatti, in tal caso si avrebbe  $0 \equiv (\mathbf{P}(s) - \mathbf{P}(t)) \cdot \mathbf{n}(t)$ , e quindi il supporto di  $\mathbf{P}$  sarebbe contenuto in una retta, e la curva non potrebbe essere chiusa.

Siano  $U = \{t \in [0, l] \mid f_t(s) \geq 0\}$  e  $V = \{t \in [0, l] \mid f_t(s) \leq 0\}$ ; per la continuità di  $F$  sia  $U$  che  $V$  sono insiemi aperti; essendo disgiunti, non possono essere entrambi non vuoti, in virtù della connessione di  $[0, l]$ .

A meno di invertire l'orientazione possiamo quindi supporre  $f_t(s) \geq 0 \quad \forall (t, s) \in [0, l] \times [0, l]$ . Per ogni  $t \in [0, l]$  abbiamo  $f_t(t) = 0$ , e quindi  $t$  è punto di minimo assoluto per  $f_t$ , pertanto  $f_t''(t) \geq 0$ . Essendo

$$f_t''(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{n}(t)$$

troviamo che  $\kappa(t) \geq 0$ . □

**Osservazione 1.9.8.** Si può dimostrare che vale anche l'implicazione opposta della Proposizione (1.9.7). Tale dimostrazione utilizza un importante Teorema di Hopf, qui riportato.

**Teorema 1.9.9.** [Delle tangenti, di Hopf] *L'indice di rotazione di una curva chiusa regolare semplice di classe  $\mathcal{C}^2$  è  $\mp 1$ .*

**Definizione 1.9.10.** Un *vertice* di una curva piana di classe  $\mathcal{C}^3$  è un punto che corrisponde a uno zero della derivata della curvatura.

**Teorema 1.9.11.** [Dei quattro vertici] *Una curva chiusa convessa regolare semplice  $\mathbf{P} : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , di classe  $\mathcal{C}^3$  ha almeno quattro vertici.*

**Dim.** Siano  $\mathbf{P}(s) = (x(s), y(s))$  le equazioni parametriche della curva con parametro naturale; poiché  $\mathbf{n} = (-y'(s), x'(s))$  abbiamo che

$$x'' = -\kappa y' \qquad y'' = \kappa x'$$

Utilizzando queste formule e ricordando che la curva è chiusa, otteniamo

$$\begin{aligned} \int_0^l \kappa' ds &= \kappa(l) - \kappa(0) = 0 \\ \int_0^l x \kappa' ds &= \int_C (-y' + \kappa x)' ds = 0 \\ \int_0^l y \kappa' ds &= \int_C (x' + \kappa y)' ds = 0 \end{aligned}$$

e quindi, per qualsiasi scelta di costanti reali  $a_0, a_1$  e  $a_2$  si ha

$$\int_0^l (a_0 + a_1 x + a_2 y) \kappa' ds = 0. \tag{1.9.12}$$



Osserviamo ora che una retta  $\ell$  non può tagliare la curva in tre punti distinti; siano  $P, Q$  ed  $R$  tali punti, con  $Q$  appartenente al segmento  $\overline{PR}$ . Per la convessità della curva la tangente ad essa in  $Q$  dovrebbe essere la retta  $\ell$  stessa, e la tangente in un punto vicino a  $Q$  violerebbe la convessità.

Per convincerci di quest'ultima affermazione, prendiamo un sistema di coordinate centrato in  $Q$ , e avente gli assi nella direzione tangente e normale alla curva in tale punto. Consideriamo lo sviluppo locale della curva in un intorno di  $Q$ ; per la scelta di coordinate fatta

$$\begin{cases} x(s) = s + o(s^3) \\ y(s) = \kappa_0 \frac{s^2}{2} + o(s^3) \end{cases}$$

e quindi, per  $s$  sufficientemente piccolo, l'intersezione tra la retta tangente alla curva in  $\mathbf{P}(s)$  e la retta  $\ell$  giace nell'intervallo  $[0, s]$ . Ne segue che la retta  $\ell$  lascia i punti  $P$  ed  $R$  da parti opposte<sup>1</sup>.

Possiamo chiaramente assumere che i vertici della curva siano isolati; tale ipotesi esclude l'esistenza di un sottointervallo di  $[0, l]$  sul quale la curvatura sia costante. Siano  $M$  e  $N$  i punti di massimo e di minimo assoluto per la curvatura e sia  $\ell$  la retta per questi due punti. Poiché  $\ell$  e la curva non hanno intersezioni diverse da  $M$  ed  $N$  per quanto osservato sopra, tali punti dividono la curva in due parti,  $C_1$  e  $C_2$ , che giacciono interamente in uno dei due semipiani  $\ell^1, \ell^2$  individuati da  $\ell$ .

Se nell'interno di  $C$  gli unici punti in cui  $\kappa'$  cambia di segno fossero  $M$  ed  $N$  a meno di scambiarli si avrebbe  $\kappa' \leq 0$  lungo  $C_1$  e  $\kappa' \geq 0$  lungo  $C_2$ .

Sia  $a_0 + a_1x + a_2y = 0$  un'equazione di  $\ell$ , normalizzata in modo che  $a_1^2 + a_2^2 = 1$ ; la quantità  $a_0 + a_1x + a_2y$ , che rappresenta la distanza con segno di  $(x, y)$  da  $\ell$ , non cambia di segno lungo  $C_1$  o lungo  $C_2$ .

Assumiamo, senza perdita di generalità, che  $a_0 + a_1x + a_2y < 0$  per i punti di  $C_1$  e  $a_0 + a_1x + a_2y > 0$  per i punti di  $C_2$ . Ma allora la funzione  $(a_0 + a_1x + a_2y)\kappa'$  è nonnegativa lungo  $C$  e non può essere identicamente nulla, in quanto  $\kappa'$  ha solo zeri isolati; ciò contraddice la formula (1.9.12).

Ne segue che  $\kappa'$  cambia di segno almeno una volta (e quindi almeno due) all'interno di  $C_1$  (o di  $C_2$ ).  $\square$

**Osservazione 1.9.13.** Si può dimostrare che il teorema dei quattro vertici è vero anche per curve non convesse, purché semplici.

**Definizione 1.9.14.** Una curva piana chiusa e semplice  $\mathbf{P} : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  di classe almeno  $\mathcal{C}^2$  è detta *ovale* se e solo se – a meno dell'orientazione –  $\kappa(s) > 0$  per ogni  $s \in [0, l]$ .

<sup>1</sup>Per semplicità abbiamo assunto  $\kappa_0 \neq 0$ ; se così non fosse, per la convessità, il primo termine non nullo dello sviluppo di  $\mathbf{P}$  dovrebbe comunque essere di ordine pari, e il ragionamento si ripeterebbe inalterato.

Sia  $\mathbf{P} : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  un ovale di classe  $\mathcal{C}^k$ ; indicato con  $\vartheta$  l'angolo formato dal versore tangente e dall'asse  $x$ , poiché  $\vartheta'(s) = \kappa(s) > 0$  per ogni  $s \in [0, l]$  la funzione  $\vartheta$  è sempre crescente; inoltre, poiché la curva è chiusa e semplice, per il Teorema (1.9.9) si ha  $\vartheta([0, l]) = [\vartheta(0), \vartheta(0) + 2\pi]$ .

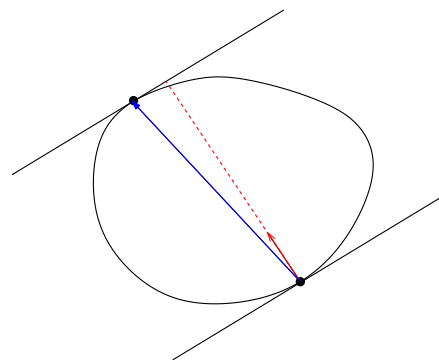
Pertanto la funzione  $\vartheta(s) : [0, l] \rightarrow [\vartheta(0), \vartheta(0) + 2\pi]$  è invertibile (e di classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ ), e possiamo usarla per riparametrizzare la curva (possiamo anche assumere, per comodità, che  $\vartheta(0) = 0$ ). Con tale parametrizzazione avremo

$$\dot{\mathbf{P}}(\vartheta) = \frac{d\mathbf{P}}{d\vartheta} = \frac{d\mathbf{P}}{ds} \frac{ds}{d\vartheta} = \mathbf{t} \frac{1}{\kappa};$$

in particolare vediamo che la norma del vettore tangente è il raggio di curvatura della curva, e inoltre

$$\dot{\mathbf{t}} = \kappa \mathbf{n} \frac{ds}{d\vartheta} = \mathbf{n}.$$

Fissato  $\vartheta_0 \in [0, \pi]$ , osserviamo che il versore tangente in  $\mathbf{P}(\vartheta_0 + \pi)$  ha la stessa direzione (e verso opposto) del versore tangente in  $\mathbf{P}(\vartheta_0)$ . Possiamo calcolare la distanza tra le rette tangenti in tali punti proiettando il vettore che li unisce sulla direzione normale; tale distanza è detta ampiezza dell'ovale nella direzione  $\mathbf{n}(\vartheta_0)$ :



Avremo perciò:

$$a(\vartheta_0) = (\mathbf{P}(\vartheta_0 + \pi) - \mathbf{P}(\vartheta_0)) \cdot \mathbf{n}(\vartheta_0).$$

**Teorema 1.9.15** (di Cauchy). *Sia  $\mathbf{P} : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  un ovale di classe  $\mathcal{C}^2$  e di lunghezza  $l$ ; allora si ha*

$$\int_0^{2\pi} a(\vartheta) d\vartheta = 2l.$$

**Dim.** Integrando per parti, abbiamo che

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} ((\mathbf{P}(\vartheta + \pi) - \mathbf{P}(\vartheta)) \cdot \mathbf{n}(\vartheta)) d\vartheta = \\ & = [(\mathbf{P}(\vartheta + \pi) - \mathbf{P}(\vartheta)) \cdot \mathbf{t}(\vartheta)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} ((\dot{\mathbf{P}}(\vartheta + \pi) - \dot{\mathbf{P}}(\vartheta)) \cdot \mathbf{t}(\vartheta)) d\vartheta = \\ & = - \int_0^{2\pi} ((\dot{\mathbf{P}}(\vartheta + \pi) - \dot{\mathbf{P}}(\vartheta)) \cdot \mathbf{t}(\vartheta)) d\vartheta, \end{aligned}$$

in quanto  $\mathbf{P}$  è periodica di periodo  $2\pi$ . Calcoliamo ora

$$\int_0^{2\pi} (\dot{\mathbf{P}}(\vartheta)) \cdot \mathbf{t}(\vartheta) d\vartheta = \int_0^{2\pi} \|\dot{\mathbf{P}}(\vartheta)\| (\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}) d\vartheta = l$$

e analogamente per l'altro integrale, osservando che  $-\mathbf{t}(\vartheta) = \mathbf{t}(\vartheta + \pi)$ . □

**Corollario 1.9.16.** *Il perimetro di un ovale di ampiezza costante  $a$  è  $\pi a$ .*

## Capitolo 2

---

# Superfici differenziabili

---

### 2.1 SUPERFICI ELEMENTARI IN $\mathbb{R}^3$

**Definizione 2.1.1.** Una *superficie elementare* (o *foglio semplice di superficie*) è un'applicazione iniettiva  $\mathbf{P} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  di classe  $C^\infty$ , definita su di un aperto  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^2$  omeomorfo a un disco, tale che il rango dello Jacobiano di  $\mathbf{P}$  sia massimo per ogni punto di  $\Omega$ . L'immagine di  $\mathbf{P}$  è detta *traccia* o *sostegno* della superficie elementare.

**Osservazione 2.1.2.** Denotate (come faremo abitualmente) con  $(u, v)$  le coordinate in  $\Omega$  e con  $\mathbf{P}_u$  e  $\mathbf{P}_v$  i vettori  $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u}$  e  $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v}$  la condizione sul rango è equivalente a richiedere che

$$\mathbf{P}_u(u, v) \wedge \mathbf{P}_v(u, v) \neq \mathbf{0} \quad \forall u, v \in \Omega. \quad (2.1.3)$$

**Definizione 2.1.4.** Sia  $\mathbf{P} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie elementare; le curve sulla superficie del tipo  $\mathbf{P}(t, v_0)$  e  $\mathbf{P}(u_0, t)$ , immagini delle intersezioni delle rette orizzontali e verticali di  $\mathbb{R}^2$  con  $\Omega$  sono dette *linee coordinate*.

**Osservazione 2.1.5.** I vettori tangenti alle linee coordinate  $\mathbf{P}(u, v_0)$  e  $\mathbf{P}(u_0, v)$  sono rispettivamente  $\mathbf{P}_u$  e  $\mathbf{P}_v$ . Infatti, data una curva  $\gamma_\Omega : J \rightarrow \Omega$ , descritta da equazioni parametriche  $(u(t), v(t))$ , la composizione  $\gamma := \mathbf{P} \circ \gamma_\Omega : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una curva in  $\mathbb{R}^3$  la cui traccia è contenuta nella traccia della superficie  $\mathbf{P}$ , e il cui vettore tangente è dato da  $\dot{\gamma} = \mathbf{P}_u \dot{u} + \mathbf{P}_v \dot{v}$ .

**Definizione 2.1.6.** Data una superficie elementare  $\mathbf{P} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , e denotata con  $S$  la sua traccia, il *piano tangente* ad  $S$  nel punto  $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}(u_0, v_0)$  è il piano affine  $\mathbb{T}_{\mathbf{P}_0} S$  passante per  $\mathbf{P}_0$  la cui giacitura è individuata dallo spazio vettoriale  $\langle \mathbf{P}_u, \mathbf{P}_v \rangle$ , detto *spazio vettoriale tangente*, che indicheremo con  $T_{\mathbf{P}_0} S$ .

**Definizione 2.1.7.** Sia  $\mathbf{P} : \Omega \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie elementare e sia  $\{\mathbf{P}_u, \mathbf{P}_v\}$  la base canonica per lo spazio tangente; il *versore normale*  $\mathbf{N}$  è definito come

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v}{\|\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v\|}.$$

**Esempi 2.1.8. La sfera**

Poiché la sfera non è omeomorfa a un disco aperto, non è possibile descrivere tutta la superficie sferica come traccia di una superficie elementare. Se ne possono però descrivere delle porzioni. Vediamo alcuni modi di farlo. Considereremo sempre, per semplicità, la sfera di raggio uno con centro nell'origine.

1. La superficie elementare  $\mathbf{P} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  di equazioni

$$\begin{cases} x = 2u/(u^2 + v^2 + 1) \\ y = 2v/(u^2 + v^2 + 1) \\ z = (u^2 + v^2 - 1)/(u^2 + v^2 + 1) \end{cases}$$

ha come traccia la superficie della sfera meno il polo nord.

La mappa  $\mathbf{P}$  è l'inversa della proiezione stereografica, cioè della proiezione della sfera meno il polo nord dal polo nord sul piano  $z = 0$ .

2. La superficie elementare  $\mathbf{P} : \mathbb{R}^+ \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$  di equazioni

$$\begin{cases} x = (u/\sqrt{1 + u^2}) \cos v \\ y = (u/\sqrt{1 + u^2}) \sin v \\ z = 1/\sqrt{1 + u^2} \end{cases}$$

ha come traccia la superficie di una semisfera privata di un (semi)meridiano.

La mappa  $\mathbf{P}$  è l'inversa della proiezione centrale, cioè della proiezione dal centro della sfera sul piano  $z = 1$ , in cui stiamo considerando coordinate polari. La proiezione centrale ha la proprietà di mandare cerchi massimi in rette.

3. La superficie elementare  $\mathbf{P} : (-\pi/2, \pi/2) \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$  di equazioni

$$\begin{cases} x = \cos u \cos v \\ y = \cos u \sin v \\ z = \sin u \end{cases}$$

ha come traccia la superficie della sfera privata di un meridiano.

**Esempi 2.1.9. Superfici di rotazione**

L'ultima parametrizzazione vista per la sfera può essere generalizzata per descrivere le superfici di rotazione.

Sia  $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regolare semplice di classe  $C^\infty$ , contenuta nel piano  $y = 0$ , di equazioni  $x = f(u), z = h(u)$  con  $f > 0$ . Sia  $S_\gamma \subset \mathbb{R}^3$  definita ponendo

$$S_\gamma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = f(u)^2, z = h(u), u \in J\}. \quad (2.1.10)$$

Tale insieme è detto *superficie di rotazione* della curva  $\gamma$  intorno all'asse  $z$ . La superficie elementare  $\mathbf{P} : J \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , di equazioni

$$\begin{cases} x = f(u) \cos v \\ y = f(u) \sin v \\ z = h(u) \end{cases}$$

ha traccia contenuta in  $S_\gamma$ . Più precisamente la sua traccia consiste di  $S_\gamma$  privata dell'intersezione con un semipiano avente l'asse  $z$  come bordo.

Verifichiamo che la parametrizzazione appena descritta definisce una superficie elementare; calcolando

$$\mathbf{P}_u = \begin{bmatrix} \dot{f}(u) \cos v \\ \dot{f}(u) \sin v \\ \dot{h}(u) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_v = \begin{bmatrix} -f(u) \sin v \\ f(u) \cos v \\ 0 \end{bmatrix}$$

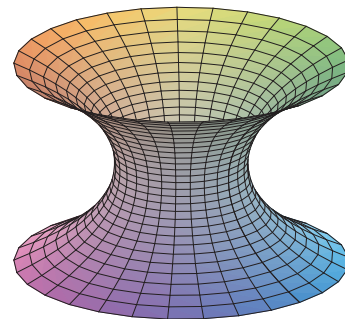
e quindi  $\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v = (-\dot{h}f \cos(v), -\dot{h}f \sin(v), f\dot{f})$  è sempre diverso dal vettore nullo, poiché, per la regolarità di  $\gamma$ , si ha che  $\|\dot{\gamma}\|^2 = \dot{f}(u)^2 + \dot{h}(u)^2 \neq 0$ .

Vediamo ora alcuni importanti esempi di superfici di rotazione.

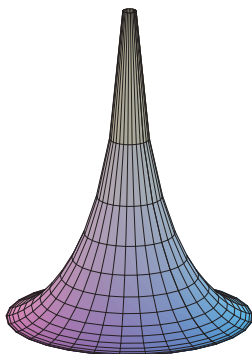
1. Il *catenoide*

È la superficie ottenuta facendo ruotare la catenaria di equazioni

$$\begin{cases} x = \cosh u \\ z = u \end{cases}$$



2. La *pseudosfera*



È la superficie ottenuta facendo ruotare la trattrice di equazioni

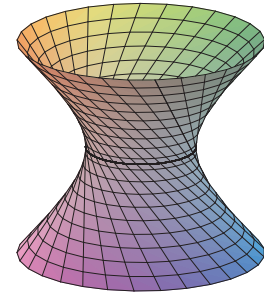
$$\begin{cases} x = \sin u \\ z = \cos u + \ln \left( \tan \frac{u}{2} \right) \end{cases}$$

3. L'iperboloide rigato

Facendo ruotare l'iperbole di equazioni  $x^2 - z^2 = 1$  attorno all'asse  $z$  si ottiene un'ipersuperficie quadrica nota come iperboloide iperbolico, o iperboloide ad una falda, luogo dei punti che soddisfano l'equazione  $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$ .

Una superficie elementare il cui sostegno è contenuto nell'iperboloide è quella descritta dalla mappa  $\mathbf{P} : (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  così definita:

$$\begin{cases} x = \cos u - v \sin u \\ y = \sin u + v \cos u \\ z = v \end{cases}$$



Questa parametrizzazione mette in luce la proprietà dell'iperboloide di essere rigato, cioè di avere la seguente proprietà: per ogni punto dell'iperboloide passa una retta contenuta nell'iperboloide stesso.

**Esempi 2.1.11. Superfici rigate**

L'ultima parametrizzazione vista per l'iperboloide può essere generalizzata, per descrivere le superfici elementari rigate, cioè le superfici elementari che ammettono una parametrizzazione della forma

$$\mathbf{P}(u, v) = \gamma(u) + v\mathbf{L}(u),$$

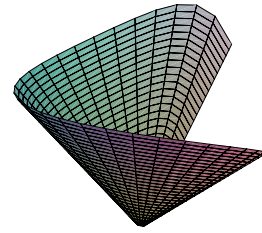
con  $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  curva liscia regolare e  $\mathbf{L} : J \rightarrow \mathbb{S}^2$  liscia, tali che  $\mathbf{P}$  sia iniettiva e che  $\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v = (\dot{\gamma} + v\dot{\mathbf{L}}) \wedge \mathbf{L} \neq \mathbf{0}$ .

1. Supponiamo che tutte le rette passino per uno stesso punto, che possiamo assumere essere l'origine. Ciò implica che i vettori  $\gamma(u)$  e  $\mathbf{L}(u)$  sono proporzionali, e la superficie che si ottiene è un *cono* di vertice l'origine. Una tale superficie può essere quindi parametrizzata come

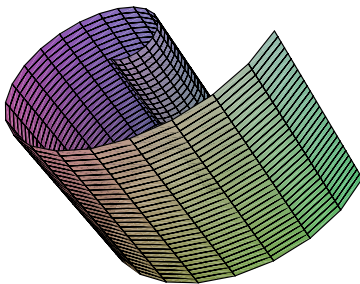
$$\mathbf{P} = v\gamma(u),$$

dove possiamo assumere che  $\gamma$  abbia la parametrizzazione naturale .

La condizione  $\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v = v\dot{\gamma} \wedge \gamma \neq \mathbf{0}$  è verificata tranne che nel vertice e nei punti che stanno su rette tangenti a  $\gamma$ ; eliminate le controimmagini del vertice  $\mathbf{P}$  è iniettiva se e solo se l'origine non sta su una retta secante alla curva  $\gamma$ . Riasumendo, data una curva  $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che l'origine non stia su una retta secante o tangente a  $\gamma$ , la mappa  $\mathbf{P} = v\gamma(u)$  sul dominio  $J \times \mathbb{R}^+$  (o  $J \times \mathbb{R}^-$ ) definisce una superficie elementare. In figura vediamo parte di un cono sull'elica circolare.



2. Supponiamo ora che  $\mathbf{L}(u)$  sia costante. La superficie rigata che si ottiene è un *cilindro*, e la condizione  $\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v \neq \mathbf{0}$  è verificata se  $\dot{\gamma}$  non è proporzionale ad  $\mathbf{L}$ .

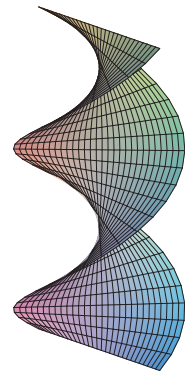


A meno di sostituire la curva  $\gamma$  con la curva  $\gamma - (\gamma \cdot \mathbf{L})\mathbf{L}$  possiamo supporre che  $\gamma$  sia una curva piana che giace in un piano ortogonale ad  $\mathbf{L}$  passante per l'origine. Tale curva è semplice se e solo se la curva originale non ha secanti parallele ad  $\mathbf{L}$ , ed è regolare se non ha tangenti parallele ad  $\mathbf{L}$ .

3. L' *elicoide*

È la superficie elementare  $\mathbf{P} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  descritta dalla parametrizzazione:

$$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = v \end{cases}$$



**Esempio 2.1.12.** Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un aperto connesso omeomorfo ad un disco, e sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione liscia. Allora il grafico di  $f$ ,  $\Gamma_f := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$  è una superficie elementare. Infatti la parametrizzazione  $\mathbf{P} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  data da

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases}$$

verifica chiaramente la condizione  $\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v \neq \mathbf{0}$ .

**Definizione 2.1.13.** Un *diffeomorfismo di classe  $C^k$*  tra due aperti  $\Omega', \Omega$  di  $\mathbb{R}^2$  è un'applicazione biunivoca  $\vartheta : \Omega' \rightarrow \Omega$  di classe  $C^k$  con inversa di classe  $C^k$ . Se  $k = \infty$  il diffeomorfismo si dice *liscio*.

**Definizione 2.1.14.** Data una superficie elementare  $\mathbf{P} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , un aperto  $\Omega'$  e un diffeomorfismo  $\vartheta : \Omega' \rightarrow \Omega$  di classe  $C^\infty$ , chiameremo *riparametrizzazione* di  $\mathbf{P}$  la superficie elementare data da  $\mathbf{Q} := \mathbf{P} \circ \vartheta : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Siano  $(U, V)$  coordinate in  $\Omega'$  e  $(u, v)$  coordinate in  $\Omega$ ; utilizzando la regola di derivazione di funzioni composte otteniamo che

$$\mathbf{Q}_U = \mathbf{P}_u \frac{\partial u}{\partial U} + \mathbf{P}_v \frac{\partial v}{\partial U},$$

$$\mathbf{Q}_V = \mathbf{P}_u \frac{\partial u}{\partial V} + \mathbf{P}_v \frac{\partial v}{\partial V},$$

cioè, indicando con  $J_\vartheta$  la matrice jacobiana di  $\vartheta$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_U \\ \mathbf{Q}_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_\vartheta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{P}_u \\ \mathbf{P}_v \end{bmatrix}. \quad (2.1.15)$$

Dalla formula appena scritta segue che

$$\mathbf{Q}_U \wedge \mathbf{Q}_V = \det(J_\vartheta)(\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v), \quad (2.1.16)$$

e quindi la condizione (2.1.3), il piano tangente e lo spazio vettoriale tangente non dipendono dalla parametrizzazione.

Dalla (2.1.16) si ha che  $\mathbf{N}(U, V) = \text{sgn}(\det J_\vartheta)\mathbf{N}(u, v)$ ; diremo che la riparametrizzazione conserva l'orientazione se  $\det(J_\vartheta) > 0$ , che la inverte altrimenti.

A differenza di quanto fatto nel caso delle curve, non definiremo una superficie come classe di equivalenza di superfici elementari rispetto alle riparametrizzazioni, per una duplice ragione; in primo luogo l'assenza per le superfici di una parametrizzazione canonica simile a quella ottenuta per le curve mediante la lunghezza d'arco. In secondo luogo perché desideriamo che la definizione di superficie includa luoghi geometrici come la sfera e l'iperboloide rigato, che abbiamo visto non essere globalmente il sostegno di una superficie elementare, ma esserlo localmente.

**Definizione 2.1.17.** Un sottoinsieme connesso  $S \subset \mathbb{R}^3$  è una *superficie differenziabile* liscia se per ogni  $p \in S$  esiste un aperto  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^2$ , omeomorfo ad un disco, ed una superficie elementare  $\mathbf{P} : \Omega \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$  di classe  $C^\infty$  tale che, considerata su  $S$  la topologia indotta da  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{P}(\Omega)$  sia un intorno aperto di  $p$  e  $\mathbf{P}$  sia un omeomorfismo sull'immagine. Una tale superficie elementare è detta *parametrizzazione locale* per  $S$  in  $p$ . Un insieme di parametrizzazioni locali  $\{\mathbf{P}_\alpha\}_{\alpha \in A}$  tali che l'unione dei loro sostegni sia  $S$  è detto *atlante* per  $S$ .



**Definizione 2.1.18.** Data una superficie  $S$  e due parametrizzazioni locali  $\mathbf{P}_\alpha : \Omega_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $\mathbf{P}_\beta : \Omega_\beta \rightarrow \mathbb{R}^3$ , il cui sostegno è contenuto in  $S$  diremo che  $\mathbf{P}_\alpha$  e  $\mathbf{P}_\beta$  determinano la stessa orientazione se  $\mathbf{P}_\alpha(\Omega_\alpha) \cap \mathbf{P}_\beta(\Omega_\beta) = \emptyset$  oppure se  $\det(J(\mathbf{P}_\beta^{-1} \circ \mathbf{P}_\alpha)) > 0$  dove definito.

**Esempi 2.1.19.**

1. Chiaramente il sostegno di una superficie elementare è una superficie.
2. La sfera è una superficie. In fatti considerando la parametrizzazione inversa della proiezione stereografica dal polo nord come al punto 1 degli esempi (2.1.8) e l'analogha parametrizzazione inversa della proiezione stereografica dal polo sud otteniamo due superfici elementari con le proprietà richieste tali che l'unione dei loro sostegni sia tutta la sfera.
3. Una superficie di rotazione  $S_\gamma$  è una superficie; siano  $x = f(u) > 0, z = h(u)$  le equazioni della curva  $\gamma$ , e consideriamo le mappe  $\mathbf{P}_1 : J \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $\mathbf{P}_2 : J \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$  definite ponendo

$$\begin{cases} x = f(u) \cos v \\ y = f(u) \sin v \\ z = h(u) \end{cases} .$$

Si tratta di due superfici elementari con le proprietà richieste tali che l'unione dei loro sostegni sia  $S_\gamma$ .

4. Se  $\gamma : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una curva (regolare semplice di classe  $C^\infty$ ) chiusa contenuta nel piano  $y = 0$ , parametrizzata col parametro arco, di equazioni  $x = f(u), z = h(u)$  con  $f > 0$ . Possiamo definire la superficie di rotazione  $S_\gamma$  come in 2.1.10, e considerando le superfici elementari  $\mathbf{P}_1 : (0, l) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{P}_2 : (0, l) \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{P}_3 : (l/2, 3l/2) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{P}_4 : (l/2, 3l/2) \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definite come sopra, verifichiamo che anche in questo caso  $S_\gamma$  è una superficie.

Ogni superficie è localmente il grafico di una funzione liscia, come mostra la seguente

**Proposizione 2.1.20.** Sia  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie. Allora, per ogni  $p \in S$  esistono un intorno  $W$  di  $p$  in  $S$ , un aperto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , un'isometria  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  e una funzione  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $\varphi(W)$  sia il grafico di  $h$ .

**Dim.** Sia  $\mathbf{P}_\alpha : \Omega_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrizzazione locale di  $S$  in  $p$ , scelta in modo tale che  $p = \mathbf{P}_\alpha(0, 0)$ .

Sia  $\varphi$  un'isometria di  $\mathbb{R}^3$  che porta  $p$  nell'origine con una traslazione e la direzione  $\mathbf{N}(0, 0)$ , normale a  $S$  in  $p$  nella direzione positiva dell'asse  $z$ , sia  $\bar{\mathbf{P}}_\alpha = \varphi \circ \mathbf{P}_\alpha$

l'espressione di  $\mathbf{P}_\alpha$  nelle nuove coordinate  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ .

Definiamo  $\vartheta : \Omega_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^2$  ponendo  $\vartheta(u, v) = (\bar{x}, \bar{y})$ . Osserviamo che, in  $(0, 0)$

$$0 \neq (\bar{\mathbf{P}}_{\alpha u} \wedge \bar{\mathbf{P}}_{\alpha v}) \cdot \bar{\mathbf{N}} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial u} \\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial v} \end{bmatrix} = \det(J_\vartheta)$$

Pertanto esiste un intorno  $\Omega'_\alpha$  di  $(0, 0)$  tale che  $\vartheta|_{\Omega'_\alpha} \rightarrow \Omega := \vartheta(\Omega'_\alpha)$  sia un diffeomorfismo sull'immagine. Sia ora  $\mathbf{Q} := \bar{\mathbf{P}}_\alpha \circ \vartheta^{-1} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ; tale funzione è della forma

$$\begin{cases} \bar{x} = \bar{x} \\ \bar{y} = \bar{y} \\ \bar{z} = h(\bar{x}, \bar{z}) \end{cases}$$

e mostra che  $\varphi(\mathbf{P}_\alpha(\Omega'_\alpha))$  è il grafico di una funzione  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . □

## 2.2 PRIMA FORMA FONDAMENTALE

Sia  $\mathbf{P} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie elementare, sia  $\mathbf{P}(u, v)$  un suo punto e sia  $T_{\mathbf{P}(u,v)}$  lo spazio vettoriale tangente in tale punto. Consideriamo la restrizione a  $T_{\mathbf{P}(u,v)}$  del prodotto scalare di  $\mathbb{R}^3$ ; si tratta di una forma bilineare simmetrica e definita positiva. Tale forma è detta *Prima Forma Fondamentale* della superficie; la indicheremo spesso con  $I(\_, \_)$ .

Scriviamo la matrice della prima forma fondamentale rispetto alla base  $\{\mathbf{P}_u, \mathbf{P}_v\}$ :

$$G = [g_i] = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_u \cdot \mathbf{P}_u & \mathbf{P}_u \cdot \mathbf{P}_v \\ \mathbf{P}_v \cdot \mathbf{P}_u & \mathbf{P}_v \cdot \mathbf{P}_v \end{bmatrix}$$

Sia  $\mathbf{P} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie elementare; data una curva  $\gamma_\Omega : J \rightarrow \Omega$ , in  $\Omega$  la composizione  $\gamma := \mathbf{P} \circ \gamma_\Omega : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una curva in  $\mathbb{R}^3$  la cui traccia è contenuta nella traccia della superficie  $\mathbf{P}$ .

Abbiamo visto che la lunghezza di una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  si può calcolare come

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t)} dt;$$

Ricordando che  $\gamma = \mathbf{P} \circ \gamma_\Omega$  e indicando con  $(u(t), v(t))$  le equazioni di  $\gamma_\Omega$  troviamo che  $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{P}_u \dot{u} + \mathbf{P}_v \dot{v}$  e quindi

$$\dot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t) = (\mathbf{P}_u \cdot \mathbf{P}_u) \dot{u}^2 + 2(\mathbf{P}_u \cdot \mathbf{P}_v) \dot{u} \dot{v} + (\mathbf{P}_v \cdot \mathbf{P}_v) \dot{v}^2. \quad (2.2.1)$$

Tale equazione può essere riscritta come:

$$\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma} = \begin{bmatrix} \dot{u} & \dot{v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix},$$

pertanto la lunghezza di  $\gamma$  è data da

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\begin{bmatrix} \dot{u} & \dot{v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix}} dt.$$

Dati due vettori  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$  nello spazio vettoriale tangente  $T_{\mathbf{P}(u,v)}$  è possibile calcolare l'angolo da essi formato nel modo seguente:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_1\| \|\mathbf{w}_2\|}.$$

Se tali vettori sono noti attraverso le loro componenti sulla base  $\{\mathbf{P}_u, \mathbf{P}_v\}$  sarà necessario utilizzare la prima forma fondamentale. Ad esempio, siano  $\gamma_1(T)$  e  $\gamma_2(t)$  due curve sulla superficie che si tagliano per  $T = T_0$  e  $t = t_0$ ; indichiamo con  $(\dot{u}_1, \dot{v}_1)$  e  $(\dot{u}_2, \dot{v}_2)$  le componenti dei loro vettori tangenti in  $\gamma_1(T_0) = \gamma_2(t_0)$ . L'angolo tra i vettori tangenti è dato da

$$\cos \theta = \frac{\begin{bmatrix} \dot{u}_1 & \dot{v}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix}}{\sqrt{\begin{bmatrix} \dot{u}_1 & \dot{v}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{v}_1 \end{bmatrix}} \sqrt{\begin{bmatrix} \dot{u}_2 & \dot{v}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix}}}$$

dove tutte le quantità sono calcolate nel punto.

**Definizione 2.2.2.** Una curva su una superficie di rotazione che taglia tutti i meridiani (cioè le curve del tipo  $\mathbf{P}(t, v_0)$ ) con un angolo costante è detta *lossodromica*.

**Esempio 2.2.3.** Consideriamo la superficie elementare  $\mathbf{P} : \mathbb{R} \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$  così definita:

$$\mathbf{P}(u, v) = \left( \frac{\cos v}{\cosh u}, \frac{\sin v}{\cosh u}, \frac{\sinh u}{\cosh u} \right)$$

Si tratta di una parametrizzazione della sfera meno un meridiano. La matrice della prima forma fondamentale è

$$G = \begin{bmatrix} \frac{1}{\cosh^2 u} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cosh^2 u} \end{bmatrix};$$

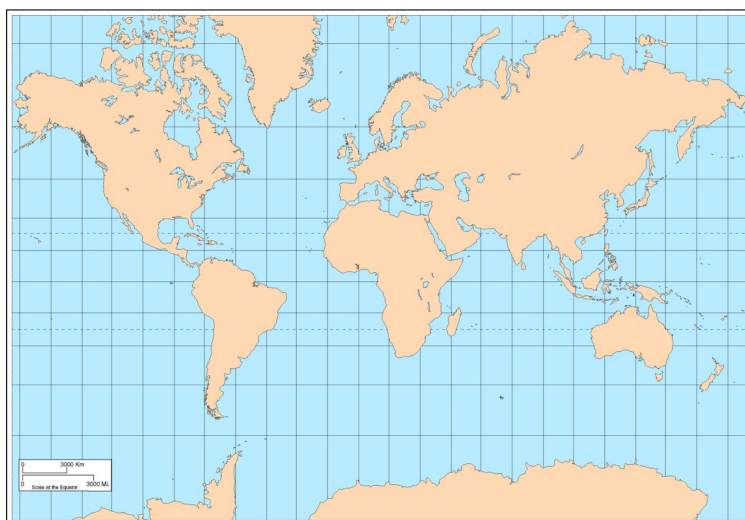
vogliamo verificare che le curve sulla sfera ottenute come immagini di rette in  $\Omega$  sono lossodromiche.

Sia  $\gamma(t) = \mathbf{P}(u_0 + at, v_0 + bt)$  l'immagine di una retta in  $\Omega$ ; il suo vettore tangente nel punto è  $\dot{\gamma}(t) = a\mathbf{P}_u + b\mathbf{P}_v$ .

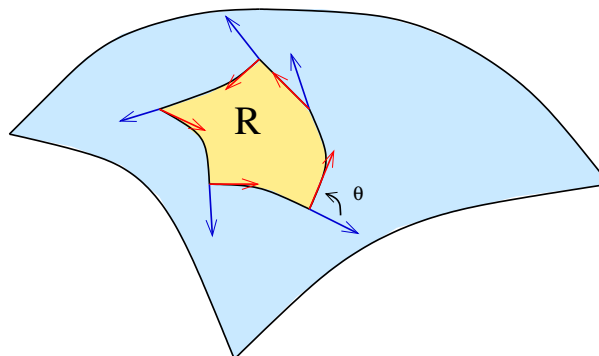
i meridiani sono le curve del tipo  $\gamma_{\bar{v}}(T) = \mathbf{P}(T, \bar{v})$ ; i vettori tangenti a tali curve sono  $\dot{\gamma}_{\bar{v}}(T) = \mathbf{P}_u$ . Applicando la formula precedente si trova

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{[a \ b] \begin{bmatrix} G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\sqrt{[a \ b] \begin{bmatrix} G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}} \cdot \sqrt{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}} = \\ &= \frac{a}{\cosh^2 u} \Big/ \left( \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{\cosh^2 u}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\cosh^2 u}} \right) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

La parametrizzazione considerata è l'inversa della proiezione di Mercatore, la cui importanza viene proprio dalla proprietà vista.



**Definizione 2.2.4.** sia  $\mathbf{P} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie elementare; sia  $Q \subset \Omega$  un sottoinsieme omeomorfo ad un disco chiuso tale che il suo bordo sia la traccia di una curva chiusa semplice  $\gamma$  di classe  $\mathcal{C}^1$  regolare a tratti; l'immagine  $R = \mathbf{P}(Q)$  è detta *regione semplice*.



**Definizione 2.2.5.** Una *partizione*  $\mathcal{P}$  di  $R$  è una suddivisione di  $R$  in un numero finito di regioni semplici  $R_i$ . Il *diametro* di  $R_i$  è il massimo delle distanze dei punti di  $R_i$  e la *norma* di una partizione  $\mathcal{P}$  è il massimo di questi diametri. Prendendo una partizione di ogni  $R_i$  si ottiene una nuova partizione  $\mathcal{P}'$  di  $R$ ; una tale partizione si dice *raffinamento* di  $\mathcal{P}$ .

Data una partizione  $\mathcal{P}$  di  $R$  scegliamo punti  $p_i \in R_i$  e proiettiamo  $R_i$  ortogonalmente sul piano tangente; sia  $\bar{R}_i$  l'immagine di  $R_i$ , e sia  $A(\bar{R}_i)$  la sua area. Se il limite di  $\sum_i A(\bar{R}_i)$  al tendere a zero della norma  $\mu$  della partizione esiste finito, allora definiamo l'area di  $R$  in questo modo:

$$A(R) = \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_i A(\bar{R}_i),$$

e diciamo che la regione  $R$  è *rettificabile*.

Si può dimostrare che

**Proposizione 2.2.6.** Sia  $\mathbf{P} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie elementare, e sia  $R = \mathbf{P}(Q)$  una regione semplice. Allora  $R$  è rettificabile e

$$A(R) = \iint_Q \|\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v\| \, dudv.$$

Utilizziamo la prima forma fondamentale per riscrivere la formula che dà l'area; ricordando che, se  $\mathbf{w}_1$  e  $\mathbf{w}_2$  sono vettori di  $\mathbb{R}^3$  allora

$$\|\mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{w}_2\|^2 = \det \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 \\ \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2 \end{bmatrix}$$

otteniamo

$$\begin{aligned} A(R) &= \iint_Q \|\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v\| \, dudv = \\ &= \iint_Q \sqrt{\det \begin{bmatrix} \mathbf{P}_u \cdot \mathbf{P}_u & \mathbf{P}_u \cdot \mathbf{P}_v \\ \mathbf{P}_v \cdot \mathbf{P}_u & \mathbf{P}_v \cdot \mathbf{P}_v \end{bmatrix}} \, dudv = \iint \sqrt{\det G} \, dudv. \end{aligned}$$

**Esempio 2.2.7.** Calcoliamo l'area della sfera di raggio unitario; una semisfera di raggio unitario (poli esclusi) è una superficie elementare parametrizzata nel modo seguente:

$$\begin{cases} x = \cos u \cos v \\ y = \cos u \sin v \\ z = \sin u \end{cases} \quad u \in (-\pi/2, \pi/2) \quad v \in [-\pi/2, \pi/2]$$

$$\mathbf{P}_u = \begin{bmatrix} -\sin u \cos v \\ -\sin u \sin v \\ \cos u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_v = \begin{bmatrix} -\cos u \sin v \\ \cos u \cos v \\ 0 \end{bmatrix}$$

E quindi la prima forma fondamentale è

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 u \end{bmatrix}$$

e il suo determinante è quindi  $\cos^2 u$ ;

Sia  $Q = [-\pi/2 + \varepsilon, \pi/2 - \varepsilon] \times [-\pi/2, \pi/2]$  e sia  $R$  la regione semplice  $\mathbf{P}(Q)$ ; l'area di tale regione è

$$A(S) = \iint_Q \sqrt{\det G} \, dudv = \pi \int_{-\pi/2+\varepsilon}^{\pi/2-\varepsilon} |\cos u| \, du = 2\pi \cos \varepsilon.$$

Al tendere di  $\varepsilon$  a zero troviamo che l'area della semisfera è  $2\pi$ , e quindi l'area della sfera di raggio unitario è  $4\pi$ .

### 2.3 APPLICAZIONI TRA SUPERFICI

Per poter definire le nozioni di funzione e applicazione differenziabile definite su una superficie, è necessario prima studiare la relazione che intercorre tra due parametrizzazioni locali i cui sostegni abbiano intersezione non vuota. Utilizzeremo il seguente risultato (Teorema della funzione inversa) dall'analisi di funzioni in più variabili:

**Teorema 2.3.1.** *Sia  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione liscia, con  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ ; sia  $\mathbf{x} \in \Omega$  tale che  $J(F)(\mathbf{x})$  sia invertibile. Allora esistono aperti  $\mathbf{x} \in U \subset \Omega$  e  $F(\mathbf{x}) \in V \subset \mathbb{R}^n$  tali che  $F|_U : U \rightarrow V$  sia un diffeomorfismo liscio.*

**Teorema 2.3.2.** *Sia  $S$  una superficie, e siano  $\mathbf{P}_\alpha : \Omega_\alpha \rightarrow S, \mathbf{P}_\beta : \Omega_\beta \rightarrow S$  due parametrizzazioni locali tali che  $\mathbf{P}_\alpha(\Omega_\alpha) \cap \mathbf{P}_\beta(\Omega_\beta) = W \neq \emptyset$ . Allora l'applicazione  $\mathbf{P}_{\beta\alpha} := \mathbf{P}_\beta^{-1} \circ \mathbf{P}_\alpha : \mathbf{P}_\alpha^{-1}(W) \rightarrow \mathbf{P}_\beta^{-1}(W)$  è un diffeomorfismo liscio.*

**Dim.** L'applicazione  $\mathbf{P}_{\beta\alpha}$  è un omeomorfismo, in quanto composizione di omeomorfismi; dobbiamo dimostrare che lei e la sua inversa sono di classe  $C^\infty$ .

Sia  $\bar{\mathbf{u}}_0 = (\bar{u}_0, \bar{v}_0) \in \mathbf{P}_\alpha^{-1}(W)$ ,  $p = \mathbf{P}_\alpha(\bar{\mathbf{u}}_0)$ ,  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{P}_{\beta\alpha}(\bar{\mathbf{u}}_0)$ .

Sappiamo che lo Jacobiano di  $\mathbf{P}_\beta$  ha rango massimo in  $\mathbf{u}_0$ ; a meno di scambiare la coordinate in  $\mathbb{R}^3$  possiamo assumere che

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(\mathbf{u}_0) \neq 0.$$

Consideriamo l'applicazione  $\mathbf{F} : \Omega_\beta \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita ponendo  $\mathbf{F}(u, v, t) = \mathbf{P}_\beta(u, v) + (0, 0, t)$ . Tale applicazione è evidentemente liscia e, ristretta a  $\Omega_\beta \times \{0\}$

coincide con  $\mathbf{P}_\beta$ . Inoltre il determinante dello Jacobiano di  $\mathbf{F}$  in  $(\mathbf{u}_0, 0)$  è

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(\mathbf{u}_0, 0) & \frac{\partial x}{\partial v}(\mathbf{u}_0, 0) & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u}(\mathbf{u}_0, 0) & \frac{\partial y}{\partial v}(\mathbf{u}_0, 0) & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u}(\mathbf{u}_0, 0) & \frac{\partial z}{\partial v}(\mathbf{u}_0, 0) & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(\mathbf{u}_0) \neq 0.$$

Pertanto, per il Teorema (2.3.1),  $\mathbf{F}$  è invertibile in un intorno di  $(\mathbf{u}_0, 0)$  e la funzione inversa  $\mathbf{F}^{-1}$  è liscia.

Osservando che  $\mathbf{F}^{-1} \circ \mathbf{P}_\alpha = (\mathbf{P}_{\beta\alpha}, 0)$  in un intorno di  $\bar{\mathbf{u}}_0$  concludiamo che  $\mathbf{P}_{\beta\alpha}$  è liscia. Ripetendo il ragionamento scambiando  $\beta$  e  $\alpha$  otteniamo che anche  $\mathbf{P}_{\alpha\beta} = \mathbf{P}_{\beta\alpha}^{-1}$  è una funzione liscia, e quindi  $\mathbf{P}_{\beta\alpha}$  è un diffeomorfismo.  $\square$

**Definizione 2.3.3.** Sia  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie, e  $p \in S$ . Una funzione  $F : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  è liscia in  $p$  se, data una parametrizzazione locale  $\mathbf{P}_\alpha : \Omega_\alpha \rightarrow S$  tale che  $p \in \mathbf{P}_\alpha(\Omega_\alpha)$ , la funzione  $F_\alpha := F \circ \mathbf{P}_\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  è liscia in  $\mathbf{P}_\alpha^{-1}(p)$ .

**Osservazione 2.3.4.** La definizione è ben posta: se  $\mathbf{P}_\beta : \Omega_\beta \rightarrow S$  è un'altra parametrizzazione locale in  $p$ , allora  $f_\beta := f \circ \mathbf{P}_\beta = f \circ (\mathbf{P}_\alpha \circ \mathbf{P}_\alpha^{-1}) \circ \mathbf{P}_\beta = f_\alpha \circ \mathbf{P}_{\alpha\beta}$  è liscia in quanto composizione di funzioni lisce.

**Definizione 2.3.5.** Se  $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$  sono due superfici, diremo che una applicazione  $F : S_1 \rightarrow S_2$  è liscia in  $p \in S_1$  se, date due parametrizzazioni locali  $\mathbf{P}_\alpha : \Omega_\alpha \rightarrow S_1$  e  $\mathbf{Q}_a : \Omega_a \rightarrow S_2$  tali che  $p \in \mathbf{P}_\alpha(\Omega_\alpha)$  e  $F(p) \in \mathbf{Q}_a(\Omega_a)$  la funzione  $F_{a\alpha} := \mathbf{Q}_a^{-1} \circ F \circ \mathbf{P}_\alpha$  è liscia in  $\mathbf{P}_\alpha^{-1}(p)$ . Tale funzione è detta espressione locale di  $F$  nelle parametrizzazioni  $\mathbf{P}_\alpha$  e  $\mathbf{Q}_a$ . Se inoltre  $F$  è invertibile con inversa liscia, diremo che  $F$  è un diffeomorfismo.

**Osservazione 2.3.6.** Anche in questo caso la definizione è ben posta. Infatti è semplice verificare che la relazione tra due diverse espressioni locali di  $F$  è la seguente:

$$F_{b\beta} = \mathbf{Q}_{ba} \circ F_{a\alpha} \circ \mathbf{P}_{\alpha\beta}. \quad (2.3.7)$$

**Definizione 2.3.8.** Data un'applicazione liscia  $F : S_1 \rightarrow S_2$  tra due superfici, e un punto  $p \in S_1$  il differenziale di  $F$  in  $p$  è l'applicazione lineare  $d_p F : T_p S_1 \rightarrow T_{F(p)} S_2$  definita nel modo seguente: scelta una parametrizzazione locale  $\mathbf{P}_\alpha$  di  $S_1$  in  $p$  e una parametrizzazione locale  $\mathbf{Q}_a$  di  $S_2$  in  $F(p)$ ,  $d_p F$  è l'applicazione lineare la cui matrice rispetto alle basi  $\{(\mathbf{P}_\alpha)_u, (\mathbf{P}_\alpha)_v\}$  e  $\{(\mathbf{Q}_a)_u, (\mathbf{Q}_a)_v\}$  è la matrice jacobiana dell'espressione locale  $F_{a\alpha}$ .

**Osservazione 2.3.9.** Si può mostrare che la definizione è ben posta, utilizzando la (2.3.7); non lo faremo, perché ciò seguirà dalla definizione e dalle proprietà del differenziale di un'applicazione tra varietà differenziabili, nella sezione 3.5.

**Osservazione 2.3.10.** Data una curva  $\gamma$  sulla superficie  $S_1$ , passante per  $p$ , allora il differenziale di  $F$  manda il vettore tangente a  $\gamma$  in  $p$  nel vettore tangente a  $F \circ \gamma$  in  $F(p)$ .

**Definizione 2.3.11.** Un'isometria tra due superfici elementari  $S_1$  e  $S_2$  è un diffeomorfismo liscio  $F : S_1 \rightarrow S_2$  tale che, indicate con  $I_1$  ed  $I_2$  le prime forme fondamentali di  $S_1$  ed  $S_2$  si abbia  $I_2(d_p F(\mathbf{v}), d_p F(\mathbf{w})) = I_1(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  per ogni  $p \in S_1$  e per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p S_1$ .

**Osservazione 2.3.12.** Se una quantità o un oggetto definiti su una superficie non dipendono dalla parametrizzazione, e dipendono solo dalla prima forma fondamentale, allora essi sono invarianti per isometrie.

Sia  $F : S_1 \rightarrow S_2$  un'isometria, e siano  $\mathbf{P}_\alpha, \mathbf{Q}_\alpha$  parametrizzazioni locali di  $S_1$  ed  $S_2$  in  $p$  ed  $F(p)$  rispettivamente. Siano  $G_1$  e  $G_2$  le matrici della prima forma fondamentale di  $S_1$  ed  $S_2$  nelle parametrizzazioni considerate. allora

$$G_1 = J(F_{\alpha\alpha})^T G_2 J(F_{\alpha\alpha}).$$

**Definizione 2.3.13.** Date due superfici  $S_1$  ed  $S_2$ , un aperto  $U$  di  $S_1$  e un aperto  $V$  di  $S_2$ , un'isometria  $F : U \rightarrow V$  è detta *isometria locale*. Se per ogni punto  $p \in S_1$  esistono un intorno  $U$  di  $p$ , un aperto  $V$  di  $S_2$  e un'isometria locale  $F : U \rightarrow V$ , allora si dice che  $S_1$  è localmente isometrica a  $S_2$ .

**Esempio 2.3.14.** Il catenoide è localmente isometrico all'elicoide. Dato un punto del catenoide, questo giace nell'immagine della superficie elementare  $\mathbf{P} : \Omega_1 = \mathbb{R} \times J \rightarrow \mathbb{R}^3$  data da

$$\begin{cases} x = \cosh U \cos V \\ y = \cosh U \sin V \\ z = U \end{cases},$$

con  $J = (-\pi, \pi)$  oppure  $(0, 2\pi)$ .

Calcoliamo la prima forma fondamentale di tale superficie elementare

$$\mathbf{P}_U = \begin{bmatrix} \sinh U \cos V \\ \sinh U \sin V \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_V = \begin{bmatrix} -\cosh U \sin V \\ \cosh U \cos V \\ 0 \end{bmatrix},$$

e quindi

$$G_1 = \begin{bmatrix} \cosh^2 U & 0 \\ 0 & \cosh^2 U \end{bmatrix}$$



Calcoliamo la prima forma fondamentale dell' *elicoide*, definito dalla mappa  $\mathbf{Q} : \Omega_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , come al punto 3. dell'esempio (2.1.11).

$$\mathbf{Q}_u = \begin{bmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_v = \begin{bmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \\ 1 \end{bmatrix}$$

e quindi

$$G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + u^2 \end{bmatrix}.$$

Consideriamo la mappa  $\vartheta : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  data da

$$\begin{cases} u = \sinh U \\ v = V \end{cases};$$

tale mappa è un diffeomorfismo liscio sull'immagine, ed induce un diffeomorfismo tra  $\mathbf{P}(\Omega_1)$  e  $\mathbf{Q}(\vartheta(\Omega_1))$ . Lo Jacobiano di  $\vartheta$  è dato da

$$J_\vartheta = \begin{bmatrix} \cosh U & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

possiamo calcolare

$$J_\vartheta^T G_2 J_\vartheta = \begin{bmatrix} \cosh U & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + u^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh U & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh^2 U & 0 \\ 0 & \cosh^2 U \end{bmatrix} = G_1$$

Abbiamo dunque mostrato che il catenoide è localmente isometrico all'elicoide.

**Esempio 2.3.15.** Sia  $\mathbf{P} : \Omega_1 = J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  un cilindro  $\mathbf{P}(U, V) = \gamma(U) + V\mathbf{L}$ , dove supponiamo che  $\gamma$  sia liscia, semplice, regolare, giaccia in un piano ortogonale ad  $\mathbf{L}$  e sia parametrizzata con il parametro naturale. Essendo  $\mathbf{P}_U = \gamma'$  e  $\mathbf{P}_V = \mathbf{L}$ , la matrice della prima forma fondamentale di  $\mathbf{P}$  è la matrice identica. Questo implica che il cilindro è localmente isometrico al piano; infatti basta definire  $\mathbf{Q} : \Omega_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  come  $x = u, y = v, z = 0$  – considerare cioè il piano  $z = 0$  come superficie elementare – e prendere come diffeomorfismo quello indotto dall'inclusione  $\vartheta : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ .

**Esempio 2.3.16.** Sia  $\mathbf{P} : \Omega_1 = J \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$  un cono  $\mathbf{P}(U, V) = V\gamma(U)$ , dove supponiamo che  $\gamma$  sia liscia, regolare, semplice, giaccia in una semisfera aperta di raggio uno contenente l'origine (e quindi tale che non ci siano tangenti o secanti di  $\gamma$  che passano per l'origine) e sia parametrizzata con parametro naturale. Poiché  $\mathbf{P}_U = V\gamma'$  e  $\mathbf{P}_V = \gamma$  si ha:

$$G_1 = \begin{bmatrix} V^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sia  $Q : \Omega_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  il piano  $z = 0$ , parametrizzato come  $x = u$  e  $y = v$ . Consideriamo la mappa  $\vartheta : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  data da

$$\begin{cases} u = V \cos U \\ v = V \sin U \end{cases} ;$$

Lo Jacobiano di  $\vartheta$  è dato da

$$J_\vartheta = \begin{bmatrix} -V \sin U & \cos U \\ V \cos U & \sin U \end{bmatrix},$$

quindi tale mappa è un diffeomorfismo liscio sull'immagine.

$$J_\vartheta^T G_1 J_\vartheta = \begin{bmatrix} -V \sin U & V \cos U \\ \cos U & \sin U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -V \sin U & \cos U \\ V \cos U & \sin U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = G_2$$

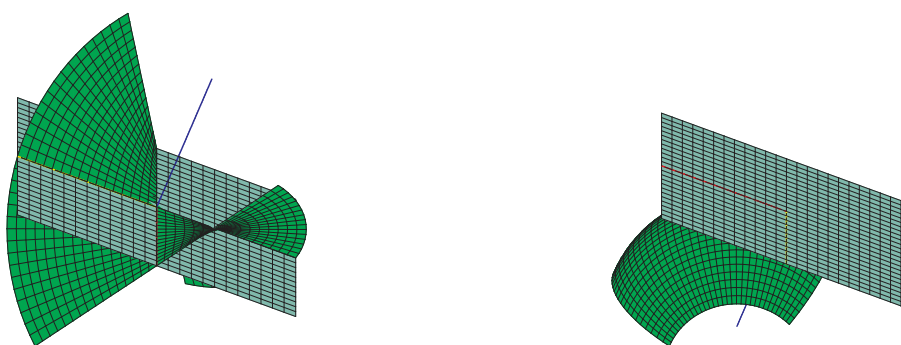
Abbiamo dunque mostrato che il cono considerato è localmente isometrico al piano.

2.4 SECONDA FORMA FONDAMENTALE

Sia  $\mathbf{P} : \Omega \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie elementare, sia  $\{\mathbf{P}_u, \mathbf{P}_v\}$  la base canonica per lo spazio tangente ad  $S$ , e sia  $\mathbf{N}$  il versore normale, definito come

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v}{\|\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v\|}.$$

**Definizione 2.4.1.** La *mappa di Gauss* o *mappa sferica* di  $S$  è l'applicazione  $\mathcal{S} : S \rightarrow \mathbb{S}^2$  che associa ad un punto della superficie il suo versore normale:  $\mathcal{S}(p) = \mathbf{N}_p S$ .



**Osservazione 2.4.2.** Il differenziale della mappa  $\mathcal{S}$  agisce nel modo seguente:

$$d_{\mathbf{P}(u,v)}\mathcal{S}(\mathbf{P}_u(u,v)) = \mathbf{N}_u(u,v) \quad d_{\mathbf{P}(u,v)}\mathcal{S}(\mathbf{P}_v(u,v)) = \mathbf{N}_v(u,v).$$

**Dim.** Sia  $\gamma : J \rightarrow \Omega \rightarrow S$  una curva differenziabile; il suo vettore tangente è dato da

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\mathbf{P}}(u(t), v(t)) = \mathbf{P}_u \dot{u} + \mathbf{P}_v \dot{v};$$

l'immagine di tale vettore tramite  $d\mathcal{S}$  è il vettore tangente alla curva  $\mathcal{S}(\gamma(t)) = \mathbf{N}(u(t), v(t))$ , cioè il vettore

$$\dot{\mathcal{S}}(\gamma(t)) = \dot{\mathbf{N}}(u(t), v(t)) = \mathbf{N}_u \dot{u} + \mathbf{N}_v \dot{v},$$

da cui la tesi. □

Osserviamo che, poiché  $\mathbf{N}$  è un versore, abbiamo che  $\mathbf{N}_u \cdot \mathbf{N} = \mathbf{N}_v \cdot \mathbf{N} = 0$ . In particolare segue che  $\mathbf{N}_u$  e  $\mathbf{N}_v$  sono contenuti nel sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$  generato da  $\mathbf{P}_u$  e  $\mathbf{P}_v$ . Pertanto, fissato un punto  $p$  di  $S$  possiamo considerare l'applicazione lineare  $L := -d_p \mathcal{S} : T_p S \rightarrow T_p S$ . Per quanto visto nell'Osservazione (2.4.2) avremo che

$$L(\mathbf{P}_u) = -\mathbf{N}_u \quad L(\mathbf{P}_v) = -\mathbf{N}_v$$

L'operatore lineare  $L$  prende il nome di *operatore di Weingarten*. Denoteremo con  $X = [x_{ij}]$  la matrice di tale operatore rispetto alla base  $\{\mathbf{P}_u, \mathbf{P}_v\}$ .

**Osservazione 2.4.3.** Sia  $\vartheta : \Omega' \rightarrow \Omega$  una riparametrizzazione di  $\mathbf{P}$  che conserva l'orientazione; la mappa di Gauss, e quindi l'operatore di Weingarten di  $\mathbf{Q} = \mathbf{P} \circ \vartheta$  coincide con quello di  $\mathbf{P}$ . Se invece  $\vartheta : \Omega' \rightarrow \Omega$  è una riparametrizzazione di  $\mathbf{P}$  che inverte l'orientazione, la mappa di Gauss di  $\mathbf{Q}$  è l'opposta di quello di  $\mathbf{P}$ , e quindi lo stesso accade per l'operatore di Weingarten.

**Proposizione 2.4.4.** L'endomorfismo  $L$  è autoaggiunto rispetto alla prima forma fondamentale, cioè,  $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p S$  si ha

$$I(L(\mathbf{v}), \mathbf{w}) = I(\mathbf{v}, L(\mathbf{w})).$$

**Dim.** Per la linearità di  $L$  ed  $I$  è sufficiente mostrare l'asserto per una base di  $T_p S$ . Utilizziamo la base  $\{\mathbf{P}_u, \mathbf{P}_v\}$ . Per la simmetria di  $I$  ci basta mostrare che

$$I(L(\mathbf{P}_u), \mathbf{P}_v) = I(\mathbf{P}_u, L(\mathbf{P}_v)),$$

cioè che

$$I(-\mathbf{N}_u, \mathbf{P}_v) = I(\mathbf{P}_u, -\mathbf{N}_v);$$

essendo la prima forma fondamentale la restrizione del prodotto scalare di  $\mathbb{R}^3$  dobbiamo provare che

$$\mathbf{N}_u \cdot \mathbf{P}_v = \mathbf{N}_v \cdot \mathbf{P}_u.$$

Ricordiamo che  $\mathbf{N} \cdot \mathbf{P}_u = 0 = \mathbf{N} \cdot \mathbf{P}_v$  e deriviamo la prima uguaglianza rispetto a  $v$  e la seconda rispetto a  $u$ , ottenendo

$$\mathbf{N}_v \cdot \mathbf{P}_u = -\mathbf{N} \cdot \mathbf{P}_{uv}$$

$$\mathbf{N}_u \cdot \mathbf{P}_v = -\mathbf{N} \cdot \mathbf{P}_{uv}$$

e da qui la tesi. □

**Corollario 2.4.5.** Ponendo  $II(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = I(L(\mathbf{v}), \mathbf{w})$  si ottiene una forma bilineare simmetrica, detta seconda forma fondamentale.

Sia  $B = [b_{ij}]$  la matrice associata a tale forma rispetto alla base  $\{\mathbf{P}_u, \mathbf{P}_v\}$ . Si ha

$$\mathbf{v}^T B \mathbf{w} = II(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = I(L(\mathbf{v}), \mathbf{w}) = I(\mathbf{v}, L(\mathbf{w})) = I(\mathbf{v}, X \mathbf{w}) = \mathbf{v}^T G X \mathbf{w}$$

e quindi

$$\begin{bmatrix} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \end{bmatrix}. \quad (2.4.6)$$

**Calcolo di  $B$  e di  $X$ :** Per definizione i coefficienti  $b_{ij}$  si ottengono come

$$b_{ij} = II(\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_j) = I(L(\mathbf{P}_i), \mathbf{P}_j) = -\mathbf{N}_i \cdot \mathbf{P}_j;$$

derivando l'espressione  $\mathbf{N} \cdot \mathbf{P}_j = 0$  troviamo che  $\mathbf{P}_{ij} \cdot \mathbf{N} = -\mathbf{N}_i \cdot \mathbf{P}_j$ , e quindi

$$b_{ij} = \mathbf{P}_{ij} \cdot \mathbf{N} \quad (2.4.7)$$

Una volta calcolata la matrice  $B$  la matrice  $X$  si ottiene utilizzando la (2.4.6), cioè

$$\begin{bmatrix} X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \end{bmatrix}. \quad (2.4.8)$$

**Esempi 2.4.9. Calcolo di  $B$  ed  $X$ .**

1. Il *catenoide* ha equazioni

$$\begin{cases} x = \cosh u \cos v \\ y = \cosh u \sin v \\ z = u \end{cases}.$$

La base canonica per lo spazio tangente è data da

$$\mathbf{P}_u = \begin{bmatrix} \sinh u \cos v \\ \sinh u \sin v \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_v = \begin{bmatrix} -\cosh u \sin v \\ \cosh u \cos v \\ 0 \end{bmatrix}$$

e il versore normale è

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v}{\|\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v\|} = \begin{bmatrix} -\cos v \\ -\sin v \\ \sinh u \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\cosh u}$$

Calcoliamo le derivate seconde

$$\mathbf{P}_{uu} = \begin{bmatrix} \cosh u \cos v \\ \cosh u \sin v \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_{uv} = \begin{bmatrix} -\sinh u \sin v \\ \sinh u \cos v \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_{vv} = \begin{bmatrix} -\cosh u \cos v \\ -\cosh u \sin v \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quindi, dalla formula  $b_{ij} = \mathbf{P}_{ij} \cdot \mathbf{N}$  otteniamo

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ricordando che la matrice della prima forma fondamentale è

$$G = \begin{bmatrix} \cosh^2 u & 0 \\ 0 & \cosh^2 u \end{bmatrix},$$

otteniamo

$$X = \begin{bmatrix} 1/\cosh^2 u & 0 \\ 0 & 1/\cosh^2 u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\cosh^2 u & 0 \\ 0 & 1/\cosh^2 u \end{bmatrix}.$$

2. L'elicoide ha equazioni

$$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = v \end{cases}$$

e quindi la base canonica dello spazio tangente è data da

$$\mathbf{P}_u = \begin{bmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_v = \begin{bmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il versore normale è

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v}{\|\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v\|} = \begin{bmatrix} \sin v \\ -\cos v \\ u \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Calcoliamo le derivate seconde

$$\mathbf{P}_{uu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_{uv} = \begin{bmatrix} -\sin v \\ \cos v \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_{vv} = \begin{bmatrix} -u \cos v \\ -u \sin v \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi, dalla formula  $b_{ij} = \mathbf{P}_{ij} \cdot \mathbf{N}$  otteniamo

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Ricordando che la matrice della prima forma fondamentale è

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+u^2 \end{bmatrix},$$

otteniamo

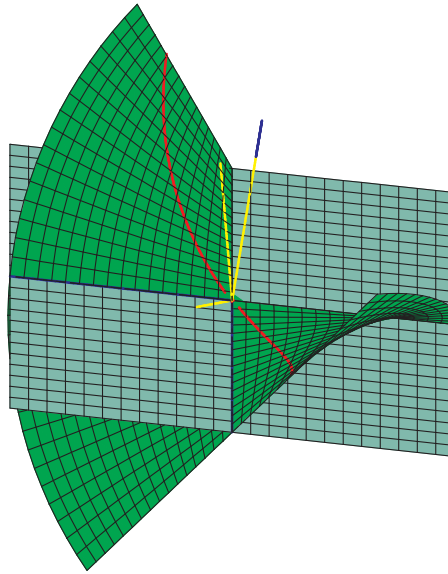
$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/(1+u^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{1+u^2} \\ -1/\sqrt{1+u^2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{1+u^2} \\ -1/(1+u^2)^{3/2} & 0 \end{bmatrix}.$$

2.5 CURVATURA NORMALE - CURVATURE PRINCIPALI

Sia  $\mathbf{P} : \Omega \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie elementare di sostegno  $S$ , sia  $\{\mathbf{P}_u, \mathbf{P}_v\}$  la base canonica per lo spazio vettoriale tangente ad  $S$ , e sia  $\mathbf{N}$  il versore normale. Sia  $\gamma : J \rightarrow \Omega \rightarrow S$  una curva su  $S$ , con parametrizzazione naturale, e sia  $\mathbf{k} = \kappa \mathbf{n}$  il vettore curvatura di  $\gamma$ . Consideriamo la componente di tale vettore sulla direzione normale ad  $S$ :

$$k_n := \mathbf{k} \cdot \mathbf{N}$$

Tale componente è detta *curvatura normale* di  $\gamma$ .



**Proposizione 2.5.1.** *La curvatura normale di  $\gamma$  in  $\mathbf{P}(u(s), v(s))$  dipende solo dalla direzione del vettore tangente a  $\gamma$  in tale punto; più precisamente si ha:*

$$k_n(s) = II(\mathbf{t}_\gamma(s), \mathbf{t}_\gamma(s)).$$

**Dim.** Le equazioni di  $\gamma$  sono  $\gamma(s) = \mathbf{P}(u(s), v(s))$ , quindi

$$\mathbf{t}_\gamma = \gamma'(s) = \mathbf{P}_u u' + \mathbf{P}_v v';$$

le componenti di  $\mathbf{t}_\gamma$  sulla base canonica dello spazio tangente sono pertanto  $(u', v')$ . Il vettore curvatura di  $\gamma$  è

$$\mathbf{k} = \gamma''(s) = \mathbf{P}_u u'' + \mathbf{P}_v v'' + \mathbf{P}_{uu} u'^2 + 2\mathbf{P}_{uv} u'v' + \mathbf{P}_{vv} v'^2;$$

la sua componente normale è perciò

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{N} = b_{11}u'^2 + 2b_{12}u'v' + b_{22}v'^2 = II(\mathbf{t}_\gamma, \mathbf{t}_\gamma).$$

e abbiamo mostrato la tesi. □

**Osservazione 2.5.2.** Se la curva  $\gamma$  non è parametrizzata con il parametro naturale, osservando che  $\dot{\gamma} = \|\dot{\gamma}\| \mathbf{t}_\gamma$ , per la bilinearità della seconda forma fondamentale troviamo:

$$II(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = \|\dot{\gamma}\|^2 II(\mathbf{t}_\gamma, \mathbf{t}_\gamma) = \|\dot{\gamma}\|^2 k_n,$$

e quindi

$$k_n(t) = \frac{II(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))}{I(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))}.$$

**Osservazione 2.5.3.** Sia  $p$  un punto di  $S$ ; un piano normale ad  $S$  in  $p$  è un piano  $H$  nel fascio che contiene la retta normale ad  $S$  passante per  $p$ ; un tale piano è individuato da una direzione tangente a  $S$  in  $p$ . La curva  $H \cap S$ , con parametro naturale, è detta *sezione normale* di  $S$ ; per una tale curva (piana) si ha  $\mathbf{n} = \pm \mathbf{N}$  nel punto  $p$ . Quindi la curvatura normale di una sezione normale è in modulo uguale alla curvatura della curva, e ha segno positivo o negativo a seconda che  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{N}$  siano o meno equiversi.

Quindi ad ogni direzione tangente abbiamo associato una curvatura, la *curvatura normale*, che ha il significato geometrico di essere (a meno del segno) la curvatura della sezione normale corrispondente a tale direzione tangente.

Abbiamo visto come ad ogni vettore tangente ad  $S$  in  $p$  sia possibile associare la curvatura normale; considerando l'insieme dei versori tangenti a  $S$  in  $p$ , parametrizzabile con una circonferenza, risulta così definita una funzione

$$k_n : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$$

che ad ogni versore tangente  $\mathbf{e}$  associa la sua curvatura normale:  $k_n(\mathbf{e}) = II(\mathbf{e}, \mathbf{e})$ ; evidentemente per tale funzione si ha  $k_n(\mathbf{e}) = k_n(-\mathbf{e})$ .

**Definizione 2.5.4.** Un punto della superficie elementare si dice *umbilico* o *ombelicale* se l'applicazione  $k_n$  è costante; il punto si dice *piatto* se l'applicazione  $k_n$  è l'applicazione nulla.

Poiché  $\mathbf{S}^1$  è compatto,  $k_n$  assume massimo e minimo e, in un punto non umbilico tali valori sono distinti.

**Teorema 2.5.5.** Se  $p$  è un punto umbilico con curvatura normale  $k$  allora  $L$  è un'omotetia di fattore  $k$ ; se  $p$  non è un punto umbilico i valori di massimo e di minimo della curvatura normale sono gli autovalori di  $L$ , e vengono assunti nelle direzioni degli autovettori di  $L$ .

**Dim.** Sia  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  una base ortonormale di  $T_p S$  tale che  $k_n(\mathbf{e}_1) = k_1$  sia massimo; siano poi  $k_2 = k_n(\mathbf{e}_2) = II(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)$ ,  $k_{12} = II(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  e  $\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_1 \cos \theta + \mathbf{e}_2 \sin \theta$ .

Dalla bilinearità della seconda forma fondamentale abbiamo che:

$$k_n(\mathbf{e}_\theta) = II(\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\theta) = k_1 \cos^2 \theta + 2k_{12} \sin \theta \cos \theta + k_2 \sin^2 \theta$$



Calcoliamo la derivata rispetto a  $\theta$ :

$$(k_n)_\theta = 2 \cos \theta \sin \theta (k_2 - k_1) + 2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) k_{12};$$

dall'annullarsi di tale derivata in  $\theta = 0$  otteniamo  $k_{12} = 0$ .

Inoltre, se  $k_1 \neq k_2$  vediamo anche che la derivata si annulla solo in multipli di  $\pi/2$ , perciò  $k_2 = k_n(\pi/2)$  è il valore di minimo (ricordiamo che  $k_n(\theta)$  è periodica di periodo  $\pi$ ).

Poiché  $0 = k_{12} = I(L(\mathbf{e}_1), \mathbf{e}_2) = I(\mathbf{e}_1, L(\mathbf{e}_2))$  abbiamo che  $\mathbf{e}_1$  ed  $\mathbf{e}_2$  sono autovettori per  $L$ . Sia  $L(\mathbf{e}_i) = \lambda_i \mathbf{e}_i$ ; allora

$$\lambda_i = I(L(\mathbf{e}_i), \mathbf{e}_i) = II(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = k_i,$$

concludendo la dimostrazione. Infatti, se il punto è umbilico, da  $L(\mathbf{e}_1) = k\mathbf{e}_1$  e  $L(\mathbf{e}_2) = k\mathbf{e}_2$  otteniamo  $L(\mathbf{v}) = k\mathbf{v}$  per ogni  $\mathbf{v}$ .  $\square$

**Proposizione 2.5.6.** *Sia  $\mathbf{P} : \Omega \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie elementare tale che tutti i suoi punti sono umbilici. Allora il supporto di  $S$  è una parte di piano o una parte di sfera.*

**Dim.** Sappiamo che, per ogni punto  $p$  di  $S = \mathbf{P}(\Omega)$  esiste  $k_p$  tale che  $L_p(\mathbf{v}) = k_p \mathbf{v}$ ; in particolare avremo che

$$-\mathbf{N}_u = k_p \mathbf{P}_u \quad -\mathbf{N}_v = k_p \mathbf{P}_v; \quad (2.5.7)$$

derivando la prima uguaglianza rispetto a  $v$ , la seconda rispetto ad  $u$  e sottraendo la seconda dalla prima, troviamo

$$0 = (k_p)_v \mathbf{P}_u - (k_p)_u \mathbf{P}_v;$$

dall'indipendenza lineare di  $\mathbf{P}_u$  e  $\mathbf{P}_v$  otteniamo  $(k_p)_v = (k_p)_u = 0$ , e quindi  $k_p = k$  è costante.

Supponiamo che  $k = 0$ . Dalle (2.5.7) otteniamo  $\mathbf{N}_u \equiv \mathbf{N}_v \equiv 0$  e quindi  $\mathbf{N}(u, v) = \bar{\mathbf{N}}$  è costante. Ne segue che  $(\mathbf{P} \cdot \mathbf{N})_u = \mathbf{P}_u \cdot \mathbf{N} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{N}_u = 0$  e analogamente che  $(\mathbf{P} \cdot \mathbf{N})_v = 0$  e quindi anche  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{N}$  è costante. Pertanto, se  $\bar{\mathbf{P}}$  è un qualsiasi punto di  $S$  si ha

$$(\mathbf{P}(u, v) - \bar{\mathbf{P}}) \cdot \bar{\mathbf{N}} = 0,$$

che è l'equazione di un piano.

Supponiamo ora che  $k \neq 0$ , e consideriamo la funzione  $\mathbf{C}(u, v) = \mathbf{P} + \frac{1}{k} \mathbf{N}$ ; è immediato vedere che le sue derivate parziali sono nulle, e che quindi tale funzione è costante. Pertanto

$$\|\mathbf{P}(u, v) - \bar{\mathbf{C}}\| = \frac{1}{k}.$$

e quindi  $S$  è contenuta nella sfera di centro  $\bar{\mathbf{C}}$  e raggio  $1/k$ .  $\square$

**Definizione 2.5.8.** Sia  $p \in S$  un punto non umbilico; i valori  $k_1$  e  $k_2$  di massimo e di minimo sono detti *curvature principali* di  $S$  in  $p$  e le direzioni corrispondenti sono dette *direzioni principali* di  $S$  in  $p$ .

**Osservazione 2.5.9.** Se  $\vartheta : \Omega' \rightarrow \Omega$  è una riparametrizzazione di  $\mathbf{P}$  che conserva l'orientazione allora la seconda forma fondamentale di  $\mathbf{Q} = \mathbf{P} \circ \vartheta$  è la stessa di  $\mathbf{P}$ , mentre, se  $\vartheta : \Omega' \rightarrow \Omega$  è una riparametrizzazione di  $\mathbf{P}$  che inverte l'orientazione la seconda forma fondamentale di  $\mathbf{Q}$  è l'opposto di quella di  $\mathbf{P}$ . Di conseguenza le curvature normali e quelle principali sono definite a meno di un segno, mentre le direzioni principali, l'umbilicità o la piatezza di un punto non dipendono dalla parametrizzazione.

## 2.6 CURVATURA DI GAUSS

Dal Teorema (2.5.5) segue che il prodotto delle curvature principali è uguale al determinante della matrice  $X$ .

**Definizione 2.6.1.** La funzione  $K(u, v) = \det X(u, v)$  è detta *curvatura di Gauss*.

**Osservazione 2.6.2.** Se  $\vartheta : \Omega' \rightarrow \Omega$  è una riparametrizzazione di  $\mathbf{P}$ , allora, per l'osservazione (2.5.9) le curvature principali nella parametrizzazione  $\mathbf{P}$  sono le stesse o sono opposte a quelle nella parametrizzazione  $\mathbf{Q}$ . Segue che la curvatura di Gauss non dipende dalla parametrizzazione.

**Definizione 2.6.3.** Sia  $\mathbf{P} : \Omega \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie e  $p$  un suo punto non piatto. Il punto  $p$  si dice

- *Ellittico*, se  $K(p) > 0$ .
- *Iperbolico*, se  $K(p) < 0$ .
- *Parabolico*, se  $K(p) = 0$ .

Osserviamo che  $\det B = \det(GX) = \det G \det X$ ; pertanto, essendo  $\det G > 0$ , possiamo leggere la natura dei punti dal segno del determinante di  $B$ :

- *Ellittico*, se  $\det B(p) > 0$ .
- *Iperbolico*, se  $\det B(p) < 0$ .
- *Parabolico*, se  $\det B(p) = 0$ .

**Proposizione 2.6.4.** Sia  $S$  una superficie, e sia  $p$  un punto ellittico; allora esiste un intorno  $U$  di  $p$  in  $S$  tale che tutti i punti di  $U$  stanno in uno dei semispazi chiusi individuati dal piano tangente  $\mathbb{T}_p S$ . Sia  $p$  un punto iperbolico; allora per ogni intorno  $U$  di  $p$  ci sono punti di  $U$  in entrambi i semispazi aperti individuati dal piano tangente  $\mathbb{T}_p S$ .

**Dim.** Scegliamo una parametrizzazione  $\mathbf{P} : \Omega \rightarrow S$  di  $S$  in un intorno di  $p$ . Possiamo supporre che  $p$  sia l'origine, che  $(0, 0) \in \Omega$  e che  $p = \mathbf{P}(0, 0)$ ; sviluppiamo  $\mathbf{P}$  in serie di Taylor (per alleggerire la notazione soprallineiamo le quantità calcolate in  $(0, 0)$ )

$$\mathbf{P}(u, v) = \bar{\mathbf{P}}_u u + \bar{\mathbf{P}}_v v + \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{P}}_{uu}u^2 + 2\bar{\mathbf{P}}_{uv}uv + \bar{\mathbf{P}}_{vv}v^2) + o(u^2 + v^2)$$

La distanza con segno dal piano tangente è data dalla proiezione sul versore normale, e quindi

$$d(\mathbf{P}(u, v), \pi) = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{P}}_{uu}u^2 + 2\bar{\mathbf{P}}_{uv}uv + \bar{\mathbf{P}}_{vv}v^2) \cdot \mathbf{N} + o(u^2 + v^2)$$

ricordando che  $b_{ij} = \mathbf{P}_{ij} \cdot \mathbf{N}$  segue che

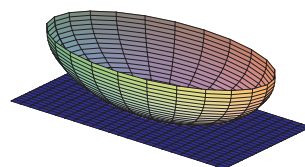
$$d(\mathbf{P}, \pi) = \frac{1}{2}(\bar{b}_{11}u^2 + 2\bar{b}_{12}uv + \bar{b}_{22}v^2) + o(u^2 + v^2);$$

posto  $w = u\bar{\mathbf{P}}_u + v\bar{\mathbf{P}}_v$  possiamo scrivere

$$d(\mathbf{P}, \pi) = \frac{1}{2}II(w, w) + o(u^2 + v^2);$$

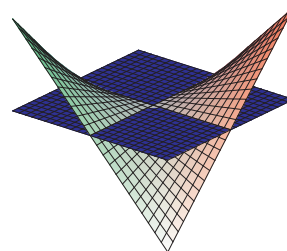
- **Punti ellittici:**

Le curvatures principali sono concordi, quindi il segno della seconda forma fondamentale non dipende dal vettore tangente e la distanza dal piano tangente non cambia di segno in un intorno del punto. Perciò in tale intorno la superficie rimane in uno dei semispazi chiusi individuati dal piano tangente, tagliandolo quest'ultimo solo nel punto di tangenza.



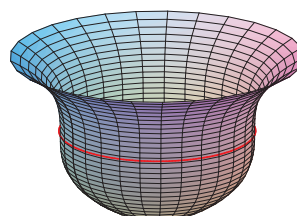
- **Punti iperbolici:**

Le curvatures principali sono discordi, quindi la seconda forma fondamentale ha segno diverso lungo le direzioni principali e la distanza dal piano tangente cambia di segno almeno due volte in qualsiasi intorno del punto. Perciò in qualsiasi intorno del punto la superficie si trova in entrambi i semispazi aperti individuati dal piano tangente.  $\square$

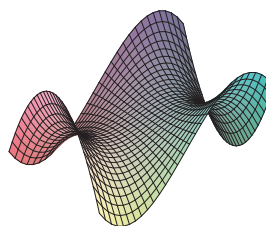
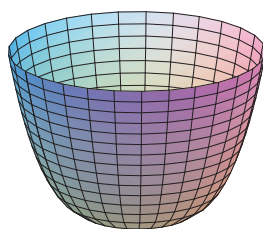


**Osservazione 2.6.5.** In un punto *parabolico* ci possono essere invece diversi comportamenti: la superficie può stare dalla stessa parte del piano tangente, come nel caso del cilindro, oppure no, ad esempio nei punti  $(0, v)$  della superficie elementare  $\mathbf{P} : (-1, 1) \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da

$$\begin{cases} x = (u^3 + 2) \cos v \\ y = (u^3 + 2) \sin v \\ z = u \end{cases} .$$



**Osservazione 2.6.6.** Anche in un punto *piatto* il comportamento della superficie rispetto al piano tangente può essere di diversi tipi: la superficie può stare dalla stessa parte del piano tangente, come nel caso del punto  $(0, 0, 0)$  della superficie  $z = x^4 + y^4$ , oppure no, ad esempio nel punto  $(0, 0, 0)$  della superficie  $z = x^3 - 3xy^2$  (la sella di scimmia).



**Esempi 2.6.7.**

a) Abbiamo visto che, per il catenoide

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\cosh^2 u} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cosh^2 u} \end{bmatrix}$$

Poiché la matrice è diagonale, le curvatures principali sono gli elementi della diagonale, e gli autovettori sono  $\mathbf{P}_u$  e  $\mathbf{P}_v$ .

$k_1$	$k_2$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$K$
$-\frac{1}{\cosh^2 u}$	$\frac{1}{\cosh^2 u}$	$[1, 0]$	$[0, 1]$	$-\frac{1}{\cosh^4 u}$

In particolare osserviamo che tutti i punti del catenoide sono iperbolici.

b) Abbiamo visto che per l'elicoide

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{(1+u^2)^3}} & 0 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è  $\lambda^2 - 1/(1+u^2)^2$ , e quindi si calcolano

$k_1$	$k_2$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$K$
$-\frac{1}{1+u^2}$	$\frac{1}{1+u^2}$	$[1, \sqrt{1+u^2}]$	$[1, -\sqrt{1+u^2}]$	$-\frac{1}{(1+u^2)^2}$

In particolare osserviamo che tutti i punti dell'elicoide sono iperbolici.

c) Vediamo più in generale il tipo di punti delle superfici elementare rigate, cioè delle superfici della forma  $\mathbf{P}(u, v) = \gamma(u) + v\mathbf{L}(u)$ . NON assumiamo che  $\mathbf{L}$  sia un versore. Calcoliamo

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_u &= \dot{\gamma} + v\dot{\mathbf{L}} \\ \mathbf{P}_v &= \mathbf{L} \\ \mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v &= \dot{\gamma} \wedge \mathbf{L} + v\dot{\mathbf{L}} \wedge \mathbf{L} \\ \mathbf{P}_{uu} &= \dots \\ \mathbf{P}_{uv} &= \dot{\mathbf{L}} \\ \mathbf{P}_{vv} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

e quindi  $b_{22} = 0$ . In particolare segue che  $\det B = -(b_{12})^2$ , e quindi i punti della superficie sono iperbolici o parabolici. I punti parabolici sono quelli in cui  $b_{12} = 0$ , cioè quelli in cui  $\dot{\mathbf{L}} \cdot \dot{\gamma} \wedge \mathbf{L} = 0$ . Vediamo ora una caratterizzazione delle superfici rigate che hanno solo punti parabolici.

**Proposizione 2.6.8.** *Per una superficie elementare rigata sono equivalenti*

1.  $\dot{\gamma}, \mathbf{L}, \dot{\mathbf{L}}$  sono linearmente dipendenti;
2.  $\mathbf{N}_v \equiv 0$ .

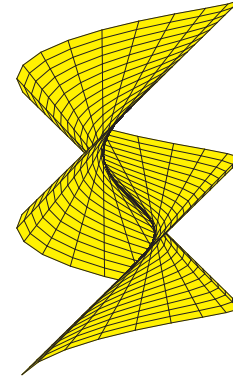
**Dim.** La condizione  $\mathbf{N}_v \equiv 0$  equivale al fatto che la direzione normale alla rigata non cambia lungo una retta della rigatura. La direzione normale è data da  $\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v = \dot{\gamma} \wedge \mathbf{L} + v\dot{\mathbf{L}} \wedge \mathbf{L}$ , e quindi tale direzione non dipende da  $v$  se e solo se  $\dot{\gamma} \wedge \mathbf{L}$  e  $\dot{\mathbf{L}} \wedge \mathbf{L}$  sono linearmente dipendenti; osservando che

$$(\dot{\gamma} \wedge \mathbf{L}) \wedge (\dot{\mathbf{L}} \wedge \mathbf{L}) = ((\dot{\mathbf{L}} \wedge \mathbf{L}) \cdot \dot{\gamma})\mathbf{L} - ((\dot{\mathbf{L}} \wedge \mathbf{L} \cdot \mathbf{L})\dot{\gamma} = ((\dot{\mathbf{L}} \wedge \mathbf{L}) \cdot \dot{\gamma})\mathbf{L}$$

segue la tesi. □

**Definizione 2.6.9.** Una superficie elementare rigata  $\mathbf{P}(u, v) = \gamma(u) + v\mathbf{L}(u)$  si dice *svilupicabile* se vale una delle condizioni della Proposizione (2.6.8).

E' immediato verificare che il cilindro ed il cono sono rigate svilupcabili. Un altro esempio di rigata svilupicabile è dato dalla rigata delle tangenti ad una curva. Se  $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una curva regolare liscia, la *rigata delle tangenti* a  $\gamma$  è la superficie elementare  $\mathbf{P} : J \times \mathbb{R}^+ (\mathbb{R}^-)$  definita da  $\mathbf{P}(u, v) = \gamma(u) + v\dot{\gamma}(u)$ . In figura vediamo la rigata delle tangenti ad un'elica cilindrica.



- d) Vediamo ora il tipo di punti delle superfici di rotazione. Sia  $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva contenuta nel piano  $y = 0$ , parametrizzata col parametro arco, di equazioni  $x = f(u), z = h(u), f' > 0$ . Poiché  $\gamma$  è parametrizzata con il parametro naturale abbiamo

$$f'^2 + h'^2 = 1$$

$$h''f' - h'f'' = \kappa.$$

Consideriamo la superficie ottenuta facendo ruotare tale curva attorno alla retta  $x = y = 0$ , che avrà equazioni

$$\begin{cases} x = f \cos v \\ y = f \sin v \\ z = h \end{cases} \quad (2.6.10)$$

La base canonica per lo spazio tangente è data da

$$\mathbf{P}_u = \begin{bmatrix} f' \cos v \\ f' \sin v \\ h' \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_v = \begin{bmatrix} -f \sin v \\ f \cos v \\ 0 \end{bmatrix}$$

e il versore normale è

$$\begin{bmatrix} -h' \cos v \\ -h' \sin v \\ f' \end{bmatrix}$$

La matrice della prima forma fondamentale è

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f^2 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo le derivate seconde

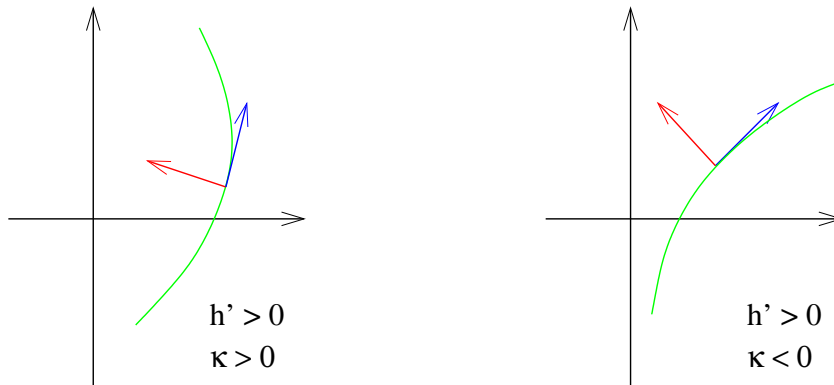
$$\mathbf{P}_{uu} = \begin{bmatrix} f'' \cos v \\ f'' \sin v \\ h'' \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_{uv} = \begin{bmatrix} -f' \sin v \\ f' \cos v \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_{vv} = \begin{bmatrix} -f \cos v \\ -f \sin v \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matrice  $B$  si scrive quindi

$$B = \begin{bmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & fh' \end{bmatrix}$$

La curvatura di Gauss è quindi

$$K = \det X = \frac{\det B}{\det G} = \frac{\kappa h'}{f}$$



Osserviamo che i punti in cui  $\kappa$  e  $h'$  sono concordi sono ellittici, mentre quelli in cui sono discordi sono iperbolici.

I punti parabolici corrispondono ai flessi di  $\gamma$  (se  $\kappa = 0$ ) e ai punti a tangente orizzontale (se  $h' = 0$ ).

e) Calcoliamo la curvatura di Gauss della pseudosfera di equazioni

$$\begin{cases} x = \sin u \cos v \\ y = \sin u \sin v \\ z = h(u) \end{cases},$$

ove  $h = \cos u + \ln \tan(u/2)$ . Utilizziamo i calcoli già svolti per la trattrice, in (1.8.3), per trovare che  $h' = -\sin u + 1/\sin u$ , e che  $\kappa = -|\tan(u)|$ . Il cambio di segno rispetto a (1.8.3) è dovuto al fatto che l'orientazione degli assi che ora stiamo considerando è opposta a quella ivi considerata. Osserviamo

però che la parametrizzazione della trattrice che stiamo considerando non è quella naturale, per cui dovremo normalizzare  $h'$ ; avremo cioè

$$K = \frac{\kappa h'}{f \sqrt{f'^2 + h'^2}} = \frac{-(-\sin u + 1/\sin u) |\tan(u)|}{\sin u |\cot u|} = -1$$

Troviamo quindi che la curvatura di Gauss è costante ed è uguale a  $-1$ . Questa è la ragione per cui tale superficie è stata chiamata pseudosfera.



2.7 ALTRE APPLICAZIONI DELLA II FORMA FONDAMENTALE

**Definizione 2.7.1.** Una curva su una superficie che ha la proprietà di essere tangente in ogni punto ad una direzione principale è detta *linea di curvatura*.

**Proposizione 2.7.2.** Le linee di curvatura di una superficie elementare si trovano risolvendo l'equazione differenziale

$$x_{21}\dot{u}^2 + (x_{22} - x_{11})\dot{u}\dot{v} - x_{12}\dot{v}^2 = 0$$

**Dim.** Una curva  $\gamma$  su  $S$  è una linea di curvatura se e solo se  $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{P}_u\dot{u} + \mathbf{P}_v\dot{v}$  è un autovettore di  $L(\gamma(t))$  per ogni  $t$ , cioè se esiste una funzione  $\lambda(t)$  tale che

$$L(t)(\dot{\gamma}(t)) = \lambda(t)\dot{\gamma}(t).$$

Utilizzando la base canonica di  $T_{\mathbf{P}}S$  questa condizione si riscrive

$$\begin{bmatrix} X(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \lambda(t) \begin{bmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix}$$

Tale funzione esiste se e solo se per ogni  $t$  i vettori nei due membri sono proporzionali, cioè se si annulla il determinante

$$\begin{vmatrix} x_{11}\dot{u} + x_{12}\dot{v} & \dot{u} \\ x_{21}\dot{u} + x_{22}\dot{v} & \dot{v} \end{vmatrix},$$

da cui la tesi. □

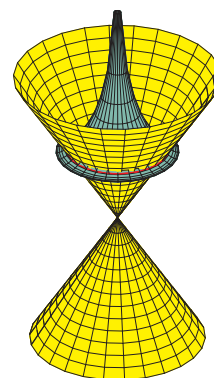
**Corollario 2.7.3.** Se la matrice  $X$  è diagonale, allora le linee coordinate sono linee di curvatura.

**Proposizione 2.7.4.** Una curva  $\gamma$  su  $S$  è una linea di curvatura se e solo se la rigata delle normali a  $S$  lungo  $\gamma$ , cioè  $\mathbf{P}(u, v) = \gamma(u) + v\mathbf{N}(\gamma(u))$  è sviluppabile.

**Dim.** Per la Proposizione (2.6.8)  $\mathbf{P}$  è sviluppabile se e solo se  $\dot{\gamma} \cdot \mathbf{N} \wedge \dot{\mathbf{N}} = 0$ .

Poiché  $\dot{\gamma}$  e  $\dot{\mathbf{N}}$  giacciono nel piano tangente, che è normale ad  $\mathbf{N}$ , la condizione di sviluppabilità è verificata se e solo se  $\dot{\gamma} \parallel \dot{\mathbf{N}}$ .

Osserviamo inoltre che, scrivendo  $\dot{\gamma} = \mathbf{P}_u\dot{u} + \mathbf{P}_v\dot{v}$ , allora  $\dot{\mathbf{N}} = \mathbf{N}_u\dot{u} + \mathbf{N}_v\dot{v} = -L(\dot{\gamma})$ , quindi la rigata è sviluppabile se e solo se  $L(\dot{\gamma}) \parallel \dot{\gamma}$ , cioè se e solo se  $\dot{\gamma}$  è una direzione principale. □



Sia  $\mathbf{P} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie elementare e  $p$  un punto non piatto di  $S = \mathbf{P}(\Omega)$ .

**Definizione 2.7.5.** Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  due vettori in  $T_p S$ ; tali vettori si dicono *coniugati* se  $II(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ ; in tal caso le direzioni corrispondenti ai due vettori si dicono *direzioni coniugate*.

**Esempio 2.7.6.** In un punto umbilico due direzioni ortogonali sono coniugate; il un punto non umbilico le direzioni principali sono direzioni coniugate.

**Definizione 2.7.7.** Una direzione individuata da  $\mathbf{v}$  in  $T_p S$  si dice *asintotica* se è autoconiugata, cioè se  $II(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ . Una direzione asintotica è quindi una direzione in cui la curvatura normale è nulla.

**Osservazione 2.7.8.** In un punto ellittico non ci sono direzioni asintotiche, in un punto parabolico ce n'è una sola, e in un punto iperbolico ce ne sono due.

**Definizione 2.7.9.** Una curva su una superficie che ha la proprietà di essere tangente in ogni punto ad una direzione asintotica è detta *linea asintotica*.

**Osservazione 2.7.10.** Le linee asintotiche sono soluzioni dell'equazione differenziale  $II(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$ , cioè

$$b_{11}\dot{u}^2 + 2b_{12}\dot{u}\dot{v} + b_{22}\dot{v}^2 = 0;$$

in particolare, se  $b_{11} \equiv b_{22} \equiv 0$  e  $B \neq 0$ , le linee coordinate sono linee asintotiche.

**Osservazione 2.7.11.** Le linee asintotiche esistono solo nelle regioni dove la curvatura di Gauss è minore o uguale a zero.

Consideriamo ora, in  $T_p S$  le coniche reali di equazione  $II(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = \mp 1$ ; tali coniche sono dette *coniche di Dupin*. Siano  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  versori corrispondenti alle direzioni principali. Utilizzando coordinate polari possiamo scrivere  $\mathbf{w} = \rho \mathbf{e}_\theta$ , con  $\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_1 \cos \theta + \mathbf{e}_2 \sin \theta$ , e quindi, poiché

$$II(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = \rho^2 II(\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\theta) = \rho^2 k_n(\mathbf{e}_\theta)$$

l'equazione delle coniche diventa

$$\rho^2(k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta) = \mp 1,$$

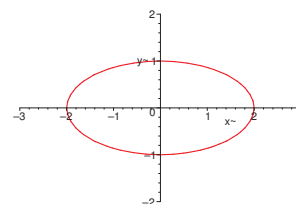
e, ritornando a coordinate cartesiane,  $\xi = \rho \cos \theta, \eta = \rho \sin \theta$ ,

$$k_1 \xi^2 + k_2 \eta^2 = \mp 1$$

Vediamo ora di che tipo di coniche si tratta, in dipendenza dalla natura del punto

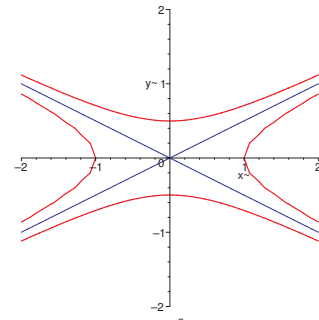
- Punto *ellittico*:

Le curvature principali  $k_1$  e  $k_2$  sono concordi, quindi una delle coniche considerate è un'ellisse, e l'altra è l'insieme vuoto.



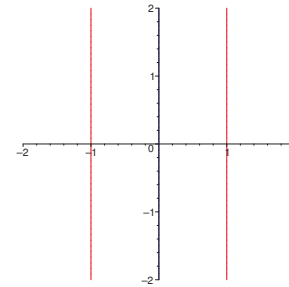
- Punto *iperbolico*:

Le coniche sono due iperboli coniugate, i cui asintoti corrispondono alle direzioni asintotiche.



- Punto *parabolico*:

Una conica è costituita da due rette parallele, corrispondenti alla direzione asintotica, l'altra è l'insieme vuoto.



Scegliamo ora coordinate in  $\mathbb{R}^3$  in modo che il punto  $p$  sia l'origine, e che il piano  $z = 0$  sia il piano tangente, con il versore normale diretto lungo la direzione positiva dell'asse  $z$ , e con le direzioni principali dirette come gli assi  $x$  e  $y$ .

A meno di restringerci ad un intorno sufficientemente piccolo di  $p$  (Cf. Proposizione (2.1.20)) possiamo supporre che  $S$  si possa descrivere come grafico di una funzione  $z = h(x, y)$ , cioè che si possa riparametrizzare come

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = h(x, y) \end{cases} .$$

I vettori tangenti  $\mathbf{P}_x$  e  $\mathbf{P}_y$  sono rispettivamente,  $(1, 0, h_x)$  e  $(0, 1, h_y)$ ; tali vettori giacciono nel piano  $z = 0$  e quindi le loro componenti lungo l'asse  $z$  sono nulle:  $h_x(0, 0) = h_y(0, 0) = 0$ . Da ciò segue che la matrice della prima forma fondamentale in  $p$  è la matrice identica, e quindi, in  $p$  si avrà  $B(p) = X(p)$ . La matrice  $X(p)$  è diagonale in quanto le direzioni principali in  $p$  sono le direzioni coordinate, quindi anche la matrice  $B(p)$  è diagonale.

Poiché  $\mathbf{P}_{xx} = (0, 0, h_{xx})$ ,  $\mathbf{P}_{xy} = (0, 0, h_{xy})$ ,  $\mathbf{P}_{yy} = (0, 0, h_{yy})$  e il versore normale in  $p$  è  $(0, 0, 1)$  la matrice della seconda forma fondamentale in  $p$  è matrice Hessiana di  $h$ ; per quanto detto prima avremo  $h_{xy}(0, 0) = 0$  e che  $h_{xx}(0, 0), h_{yy}(0, 0)$  sono le curvatures principali in  $p$ .

Scriviamo ora lo sviluppo di Taylor della funzione  $h$  in un intorno dell'origine

$$h(x, y) = \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2) + R$$

ove  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} R/(x^2 + y^2) = 0$ .

Siano  $C_{\mp\varepsilon}$  le curve definite da  $h(x, y) = \mp\varepsilon$ , cioè da  $k_1x^2 + k_2y^2 + 2R = \mp 2\varepsilon$ ; si tratta dell'intersezione di  $S$  con piani paralleli al piano tangente in  $p$ ; le curve  $k_1x^2 + k_2y^2 = \mp 2\varepsilon$  sono un'approssimazione al secondo ordine di  $C_{\varepsilon}$ , ed sono, a meno di un cambio di coordinate, le coniche di Dupin.

### 2.8 THEOREMA EGREGIUM

Questa sezione è dedicata alla dimostrazione del seguente fondamentale risultato di Gauss:

**Teorema 2.8.1.** (*Theorema Egregium*) Sia  $\mathbf{P} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie elementare. La curvatura di Gauss di  $S$  dipende solo dalla prima forma fondamentale di  $\mathbf{P}$ .

Sia  $\mathbf{P} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie elementare. In analogia con il caso delle curve, scriviamo le derivate dei vettori della base  $\{\mathbf{P}_u, \mathbf{P}_v, \mathbf{N}\}$  sulla base stessa:

$$\mathbf{P}_{ij} = \Gamma_{ij}^1 \mathbf{P}_u + \Gamma_{ij}^2 \mathbf{P}_v + b_{ij} \mathbf{N} \quad (2.8.2)$$

$$\mathbf{N}_i = -x_{1i} \mathbf{P}_u - x_{2i} \mathbf{P}_v \quad (2.8.3)$$

I coefficienti  $\Gamma_{ij}^k$  sono definiti da questa relazione e vengono detti *simboli di Christoffel*. Essi dipendono solo dalla prima forma fondamentale di  $S$ ; infatti, poiché

$$\mathbf{P}_{ij} \cdot \mathbf{P}_i = \frac{(\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_i)_j}{2} = \frac{(g_{ii})_j}{2}$$

$$\mathbf{P}_{ii} \cdot \mathbf{P}_j = (\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_j)_i - \mathbf{P}_{ij} \cdot \mathbf{P}_i = (g_{ij})_i - \frac{(g_{ii})_j}{2}$$

moltiplicando scalarmente le equazioni (2.8.2) per  $\mathbf{P}_u$  e  $\mathbf{P}_v$  otteniamo i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 g_{11} + \Gamma_{11}^2 g_{21} = \frac{(g_{11})_u}{2} \\ \Gamma_{11}^1 g_{12} + \Gamma_{11}^2 g_{22} = (g_{12})_u - \frac{(g_{11})_v}{2} \end{cases} \quad (2.8.4)$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 g_{11} + \Gamma_{12}^2 g_{21} = \frac{(g_{11})_v}{2} \\ \Gamma_{12}^1 g_{12} + \Gamma_{12}^2 g_{22} = \frac{(g_{22})_u}{2} \end{cases} \quad (2.8.5)$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 g_{11} + \Gamma_{22}^2 g_{21} = (g_{12})_v - \frac{(g_{22})_u}{2} \\ \Gamma_{22}^1 g_{12} + \Gamma_{22}^2 g_{22} = \frac{(g_{22})_v}{2} \end{cases} \quad (2.8.6)$$

Per ogni coppia di equazioni il determinante del sistema è  $g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \det G$ , e quindi è sempre possibile ricavare i simboli di Christoffel in funzione delle derivate dei coefficienti della matrice della prima forma fondamentale.

**Dim. del Theorema Egregium.** Consideriamo l'identità  $(\mathbf{P}_{uu})_v - (\mathbf{P}_{uv})_u = 0$  e riscriviamola usando le formule (2.8.2):

$$\Gamma_{11}^1 \mathbf{P}_{uv} + \Gamma_{11}^2 \mathbf{P}_{vv} + b_{11} \mathbf{N}_v + (\Gamma_{11}^1)_v \mathbf{P}_u + (\Gamma_{11}^2)_v \mathbf{P}_v + (b_{11})_v \mathbf{N} +$$

$$-\Gamma_{12}^1 \mathbf{P}_{uu} - \Gamma_{12}^2 \mathbf{P}_{uv} - b_{12} \mathbf{N}_u - (\Gamma_{12}^1)_u \mathbf{P}_u - (\Gamma_{12}^2)_u \mathbf{P}_v - (b_{12})_u \mathbf{N} = 0$$

Utilizziamo ancora una volta le formule (2.8.2) e (2.8.3) per scrivere tutti i termini sulla base  $\{\mathbf{P}_u, \mathbf{P}_v, \mathbf{N}\}$  e uguagliamo a zero il coefficiente di  $\mathbf{P}_v$ :

$$\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - b_{11} x_{22} + (\Gamma_{11}^2)_v - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + b_{12} x_{21} - (\Gamma_{12}^2)_u = 0.$$

L'uguaglianza può essere riscritta come

$$b_{11} x_{22} - b_{12} x_{21} = \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + (\Gamma_{11}^2)_v - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - (\Gamma_{12}^2)_u$$

e, osservando che da  $B = GX$  segue  $b_{11} = g_{11} x_{11} + g_{12} x_{21}$  e  $b_{12} = g_{11} x_{12} + g_{12} x_{22}$ , otteniamo

$$g_{11} \det X = \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + (\Gamma_{11}^2)_v - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - (\Gamma_{12}^2)_u. \quad (2.8.7)$$

Analoghi calcoli compiuti ponendo a zero il coefficiente di  $\mathbf{P}_u$  danno un formula

$$g_{12} \det X = \dots,$$

dove a secondo membro compaiono solo i simboli di Christoffel e le loro derivate. Pertanto, poiché non si può avere  $g_{11} = g_{12} = 0$  essendo  $G$  definita positiva, è possibile esprimere la curvatura di Gauss per mezzo dei coefficienti della prima forma fondamentale e delle loro derivate.  $\square$

**Corollario 2.8.8.** *La curvatura di Gauss è invariante per isometrie.*

**Dim.** Per l'Osservazione (2.6.2) la curvatura di Gauss non dipende dalla parametrizzazione, e per il Teorema Egregium dipende solo dalla prima forma fondamentale. Il Corollario segue quindi dall'osservazione (2.3.12).  $\square$

**Esempio 2.8.9.** Abbiamo visto che la curvatura di Gauss del catenoide è  $-1/\cosh^4 u$ , mentre quella dell'elicoide è  $-1/(1+U^2)^2$ . Ricordando che un'isometria locale tra il catenoide e l'elicoide è data da

$$\begin{cases} U = \sinh u \\ V = v + C \end{cases}$$

verifichiamo nell'esempio l'invarianza della curvatura di Gauss.

Per concludere questa sezione diamo un'interpretazione geometrica della curvatura di Gauss. Abbiamo visto che  $\mathbf{N}_u = -L(\mathbf{P}_u)$  e  $\mathbf{N}_v = -L(\mathbf{P}_v)$ , e quindi

$$\mathbf{N}_u \wedge \mathbf{N}_v = L(\mathbf{P}_u) \wedge L(\mathbf{P}_v) = (\det X)(\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v).$$

Fissiamo ora un punto  $p = \mathbf{P}(\bar{u}, \bar{v}) \in S$  tale che  $\det X$  sia diverso da zero; per tale punto si avrà quindi  $\mathbf{N}_u \wedge \mathbf{N}_v \neq 0$ .

Sia  $R = \mathbf{P}(Q)$  una regione semplice che contiene  $p$ ; la sua area è data da

$$A(\mathbf{P}(Q)) = \iint_Q \|\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v\| \, dudv.$$

Se, al variare di  $(u, v)$  in  $Q$  si ha  $\mathbf{N}_u \wedge \mathbf{N}_v \neq 0$ , e ciò accade per continuità se  $Q$  è sufficientemente piccolo, la quantità

$$A(\mathbf{N}(Q)) = \iint_Q \|\mathbf{N}_u \wedge \mathbf{N}_v\| \, dudv$$

rappresenta invece l'area della porzione di sfera immagine di  $\mathbf{N} : Q \rightarrow S^2$ . Si ponga  $\varepsilon = 1$  se  $\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v$  e  $\mathbf{N}_u \wedge \mathbf{N}_v$  sono equiversi,  $\varepsilon = -1$  se invece hanno verso opposto, e si consideri il limite del rapporto

$$\varepsilon \frac{A(\mathbf{N}(Q))}{A(\mathbf{P}(Q))},$$

preso su una successione di regioni  $Q_n$  che convergono a  $(\bar{u}, \bar{v})$  nel senso che ogni disco centrato in  $(\bar{u}, \bar{v})$  contiene  $Q_n$  per  $n$  sufficientemente grande

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon \frac{A(\mathbf{N}(Q_n))}{A(\mathbf{P}(Q_n))} = \varepsilon \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\iint_{Q_n} \|\mathbf{N}_u \wedge \mathbf{N}_v\| \, dudv}{\iint_{Q_n} \|\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v\| \, dudv}$$

Osservando che  $\varepsilon |\det X| = \det X = K$  il limite precedente si riscrive

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\iint_{Q_n} K(u, v) \|\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v\| \, dudv}{\iint_{Q_n} \|\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v\| \, dudv}.$$

Per il teorema del valor medio esistono punti  $(u_n, v_n), (\bar{u}_n, \bar{v}_n) \in Q_n$  tali che

$$\iint_{Q_n} K(u, v) \|\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v\| \, dudv = A(Q_n) K(u_n, v_n) \|\mathbf{P}_u(u_n, v_n) \wedge \mathbf{P}_v(u_n, v_n)\|$$

$$\iint_{Q_n} \|\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v\| \, dudv = A(Q_n) \|\mathbf{P}_u(\bar{u}_n, \bar{v}_n) \wedge \mathbf{P}_v(\bar{u}_n, \bar{v}_n)\|.$$

Quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon \frac{A(\mathbf{N}(Q_n))}{A(\mathbf{P}(Q_n))} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K(u_n, v_n) \|\mathbf{P}_u(u_n, v_n) \wedge \mathbf{P}_v(u_n, v_n)\|}{\|\mathbf{P}_u(\bar{u}_n, \bar{v}_n) \wedge \mathbf{P}_v(\bar{u}_n, \bar{v}_n)\|}$$

Poiché, per  $n \rightarrow \infty$  si ha che  $(u_n, v_n) \rightarrow (\bar{u}, \bar{v})$  e che  $(\bar{u}_n, \bar{v}_n) \rightarrow (\bar{u}, \bar{v})$  troviamo infine che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon \frac{A(\mathbf{N}(Q_n))}{A(\mathbf{P}(Q_n))} = K(\bar{u}, \bar{v}).$$

Possiamo cioè vedere la curvatura di Gauss nel punto come limite del quoziente dell'area spazzata dal vettore normale e dell'area della superficie al variare di  $(u, v)$  in  $Q$ .

2.9 CURVATURA MEDIA - SUPERFICI MINIMALI

**Definizione 2.9.1.** La *curvatura media*  $H$  di una superficie  $S$  in un punto  $p$  è pari alla media delle curvatures principali in tale punto. In virtù del Teorema (2.5.5) si ha

$$H = \frac{\text{Tr} X}{2},$$

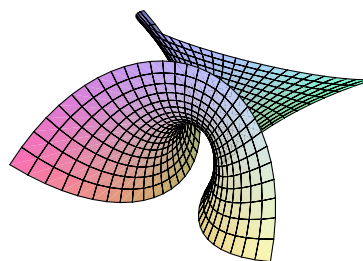
ove  $\text{Tr} X$  è la traccia di  $X$ .

**Definizione 2.9.2.** Le superfici con curvatura media identicamente nulla si dicono *superfici minimali*.

**Esempi 2.9.3.**

Il catenoide e l'elicoide sono superfici minimali; un altro esempio di superficie minimale è dato dalla superficie di Enneper, di equazioni

$$\begin{cases} x = u - \frac{u^3}{3} + uv^2 \\ y = v - \frac{v^3}{3} + u^2v \\ z = u^2 - v^2 \end{cases} .$$



**Osservazione 2.9.4.** I punti non piatti di una superficie minimale sono iperbolici.

**Dim.** Poiché  $k_1 + k_2 = 2H = 0$  si ha che le curvatures principali sono discordi (e quindi il punto è iperbolico) o entrambe nulle, ma ciò corrisponderebbe a un punto piatto.  $\square$

Sia  $\mathbf{P} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie elementare, sia  $R = \mathbf{P}(Q)$  una regione semplice, e sia  $h : Q \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione liscia. La *variazione normale* di  $R$ , determinata da  $h$  è la mappa  $\varphi : Q \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da

$$\varphi(u, v, t) = \mathbf{P}(u, v) + th(u, v)\mathbf{N}(u, v).$$

Per ogni  $t$  fissato la mappa  $\mathbf{P}^t = \varphi(u, v, t)$  è una superficie elementare con

$$\mathbf{P}_u^t = \mathbf{P}_u + th\mathbf{N}_u + th_u\mathbf{N} \quad \mathbf{P}_v^t = \mathbf{P}_v + th\mathbf{N}_v + th_v\mathbf{N};$$

Indichiamo con  $G = [g_{ij}]$  la matrice della prima forma fondamentale di  $\mathbf{P}$  e calcoliamo la matrice  $G^t$  della prima forma fondamentale di  $\mathbf{P}^t$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_u^t \cdot \mathbf{P}_u^t &= g_{11} + 2th(\mathbf{P}_u \cdot \mathbf{N}_u) + t^2 p_{11} \\ \mathbf{P}_u^t \cdot \mathbf{P}_v^t &= g_{12} + th(\mathbf{P}_u \cdot \mathbf{N}_v + \mathbf{P}_v \cdot \mathbf{N}_u) + t^2 p_{12} \\ \mathbf{P}_v^t \cdot \mathbf{P}_v^t &= g_{22} + 2th(\mathbf{P}_v \cdot \mathbf{N}_v) + t^2 p_{22} \end{aligned}$$

Nelle formule appena scritte le funzioni  $p_{ij}$  sono polinomiali in  $t$ .

Ricordando che, da  $(\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{N})_j = 0$  segue che  $\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{N}_j = -\mathbf{P}_{ij} \cdot \mathbf{N} = -b_{ij}$ , otteniamo

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_u^t \cdot \mathbf{P}_u^t &= g_{11} - 2thb_{11} + t^2p_{11} \\ \mathbf{P}_u^t \cdot \mathbf{P}_v^t &= g_{12} - 2thb_{12} + t^2p_{12} \\ \mathbf{P}_v^t \cdot \mathbf{P}_v^t &= g_{22} - 2thb_{22} + t^2p_{22}\end{aligned}$$

da cui si calcola

$$\det G^t = \det G - 2th(b_{11}g_{22} + b_{22}g_{11} - 2g_{12}b_{12}) + t^2(\dots)$$

Ricordando che  $X = G^{-1}B$ , è semplice vedere che  $b_{11}g_{22} + b_{22}g_{11} - 2g_{12}b_{12} = 2H \det G$ , e quindi

$$\det G^t = \det G(1 - 4thH + t^2(\dots)).$$

Calcoliamo ora l'area di  $\mathbf{P}^t(Q)$ :

$$A(t) = \iint_Q \sqrt{\det G(1 - 4thH + t^2(\dots))} dudv$$

Per  $\varepsilon \ll 1$  la funzione  $A$  è differenziabile e la sua derivata in 0 è

$$A'(0) = - \iint_Q 2hH \sqrt{\det G} dudv.$$

Possiamo ora dimostrare che

**Teorema 2.9.5.** *Una superficie elementare  $\mathbf{P} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  è minimale se e solo se  $A'(0) = 0$  per ogni regione semplice  $R = \mathbf{P}(Q)$  e per ogni variazione normale.*

**Dim.** Se la superficie è minimale la condizione è chiaramente soddisfatta.

Viceversa, supponiamo per assurdo che  $H(p) \neq 0$  per qualche punto  $p = \mathbf{P}(\bar{u}, \bar{v})$ . Siano  $r_1 < r_2$  numeri reali tali che  $|H| \neq 0$  nel disco  $D_2$ , centrato in  $(\bar{u}, \bar{v})$  di raggio  $r_2$  e  $|H| > |H(p)|/2$  nel disco  $D_1$ , centrato in  $(\bar{u}, \bar{v})$  di raggio  $r_1$ .

Scegliamo poi una funzione liscia  $h$  tale che  $h \equiv H$  in  $D_1$ , che abbia lo stesso segno di  $H$  in  $D_2$  e che si annulli fuori da  $D_2$ . Per la variazione normale definita da tale  $h$  si ha

$$\begin{aligned}|A'(0)| &= \iint_{D_2} 2hH \sqrt{\det G} dudv \geq \iint_{D_1} 2H^2 \sqrt{\det G} dudv \\ &\geq \iint_{D_1} \frac{H(p)^2}{2} \sqrt{\det G} dudv \\ &= \frac{H(p)^2}{2} A(\mathbf{P}(D_1)),\end{aligned}$$

e quindi  $A'(0) < 0$ . □



## 2.10 GEODETICHE

**Definizione 2.10.1.** Sia  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie, e sia  $\gamma : J \rightarrow S$  una curva parametrizzata liscia su  $S$ . Un *campo vettoriale*  $\mathbf{X}$  lungo  $\gamma$  è un'applicazione liscia  $\mathbf{X} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $\mathbf{X}(t) \in T_{\gamma(t)}S$  per ogni  $t \in J$ .

Vogliamo misurare la variazione di  $\mathbf{X}$  lungo  $\gamma$  "dal punto di vista di  $S$ ", cioè misurare la parte tangente della variazione di  $\mathbf{X}$ .

**Definizione 2.10.2.** La *derivata covariante* di  $\mathbf{X}$  lungo  $\gamma$  è il campo vettoriale  $D_\gamma \mathbf{X}$  definito da

$$D_\gamma \mathbf{X}(t) := \pi_{\gamma(t)} \left( \frac{d\mathbf{X}}{dt} \right),$$

ove  $\pi_{\gamma(t)} : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_{\gamma(t)}S$  è la proiezione ortogonale.

Vogliamo ora mostrare che la nozione appena introdotta è intrinseca – dipende cioè solo dalla prima forma fondamentale. A tal fine osserviamo che, considerando una parametrizzazione locale di  $S$ , possiamo descrivere un campo vettoriale  $\mathbf{X}$  con due funzioni lisce  $X_1, X_2 : J \rightarrow \mathbb{R}$ , che ne danno le componenti sulla base  $\{\mathbf{P}_u, \mathbf{P}_v\}$ , cioè scriviamo

$$\mathbf{X}(t) = X_1(t)\mathbf{P}_u(\gamma(t)) + X_2(t)\mathbf{P}_v(\gamma(t)).$$

e quindi

$$\dot{\mathbf{X}} = \dot{X}_1\mathbf{P}_u + X_1(\mathbf{P}_{uu}\dot{u} + \mathbf{P}_{uv}\dot{v}) + \dot{X}_2\mathbf{P}_v + X_2(\mathbf{P}_{uv}\dot{u} + \mathbf{P}_{vv}\dot{v})$$

Ricordando la relazione (2.8.2)

$$\mathbf{P}_{ij} = \Gamma_{ij}^1\mathbf{P}_u + \Gamma_{ij}^2\mathbf{P}_v + b_{ij}\mathbf{N}$$

possiamo scrivere, utilizzando i simboli di Christoffel:

$$\dot{\mathbf{X}} = \sum_k \mathbf{P}_k \dot{X}_k + \sum_{i,j} \left( \sum_k \Gamma_{ij}^k \mathbf{P}_k + b_{ij} \mathbf{N} \right) X_i \dot{u}_j,$$

e quindi, prendendo la parte tangente di tale espressione

$$D_\gamma \mathbf{X} = \sum_k \left( \dot{X}_k + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k X_i \dot{u}_j \right) \mathbf{P}_k \quad (2.10.3)$$

**Definizione 2.10.4.** Un *campo vettoriale*  $\mathbf{X}$  lungo  $\gamma$  si dice *parallelo* se la sua derivata covariante lungo  $\gamma$  è nulla.

**Definizione 2.10.5.** Una curva regolare parametrizzata liscia  $\gamma : J \rightarrow S$  si dice *geodetica* se il campo vettoriale  $\dot{\gamma}$  dei vettori tangenti a  $\gamma$  è parallelo lungo  $\gamma$ .

**Osservazione 2.10.6.** Una curva regolare parametrizzata liscia  $\gamma : J \rightarrow S$  è una geodetica se e solo se per ogni  $t \in J$  di ha

$$\ddot{\gamma}(t) \wedge \mathbf{N}(u(t), v(t)) = 0.$$

Si noti che, da questa caratterizzazione delle geodetiche, è evidente la loro indipendenza dalla parametrizzazione di  $S$ .

**Osservazione 2.10.7.** Se  $\gamma$  è una geodetica, allora  $\|\dot{\gamma}\|$  è costante, cioè una geodetica è parametrizzata con un multiplo del parametro naturale. Infatti, poiché  $\dot{\gamma}$  è tangente a  $S$ , si ha  $\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma} = 0$ , e quindi  $\frac{d}{dt}(\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma}) = 0$ .

**Osservazione 2.10.8.** Essendo definita in termini di derivata covariante, la nozione di geodetica è intrinseca. In particolare, per l'Osservazione (2.3.12) le isometrie locali portano geodetiche in geodetiche.

**Definizione 2.10.9.** Sia  $\gamma : J \rightarrow S$  una curva regolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. La *curvatura geodetica* di  $\gamma$  è la funzione  $k_g : J \rightarrow \mathbb{R}$  data da

$$k_g := D_\gamma \mathbf{t}_\gamma \cdot (\mathbf{N} \wedge \mathbf{t}_\gamma) = \mathbf{t}'_\gamma \cdot (\mathbf{N} \wedge \mathbf{t}_\gamma). \quad (2.10.10)$$

La seconda uguaglianza è vera in quanto il versore  $\mathbf{N} \wedge \mathbf{t}_\gamma$  giace nel piano tangente, e quindi la componente normale alla superficie di  $\mathbf{t}'_\gamma$  non contribuisce al prodotto scalare.

**Osservazione 2.10.11.** Una curva regolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco è una geodetica se e solo se la sua curvatura geodetica è nulla.

**Dim.** Se una curva è una geodetica, allora chiaramente la sua curvatura geodetica è nulla. Viceversa, se  $k_g = 0$ , allora  $\mathbf{t}'_\gamma$ ,  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{t}_\gamma$  sono linearmente dipendenti. Essendo  $\mathbf{t}'_\gamma$  e  $\mathbf{N}$  entrambi ortogonali a  $\mathbf{t}_\gamma$ , ciò implica che  $\mathbf{t}'_\gamma$  e  $\mathbf{N}$  sono paralleli, e quindi  $\gamma$  è una geodetica per l'Osservazione (2.10.6).  $\square$

La formula (2.10.3), nel caso particolare del campo vettoriale tangente ad una curva (quindi con  $X_1 = \dot{u}$  e  $X_2 = \dot{v}$ ), diventa

$$\sum_k (\ddot{u}_k + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \dot{u}_i \dot{u}_j) \mathbf{P}_k.$$

Pertanto il sistema di equazioni differenziali le cui soluzioni sono le geodetiche è il seguente:

$$\begin{cases} \ddot{u} + \Gamma_{11}^1 \dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^1 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^1 \dot{v}^2 = 0 \\ \ddot{v} + \Gamma_{11}^2 \dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^2 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^2 \dot{v}^2 = 0 \end{cases} \quad (2.10.12)$$

Richiamiamo ora un risultato dalla teoria delle equazioni differenziali:

**Teorema 2.10.13.** *Dati un intervallo  $J \subset \mathbb{R}$ , un punto  $s_0 \in J$ , un aperto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , un vettore  $\xi_0 \in \Omega$  e un'applicazione liscia  $\mathbf{f} : J \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , allora esiste  $\delta > 0$  tale che il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \xi'(s) = \mathbf{f}(\xi, s) \\ \xi(s_0) = \xi_0 \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione liscia  $\xi : (s_0 - \delta, s_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

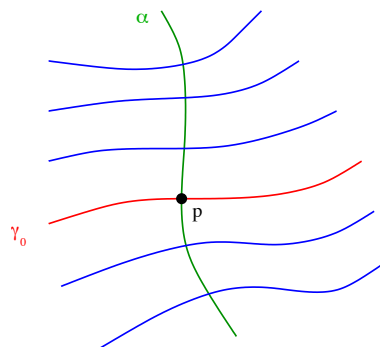
**Corollario 2.10.14.** *Per ogni punto  $p \in S$  e per ogni vettore tangente  $\mathbf{v} \in T_p S$  esistono  $\delta > 0$  ed un'unica geodetica  $\gamma_{\mathbf{v}} : (-\delta, \delta) \rightarrow S$  tale che  $\gamma_{\mathbf{v}}(0) = p$  e  $\dot{\gamma}_{\mathbf{v}}(0) = \mathbf{v}$ .*

**Corollario 2.10.15.** *Per ogni punto  $p \in S$  e per ogni vettore tangente  $\mathbf{v} \in T_p S$  esistono  $\bar{\delta} > 0$  ed un'unica geodetica parametrizzata con parametro naturale  $\gamma_{\bar{\mathbf{v}}} : (-\bar{\delta}, \bar{\delta}) \rightarrow S$  tale che  $\gamma_{\bar{\mathbf{v}}}(0) = p$  e  $\dot{\gamma}_{\bar{\mathbf{v}}}(0) = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ .*

**Dim.** Sia  $\gamma_{\mathbf{v}} : (-\delta, \delta) \rightarrow S$  l'unica geodetica tale che  $\gamma_{\mathbf{v}}(0) = p$  e  $\dot{\gamma}_{\mathbf{v}}(0) = \mathbf{v}$ , la cui esistenza è garantita dal Corollario (2.10.14), e definiamo  $\gamma_{\bar{\mathbf{v}}} : (-\bar{\delta}, \bar{\delta}) \rightarrow S$  con  $\bar{\delta} = \delta/\|\mathbf{v}\|$ , ponendo  $\gamma_{\bar{\mathbf{v}}}(s) = \gamma_{\mathbf{v}}(s/\|\mathbf{v}\|)$ ; poiché  $\dot{\gamma}_{\bar{\mathbf{v}}}(0)$  è un versore,  $\gamma_{\bar{\mathbf{v}}}$  ha la parametrizzazione naturale per l'Osservazione (2.10.7).  $\square$

Vogliamo ora introdurre una riparametrizzazione locale di una superficie che si rivelerà particolarmente adeguata per trattare problemi che coinvolgono le geodetiche.

Sia  $p$  un punto di una superficie differenziabile  $S$ , e  $\alpha : J \rightarrow S$  una curva liscia e regolare su  $S$ , parametrizzata con il parametro naturale (indicato con  $v$ ), e tale che  $\alpha(0) = p$ . Per ogni punto  $\alpha(v) \in \alpha(J)$  si consideri la geodetica  $\gamma_v$  passante per  $\alpha(v)$  tale che  $\gamma'_v(0) = \mathbf{N}(\alpha(v)) \wedge \mathbf{t}_{\alpha}(v)$ . Sia  $u$  il parametro naturale per tale geodetica. E' possibile mostrare che



**Teorema 2.10.16.** *Esiste un intorno  $\Omega \ni (0, 0)$  in  $\mathbb{R}^2$  tale che la mappa  $\mathbf{P} : \Omega \rightarrow S$  definita ponendo  $\mathbf{P}(u, v) = \gamma_v(u)$  è una superficie elementare. Un sistema di coordinate  $(u, v)$  siffatto è detto sistema di coordinate semigeodetiche.*

Vediamo ora come si esprimono la prima forma fondamentale, i simboli di Christoffel e la curvatura di Gauss in tali coordinate. Le curve  $\mathbf{P}(u, v_0) = \gamma_{v_0}(u)$  sono geodetiche, e  $u$  è il parametro naturale per esse; pertanto  $\mathbf{P}_u$  è un versore (il versore tangente alle curve considerate) e dunque  $g_{11} = 1$ .

Vogliamo ora mostrare che  $g_{12} = g_{21} = 0$ , cioè che le linee coordinate in una parametrizzazione semigeodetica sono ortogonali. Osserviamo che  $\mathbf{P}_{uu}(u, v_0)$  è

la derivata del versore tangente alla curva  $\mathbf{P}(u, v_0) = \gamma_{v_0}(u)$ ; poiché tale curva è una geodetica, tale vettore non ha componente tangente, e quindi

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0.$$

Dalla seconda delle (2.8.4) otteniamo  $(g_{12})_u = 0$ , cioè  $g_{12}$  non dipende da  $u$ . Sia  $(u, v)$  un punto di  $\Omega$ ; per quanto appena visto  $g_{12}(u, v) = g_{12}(0, v)$ . Ricordando che l'angolo tra la curva  $\alpha$ , che è la linea coordinata  $\mathbf{P}(0, v)$  - e ha quindi vettore tangente  $\mathbf{P}_v(0, v)$  - e la geodetica  $\gamma_v(u)$ , che ha vettore tangente  $\gamma'_v(u)$  nel punto  $(0, v)$  è retto, in quanto  $\gamma'_v(0) = \mathbf{N}(\alpha(v)) \wedge \mathbf{t}_\alpha(v)$ , si deduce che  $g_{12}(0, v) = 0$ , e quindi  $g_{12}(u, v) = 0$  per ogni  $(u, v) \in \Omega$ . Concludendo, la matrice della prima forma fondamentale il coordinate semigeodetiche è della forma

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix},$$

e  $g > 0$  perché  $G$  è definita positiva.

Utilizzando le (2.8.5) e (2.8.6) possiamo calcolare gli altri simboli di Christoffel, ottenendo

$$\Gamma_{12}^1 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{g_u}{2g}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{g_u}{2}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{g_v}{2g}. \quad (2.10.17)$$

Utilizzando la formula (2.8.7) possiamo esprimere la curvatura di Gauss come

$$K = -\frac{g_{uu}}{2g} + \frac{g_u^2}{4g^2} \quad (2.10.18)$$

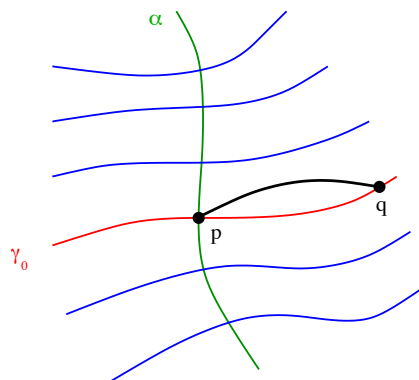
Utilizzeremo i valori appena calcolati più avanti, nella dimostrazione della versione locale del Teorema di Gauss-Bonnet.

Mostriamo invece ora come sia possibile utilizzare le coordinate semigeodetiche per dimostrare una proprietà di minimizzazione locale delle distanze di cui godono le geodetiche.

**Definizione 2.10.19.** Dati due punti  $p_1$  e  $p_2$  su una superficie  $S$ , possiamo definire la loro distanza come l'estremo inferiore delle lunghezze delle curve su  $S$ , regolari a tratti, che uniscono i due punti.

**Teorema 2.10.20.** Per ogni  $p \in S$  e ogni geodetica  $\gamma : J \rightarrow S$  passante per  $p$  esiste un intorno  $U$  di  $p$  tale che, per ogni punto  $q$  contenuto nella componente connessa di  $\gamma(J) \cap U$  che contiene  $p$ , la lunghezza di  $\gamma$  tra  $p$  e  $q$  è la più breve tra le lunghezze delle curve che giacciono in  $U$  e congiungono  $p$  e  $q$ .

**Dim.** Sia  $\gamma : J \rightarrow S$  la geodetica considerata, con parametrizzazione naturale, e sia  $\alpha$  una curva liscia regolare passante per  $\mathbf{P}$  e ortogonale ad  $\gamma$ . Si utilizzi la curva  $\alpha$  per costruire un sistema di coordinate semigeodetiche in un intorno  $U$  di  $p$ . Con un opportuna scelta della parametrizzazione della curva, in tali coordinate si avrà che  $p = \mathbf{P}(0, 0)$  e che  $\gamma$  è descritta dall'equazione  $v = 0$ .



Sia  $q$  un punto su  $U \cap \gamma(J)$  e si consideri una curva regolare (a tratti) che congiunge  $p$  e  $q$ . La lunghezza di tale curva è data da

$$\int_a^b \sqrt{\dot{u}^2 + g \dot{v}^2} dt \geq \left| \int_a^b \dot{u} dt \right| = |u(b) - u(a)|.$$

Osservando che il punto  $q$  ha coordinate  $(u(b), 0)$  notiamo che  $|u(b) - u(a)|$  è esattamente la lunghezza di  $\gamma$  tra  $p$  e  $q$ .  $\square$

### Esempi 2.10.21.

1. I simboli di Christoffel del piano sono nulli; da ciò segue che le geodetiche del piano euclideo sono le rette. Più in generale, le rette contenute in una superficie sono geodetiche; infatti, per tali curve la componente normale della derivata del vettore tangente è chiaramente nulla.
2. Utilizzando i sistemi (2.8.4), (2.8.5) e (2.8.6) possiamo facilmente calcolare i simboli di Christoffel delle superfici di rotazione (vedi equazioni (2.6.10)), che sono tutti nulli tranne

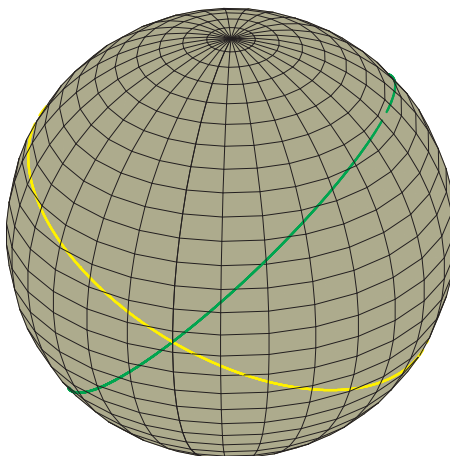
$$\Gamma_{12}^2 = \frac{f'}{f} \quad \Gamma_{22}^1 = -f f', \quad (2.10.22)$$

e quindi il sistema di equazioni differenziali delle geodetiche è il seguente:

$$\begin{cases} \ddot{u} - f f' \dot{v}^2 = 0 \\ \ddot{v} + 2 \frac{f'}{f} \dot{u} \dot{v} = 0 \end{cases}.$$

E' immediato verificare che i meridiani ( $u = t, v = v_0$ ) sono geodetiche, mentre i paralleli ( $u = u_0, v = t$ ) sono geodetiche se e solo se  $f'(u_0) = 0$ .

3. Le geodetiche della sfera sono i cerchi massimi; infatti i meridiani sono geodetiche e per ogni cerchio massimo  $C$  esiste un'isometria della sfera che porta un meridiano in  $C$  e per ogni punto  $p$  ed ogni direzione tangente  $v$  esiste un cerchio massimo passante per  $p$  e avente  $v$  come direzione tangente.



4. Calcoliamo ora le geodetiche di un cilindro circolare retto di raggio  $a$

$$\begin{cases} x = a \cos v \\ y = a \sin v \\ z = u \end{cases},$$

nel punto  $(a, 0, 0)$ . Il sistema delle geodetiche è:

$$\begin{cases} \ddot{u} = 0 \\ \ddot{v} = 0 \end{cases},$$

e ammette come soluzioni  $u(t) = \alpha t + \alpha_1$  e  $v(t) = \beta t + \beta_1$ ; poiché stiamo cercando le geodetiche che per  $t = 0$  passano per  $(a, 0, 0)$ , che corrisponde a  $u = 0, v = 0$ , troviamo  $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ , e quindi le geodetiche hanno equazioni

$$\begin{cases} x = a \cos(\beta t) \\ y = a \sin(\beta t) \\ z = \alpha t \end{cases};$$

si tratta quindi della circonferenza nel piano  $z = 0$  (per  $\alpha = 0$ ), della retta verticale  $x = a, y = 0$  (per  $\beta = 0$ ) e di eliche circolari per tutti gli altri valori di  $\alpha$  e  $\beta$ .

**Osservazione 2.10.23.** Dagli esempi appena visti possiamo osservare che

- Non è vero che una geodetica minimizzi sempre la distanza tra due suoi punti: si prendano ad esempio due punti non antipodali sulla sfera e l'arco maggiore del cerchio massimo che li contiene.

- In generale, dati due punti di una superficie  $S$ , non è detto che esista una geodetica che li congiunga: si consideri a tale scopo la superficie  $S$  costituita dal piano privato di un punto, e siano  $p, q$  simmetrici rispetto a tale punto. Tale esempio mostra anche che, in generale, non è possibile estendere indefinitamente le geodetiche.

**Definizione 2.10.24.** Se per ogni  $p \in S$  e ogni versore tangente  $\mathbf{v} \in T_p S$  la geodetica  $\gamma_{\mathbf{v}} : (-\delta, \delta) \rightarrow S$  tale che  $\gamma(0) = p$  e  $\mathbf{t}_{\gamma} = \mathbf{v}$ , la cui esistenza è garantita dal Corollario (2.10.14), può essere estesa ad una geodetica  $\gamma_{\mathbf{v}} : \mathbb{R} \rightarrow S$  allora  $S$  si dice *geodeticamente completa*.

Sussiste il seguente

**Teorema 2.10.25.** (Hopf-Rinow) *Se  $S$  è geodeticamente completa allora ogni coppia di punti può essere congiunta da una geodetica minimale. Inoltre sono equivalenti i seguenti fatti:*

1.  $S$  è geodeticamente completa.
2. Ogni sottoinsieme chiuso e limitato di  $S$  è compatto.
3. Lo spazio metrico  $(S, d)$  è completo.

## 2.11 TEOREMA DI GAUSS-BONNET

**Lemma 2.11.1.** *Sia  $S$  una superficie,  $p$  un suo punto e  $\alpha$  una curva liscia e regolare su  $S$ , con  $\alpha(0) = p$ ; sia  $\mathbf{P} : \Omega \rightarrow S$  un sistema di coordinate semigeodetiche per  $S$  in un intorno di  $\mathbf{P}$ , come nel Teorema (2.10.16) e sia  $\beta : J \rightarrow \Omega \rightarrow S$  una curva regolare con parametro naturale, di equazioni  $u = u(s), v = v(s)$ . Allora la curvatura geodetica di  $\beta$  si scrive come*

$$k_g = \left( \arctan \left( \frac{\sqrt{g} v'}{u'} \right) \right)' + (\sqrt{g})_u v', \quad (2.11.2)$$

ove  $g := g_{22}$ .

**Dim.** Il versore  $N \wedge \mathbf{t}_{\beta}$  giace nel piano tangente ed è normale a  $\mathbf{t}_{\beta}$ ; ricordando di effettuare il prodotto scalare utilizzando la prima forma fondamentale, troviamo che

$$N \wedge \mathbf{t}_{\beta} = \frac{1}{\sqrt{g}} (-g v' \mathbf{P}_u + u' \mathbf{P}_v)$$

Ora utilizziamo i simboli di Christoffel precedentemente trovati in (2.10.17) per ottenere

$$D_{\beta} \mathbf{t}_{\beta} = \left( u'' - \frac{g_u}{2} (v')^2 \right) \mathbf{P}_u + \left( v'' + \frac{g_u}{g} u' v' + \frac{g_v}{2g} (v')^2 \right) \mathbf{P}_v;$$

Utilizziamo ora la formula (2.10.10) per trovare la curvatura geodetica, calcolando il prodotto scalare  $\mathbf{t}'_\beta \cdot (N \wedge \mathbf{t}_\beta)$  :

$$k_g = \sqrt{g} \left( -u''v' + u'v'' + \frac{g_u}{2}(v')^3 + \frac{g_u}{g}(u')^2v' + \frac{g_v}{2g}u'(v')^2 \right).$$

Calcolando

$$\left( \arctan \left( \frac{\sqrt{g} v'}{u'} \right) \right)' = \sqrt{g} \left( \frac{g_u}{2g}(u')^2v' + \frac{g_v}{2g}u'(v')^2 + u'v'' - u''v' \right),$$

resta da provare che

$$\sqrt{g} \left( \frac{g_u}{2}(v')^3 + \frac{g_u}{2g}(u')^2v' \right) = (\sqrt{g})_u v' = \frac{g_u}{2\sqrt{g}}v'$$

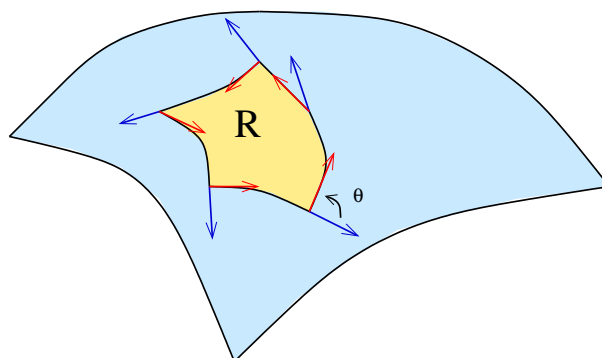
e questo segue dal fatto che  $\|\mathbf{t}_\beta\| = (u')^2 + g(v')^2 = 1$ . □

**Definizione 2.11.3.** Sia  $R = \mathbf{P}(Q)$  una regione semplice di una superficie elementare  $\mathbf{P} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , e  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Allora definiamo l'integrale di  $f$  su  $R$  come

$$\iint_R f := \iint_Q (f \circ \mathbf{P}) \sqrt{\det G} \, dudv.$$

Non è difficile mostrare che la definizione data non dipende dalla parametrizzazione locale.

Siano  $\mathbf{P} : \Omega \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie elementare in  $\mathbb{R}^3$  e  $R \subset S$  una regione semplice, di bordo  $\alpha$ , e siano  $\theta_1, \dots, \theta_k$  gli angoli formati dai vettori tangenti ad  $\alpha$  nei suoi vertici.



**Teorema 2.11.4.** (Gauss-Bonnet versione locale). Vale la seguente uguaglianza

$$\iint_R K + \sum_{i=1}^m \int_{\alpha_i} k_g + \sum_{i=1}^m \theta_i = 2\pi,$$

ove  $K$  è la curvatura di Gauss e  $k_g$  è la curvatura geodetica.



**Dim.** Accenneremo la dimostrazione del Teorema nel caso particolare in cui la regione semplice sia contenuta nell'immagine di una parametrizzazione semigeodetica. Utilizziamo l'espressione della curvatura geodetica fornita dal Lemma (2.11.1) e osserviamo che l'angolo

$$\varphi = \arctan \left( \frac{\sqrt{g} v'}{u'} \right)$$

è l'angolo che il versore tangente di  $\alpha$  forma con il versore  $P_u$ . Si può dimostrare (generalizzando il Teorema delle tangenti di Hopf) che, se  $\alpha$  è regolare, allora  $\int_{\alpha} \varphi' ds = 2\pi$ ; se invece  $\alpha$  è regolare a tratti, allora

$$\int_{\alpha} \varphi' ds = 2\pi - \sum_{i=1}^m \theta_i.$$

Pertanto per concludere la dimostrazione occorre mostrare che

$$\sum_{i=1}^m \int_{\alpha_i} (\sqrt{g})_u v' ds = - \iint_Q K \sqrt{g} dudv$$

Dal Teorema di Stokes abbiamo che

$$\int_{\alpha} (\sqrt{g})_u v' ds = \int_{\alpha} (\sqrt{g})_u dv = \iint_Q (\sqrt{g})_{uu} dudv$$

L'uguaglianza ora segue sviluppando le derivate del termine  $(\sqrt{g})_{uu}$  e ricordando la formula (2.10.18).  $\square$

Consideriamo ora su una superficie  $S$  un *triangolo geodetico*, cioè un triangolo i cui lati sono archi di geodetica, contenuto in una regione semplice, e applichiamo ad esso il teorema di Gauss-Bonnet locale; gli angoli formati dai vettori tangenti nei vertici corrispondono agli angoli esterni del triangolo, perciò, se  $\varphi_1, \varphi_2$  e  $\varphi_3$  sono gli angoli del triangolo avremo

$$\iint_R K + 3\pi - \sum \varphi_i = 2\pi$$

e quindi

$$\sum \varphi_i = \pi + \iint_R K$$

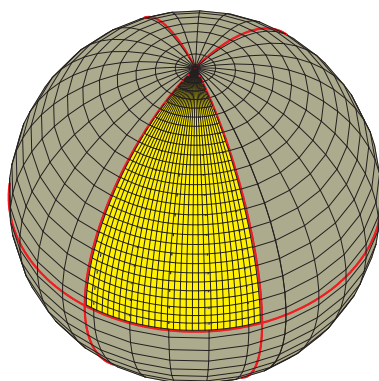
Ad esempio, su una sfera di raggio unitario (curvatura di Gauss costante e uguale a uno):

$$\sum \varphi_i = \pi + A(T)$$

dove  $T$  è l'area del triangolo, e quindi la somma degli angoli interni di un triangolo geodetico è maggiore di  $\pi$ , mentre sulla pseudosfera (curvatura di Gauss costante e uguale a -1):

$$\sum \varphi_i = \pi - A(T)$$

e quindi la somma degli angoli interni di un triangolo geodetico è minore di  $\pi$ .



**Triangolo geodetico sulla sfera**

**Definizione 2.11.5.** Una superficie differenziabile  $S \subset \mathbb{R}^3$  si dice *orientabile* se possiede un atlante costituito da parametrizzazioni a che a due a due determinano la stessa orientazione. Un tale atlante si dice *orientato*.

**Proposizione 2.11.6.** Una superficie  $S$  è orientabile se e solo se è possibile definire un'applicazione continua  $\mathbf{N} : S \rightarrow \mathbf{S}^2$  tale che  $\mathbf{N}(p)$  sia ortogonale a  $T_p S$  per ogni  $p \in S$ . Una tale applicazione è detta *mappa di Gauss per  $S$* .

**Dim.** Sia  $S$  una superficie orientabile e sia  $\mathcal{A}$  un atlante orientato di  $S$ . Definiamo la mappa  $\mathbf{N}$  in questo modo: dato  $p \in S$ , sia  $\mathbf{P}_\alpha$  una superficie elementare nell'atlante  $\mathcal{A}$  il cui sostegno contiene  $p$  e poniamo  $\mathbf{N}(p) = \mathbf{N}_\alpha(p)$ . La mappa  $\mathbf{N}$  è ben definita, in quanto, se  $\mathbf{P}_\beta$  è un'altra superficie elementare il cui sostegno contiene  $p$ , allora  $\mathbf{N}_\alpha = \text{sgn} \det(J(\mathbf{P}_\beta^{-1} \circ \mathbf{P}_\alpha)) \mathbf{N}_\beta$ , e  $\det(J(\mathbf{P}_\beta^{-1} \circ \mathbf{P}_\alpha)) > 0$  perché l'atlante è orientato.

Viceversa, sia  $\mathbf{N} : S \rightarrow \mathbf{S}^2$  un campo di versori normali e sia  $\mathcal{A}$  un atlante di  $S$ . Dato un punto  $p \in S$  e una parametrizzazione  $\mathbf{P}_\alpha$  il cui sostegno contiene  $p$ , si avrà  $\mathbf{N}_\alpha = \pm \mathbf{N}$ . A meno di scambiare le coordinate in  $\Omega_\alpha$  possiamo dunque assumere che  $\mathbf{N}_\alpha = \mathbf{N}$ ; l'atlante così ottenuto è chiaramente orientato.  $\square$

E' possibile dimostrare che una superficie differenziabile  $S$  è orientabile nel senso della Definizione (2.11.5) se e solo se è orientabile come superficie topologica. E' inoltre possibile dimostrare che invece una superficie compatta  $S \subset \mathbb{R}^3$  è necessariamente orientabile. Per il Teorema di classificazione delle superfici compatte sarà quindi omeomorfa ad una somma connessa di  $g \geq 0$  tori.

Ciò premesso, presentiamo ora la versione globale del Teorema di Gauss-Bonnet. A tal fine consideriamo una superficie compatta  $S \subset \mathbb{R}^3$ , ed una sua triangolazione  $\mathcal{T}$ . Siano  $V$  il numero di vertici,  $E$  il numero di spigoli e  $F$  il numero di facce dei triangoli della triangolazione  $\mathcal{T}$ . La *caratteristica di Eulero* di  $(S, \mathcal{T})$  è il numero

$$\chi(S, \mathcal{T}) = V - E + F.$$

E' possibile mostrare che  $\chi(S, \mathcal{T})$  non dipende dalla triangolazione  $\mathcal{T}$ , ma solo dalla superficie  $S$ . In particolare, se  $S \simeq T_g$ , allora  $\chi(S) = 2 - 2g$ .

Scegliamo una triangolazione  $\mathcal{T}$  tale che ogni suo triangolo sia contenuto nell'immagine di una parametrizzazione locale di  $S$  (si può dimostrare che ciò è sempre possibile) e definiamo

$$\iint_S K := \sum \iint_{T_i} K,$$

ove i  $T_i$  sono i triangoli di  $\mathcal{T}$ ; è possibile dimostrare che tale definizione è ben posta: non dipende cioè dalla triangolazione.

**Teorema 2.11.7.** (*Gauss-Bonnet versione globale*)  $S \subset \mathbb{R}^3$  superficie (orientabile) compatta di genere  $g$ ; allora

$$\iint_S K = 2\pi(2 - 2g)$$

**Dim.** Consideriamo una triangolazione coerentemente orientata di  $S$  tale che ogni triangolo sia regolare fuorché nei vertici e sia contenuto in una regione semplice; applichiamo quindi il teorema locale ad ogni triangolo e sommiamo

$$\iint_S K + \sum \int_{\gamma_{ik}} k_g + \sum \theta_{ik} = 2\pi F \quad k = 1, \dots, 3 \quad i = 1, \dots, F$$

Gli integrali sul bordo dei triangoli si cancellano, poiché consideriamo orientazioni opposte sugli spigoli comuni, quindi

$$\iint_S K = 2\pi F - \sum \theta_{ik}$$

Mostriamo ora che

$$\sum \theta_{ik} = 2\pi E - 2\pi V$$

Infatti, sommando prima su ogni triangolo abbiamo che

$$\sum \theta_{ik} = \sum_F (3\pi - \varphi_{ik});$$

Inoltre, si ha che  $3F = 2E$  e che  $\sum \varphi_{ik} = 2\pi V$ ; quindi concludiamo che

$$\iint_S K = 2\pi(F - E + V) = 2\pi\chi(S) = 2\pi(2 - 2g).$$

□



## Capitolo 3

---

# Varietà differenziabili

---

### 3.1 VARIETÀ TOPOLOGICHE

**Definizione 3.1.1.** Uno spazio topologico  $X$  si dice *localmente euclideo* se per ogni suo punto  $x$  esistono un intero  $n$  e un intorno aperto  $U$  omeomorfo a un disco aperto  $n$ -dimensionale  $\mathring{D}^n$  (o, equivalentemente, a  $\mathbb{R}^n$ ). Sia  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathring{D}^n$  l'omeomorfismo; la coppia  $(U, \mathbf{x})$  è detta *carta locale*,  $U$  è detto *dominio* della carta locale. Scriveremo  $\mathbf{x}(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p))$ , dove  $x_1, \dots, x_n : U \rightarrow \mathbb{R}$  sono le componenti di  $\mathbf{x}$ , dette *coordinate locali* in  $U$  definite da  $\mathbf{x}$ . Una carta locale  $\mathbf{x}$  si dice *centrata* in  $p$  se  $\mathbf{x}(p) = (0, \dots, 0)$ .

Diamo senza dimostrazione il seguente:

**Teorema 3.1.2** (Teorema di invarianza della dimensione). *Siano  $U \subset \mathbb{R}^n$  e  $V \subset \mathbb{R}^m$  aperti. Se esiste un omeomorfismo tra  $U$  e  $V$  allora  $n = m$ .*

Dal teorema appena enunciato segue che, se  $X$  è uno spazio topologico localmente euclideo, allora per ogni suo punto  $x$  si può definire la *dimensione locale*  $\dim_x(X)$  nel modo seguente:  $\dim_x(X) = n$  se esiste una carta locale  $(U, \varphi)$  il cui dominio contiene  $x$  tale che  $\varphi$  sia un omeomorfismo tra  $U$  e il disco aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Infatti, se  $(V, \psi)$  è un'altra carta locale che contiene  $x$ , con  $\psi$  omeomorfismo tra  $V$  e il disco aperto di  $\mathbb{R}^m$ , allora  $\psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap V)}$  è un omeomorfismo tra  $\varphi(U \cap V)$  e  $\psi(U \cap V)$ , e quindi  $m = n$ .

**Proposizione 3.1.3.** *Se  $X$  è uno spazio topologico localmente euclideo e connesso, allora la dimensione locale non dipende dal punto, e viene detta dimensione di  $X$ .*

**Dimostrazione.** Poiché  $X$  è connesso è sufficiente provare che la dimensione locale è localmente costante, cioè che, per ogni  $x \in X$  esiste un intorno aperto su cui è costante; infatti una funzione localmente costante a valori interi è continua, se si dota  $\mathbb{N}$  della topologia discreta, e i connessi di tale topologia sono i sottospazi costituiti da un solo punto.

La proprietà cercata segue dal fatto che, dato un punto  $x \in X$ , e una carta locale

$(U, \varphi)$  il cui dominio contiene  $x$ , allora la dimensione locale è costante su  $U$  per il Teorema (3.1.2).  $\square$

**Proposizione 3.1.4.** *Uno spazio topologico connesso e localmente euclideo è connesso per archi.*

**Dimostrazione.** Fissiamo un punto  $p \in X$  e consideriamo il sottoinsieme  $W = \{q \in X \mid \text{esiste un arco congiungente } p \text{ a } q\}$ . Osserviamo che  $W \neq \emptyset$  poiché  $p \in W$ .

Osserviamo che, se  $Y \subset X$  è connesso per archi e  $Y \cap W \neq \emptyset$  allora  $Y \subset W$ ; per mostrarlo fissiamo  $y \in Y \cap W$  e  $\alpha : I \rightarrow X$  cammino tale che  $\alpha(0) = p, \alpha(1) = y$ ; dato  $z \in Y$  esiste un cammino  $\gamma_z : I \rightarrow Y$  tale che  $\gamma_z(0) = y, \gamma_z(1) = z$ , e quindi il cammino prodotto  $\beta_z = \alpha * \gamma_z$  è tale che  $\beta_z(0) = p, \beta_z(1) = z$ .

Sia  $q \in W$  e sia  $U$  un intorno di  $q$  omeomorfo a  $\mathring{D}^n$ ;  $U$  è connesso per archi e  $U \cap W \neq \emptyset$ , quindi  $U \subset W$ , e  $W$  è aperto.

Sia  $q \in W^c$  e sia  $U$  un intorno di  $q$  omeomorfo a  $\mathring{D}^n$ ;  $U$  è connesso per archi e  $U \not\subset W$ , quindi  $U \cap W = \emptyset$  e  $W^c$  è aperto.

Poiché  $W$  è non vuoto, aperto e chiuso nel connesso  $X$  segue che  $W = X$ .  $\square$

**Osservazione 3.1.5.** Uno spazio localmente euclideo non è necessariamente uno spazio di Hausdorff, come mostra l'esempio seguente.

Si consideri lo spazio  $X$  ottenuto come prodotto di  $\mathbb{R}$  con la topologia euclidea e di uno spazio formato da due punti  $a, b$  con la topologia discreta, e sia  $Y$  il quoziente di  $X$  ottenuto identificando i punti  $(x, a)$  e  $(x, b)$  se  $x > 0$ .

Si può dimostrare (esercizio!) che  $Y$  è localmente euclideo, ma non di Hausdorff.

**Definizione 3.1.6.** Uno spazio topologico  $X$  connesso, di Hausdorff, localmente euclideo a base numerabile si dice *varietà topologica*. Un *atlante* per  $X$  è una collezione di carte locali i cui domini costituiscono un ricoprimento di  $X$ .

**Osservazione 3.1.7.** Poiché una varietà topologica è connessa, la sua dimensione è ben definita.

**Esempi 3.1.8.** Alcuni esempi di varietà topologiche.

a)  $\mathbb{R}^n$ .

b)  $\mathbb{C}^n$  (è omeomorfo a  $\mathbb{R}^{2n}$ ).

c)  $\mathbf{S}^n$ . La sfera di dimensione  $n$  è coperta da due aperti omeomorfi a  $\mathbb{R}^n$ :  $U_\alpha = \mathbf{S}^n \setminus \{N = (0, 0, \dots, 0, 1)\}$  e  $U_\beta = \mathbf{S}^n \setminus \{S = (0, 0, \dots, 0, -1)\}$  e gli omeomorfismi  $\mathbf{x}_\alpha$  e  $\mathbf{x}_\beta$  sono così definiti

$$\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_{n+1}) \rightarrow \left( \frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right)$$

$$\mathbf{x}_\beta : U_\beta \rightarrow \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_{n+1}) \rightarrow \left( \frac{x_1}{1+x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1+x_{n+1}} \right)$$

$\mathbf{x}_\alpha$  è continua e la sua inversa (continua) è

$$\mathbf{x}_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow U_\alpha : (y_1, \dots, y_n) \rightarrow \left( \frac{2y_1}{1+\sum y_i^2}, \dots, \frac{2y_n}{1+\sum y_i^2}, \frac{\sum y_i^2 - 1}{1+\sum y_i^2} \right)$$

e analogamente

$$\mathbf{x}_\beta^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow U_\beta : (y_1, \dots, y_n) \rightarrow \left( \frac{2y_1}{1+\sum y_i^2}, \dots, \frac{2y_n}{1+\sum y_i^2}, \frac{1-\sum y_i^2}{1+\sum y_i^2} \right)$$

pertanto  $\mathbf{x}_\alpha$  e  $\mathbf{x}_\beta$  sono omeomorfismi su  $\mathbb{R}^n$ .

d) Il toro è una varietà topologica di dimensione 2.

Sia  $L = \{(m, n) \in \mathbb{R}^2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ , e consideriamo il gruppo quoziente  $\mathbb{R}^2/L$ , con proiezione sul quoziente  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/L$ . Due punti  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  di  $\mathbb{R}^2$  hanno la stessa immagine se e solo se  $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in L$ .

Dotiamo  $\mathbb{R}^2/L$  della topologia quoziente; allora la proiezione  $\pi$  è un'applicazione aperta. Infatti

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{\omega \in L} (\omega + U).$$

Ogni punto di  $\mathbb{R}^2$  è equivalente modulo  $L$  ad un punto contenuto nel quadrato  $Q := [0, 1] \times [0, 1]$ . Due punti di  $Q$  non appartenenti al bordo individuano classi distinte, mentre i punti di  $\partial Q$  sono equivalenti se hanno la stessa ascissa o la stessa ordinata. Ritroviamo così la rappresentazione del toro come quoziente del quadrato.

Sia ora  $\varepsilon < \frac{1}{2}$ , e, per ogni  $\mathbf{x}$  in  $\mathbb{R}^2$  sia

$$B_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \mid |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \varepsilon\}.$$

Per ogni  $\mathbf{x}$ , in  $B_{\mathbf{x}}$  non cadono due punti equivalenti, e perciò la restrizione  $\pi|_{B_{\mathbf{x}}} : B_{\mathbf{x}} \rightarrow \pi(B_{\mathbf{x}})$  è un omeomorfismo.

Consideriamo l'insieme  $\{(U_{\mathbf{x}}, \varphi_{\mathbf{x}})\}$ , ove  $U_{\mathbf{x}} = \pi(B_{\mathbf{x}})$  e  $\varphi_{\mathbf{x}} = (\pi|_{B_{\mathbf{x}}})^{-1}$ . Tale insieme costituisce una famiglia di carte locali i cui domini coprono il toro.

e) In modo analogo all'esempio precedente si mostra che la bottiglia di Klein è una varietà topologica di dimensione 2.

f)  $\mathbb{R}P^n$ . Lo spazio proiettivo reale di dimensione  $n$  è coperto da  $n + 1$  aperti  $U_i$  omeomorfi a  $\mathbb{R}^n$ .

$$U_i = \{p \in \mathbb{R}P^n \mid x_i(p) \neq 0\}$$

e  $\mathbf{x}_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  è definita ponendo

$$\mathbf{x}_i(x_0 : \cdots : x_i : \cdots : x_n) = \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right).$$

L'inversa di  $\mathbf{x}_i$  è  $\mathbf{x}_i^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  così definita:

$$\mathbf{x}_i^{-1}(u_1, \dots, u_n) = (u_1 : \cdots : u_i : 1 : u_{i+1} : \cdots : u_n).$$

- g) Un aperto connesso di una varietà topologica è una varietà topologica.
- h) Il prodotto di varietà topologiche è una varietà topologica, la cui dimensione è la somma delle dimensioni dei fattori.

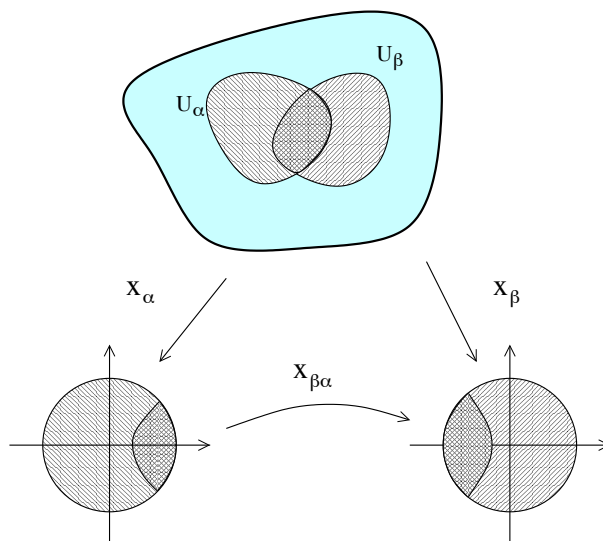
### 3.2 VARIETÀ DIFFERENZIABILI

Data una varietà topologica  $X$  consideriamo due carte  $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$  e  $(U_\beta, \mathbf{x}_\beta)$  tali che  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ; la funzione

$$\mathbf{x}_{\beta\alpha} = \mathbf{x}_\beta \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1} : \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \mathbf{x}_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

è detta *funzione di transizione*.

E' una funzione definita su un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e a valori in  $\mathbb{R}^n$ , quindi ha senso studiarne la differenziabilità.



**Definizione 3.2.1.** Un atlante di classe  $C^k$  è un atlante tale che tutte le funzioni di transizione siano  $C^k$ . Se  $k = \infty$  si dirà che le funzioni di transizione e l'atlante sono *lisci*.

**Definizione 3.2.2.** Due atlanti di classe  $C^k$  si dicono *equivalenti* se la loro unione è ancora un atlante di classe  $C^k$ . Una classe di equivalenza di atlanti di classe  $C^k$  è detta *struttura differenziabile* di classe  $C^k$  su  $X$ .



L'unione di tutti gli atlanti di una struttura differenziabile è ancora un atlante, detto *atlante universale*.

**Definizione 3.2.3.** Una *varietà differenziabile* di classe  $C^k$  (liscia) è una varietà topologica dotata di un atlante differenziabile di classe  $C^k$  (liscio), o equivalentemente, di una struttura differenziabile di classe  $C^k$  (liscia).

**Esempi 3.2.4.**

- a)  $\mathbb{R}^n$ . Un atlante è costituito da una sola carta  $(U, \mathbf{x}) = (\mathbb{R}^n, \text{Id}_{\mathbb{R}^n})$ .
- b)  $\mathbb{C}^n$ . Un atlante è costituito da una sola carta  $(\mathbb{C}^n, \mathbf{x})$ , dove  $\mathbf{x}(z_1, \dots, z_n) = (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ .
- c)  $S^n$ . Un atlante differenziabile su  $S^n$  è dato da  $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha), (U_\beta, \mathbf{x}_\beta)\}$  come nell'esempio (3.1.8) c). Verifichiamo la differenziabilità delle funzioni di transizione:  $U_\alpha \cap U_\beta = S^n \setminus \{N, S\}$ ,  $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) = \mathbf{x}_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\mathbf{x}_\alpha \circ \mathbf{x}_\beta^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : (y_1, \dots, y_n) \rightarrow \left( \frac{y_1}{\sum y_i^2}, \dots, \frac{y_n}{\sum y_i^2} \right)$$

$$\mathbf{x}_\beta \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : (y_1, \dots, y_n) \rightarrow \left( \frac{y_1}{\sum y_i^2}, \dots, \frac{y_n}{\sum y_i^2} \right)$$

Poiché le funzioni di transizione sono  $C^\infty$  le due carte costituiscono un atlante differenziabile liscio.

- d) Il toro, definito come nell'Esempio (3.1.8) d) è una varietà differenziabile. E' semplice verificare che le funzioni di transizione dell'atlante considerato in tale esempio sono traslazioni di  $\mathbb{R}^2$ , quindi infinitamente differenziabili.
- e) Sia  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie differenziabile nel senso della Definizione (2.1.17), e sia  $\mathcal{A} = \{\mathbf{P}_\alpha : \Omega_\alpha \rightarrow S\}$  un atlante di  $S$  costituito da superfici elementari. Allora  $\{(U_\alpha := \mathbf{P}_\alpha(\Omega_\alpha), \mathbf{x}_\alpha := \mathbf{P}_\alpha^{-1})\}$  è un atlante differenziabile liscio per  $S$ , in virtù del Teorema (2.3.2).
- f)  $\mathbb{R}P^n$ . Consideriamo l'atlante descritto nell'esempio (3.1.8) g). La funzione di transizione  $\mathbf{x}_{ji} = \mathbf{x}_j \circ \mathbf{x}_i^{-1}$  è così definita

$$\mathbf{x}_{ij}(u_1, \dots, u_n) = \left( \frac{u_1}{u_j} : \dots : \frac{u_{i-1}}{u_j} : \frac{1}{u_j} : \frac{u_{i+1}}{u_j} : \dots : \frac{u_{j-1}}{u_j} : \frac{u_{j+1}}{u_j} : \dots : \frac{u_n}{u_j} \right)$$

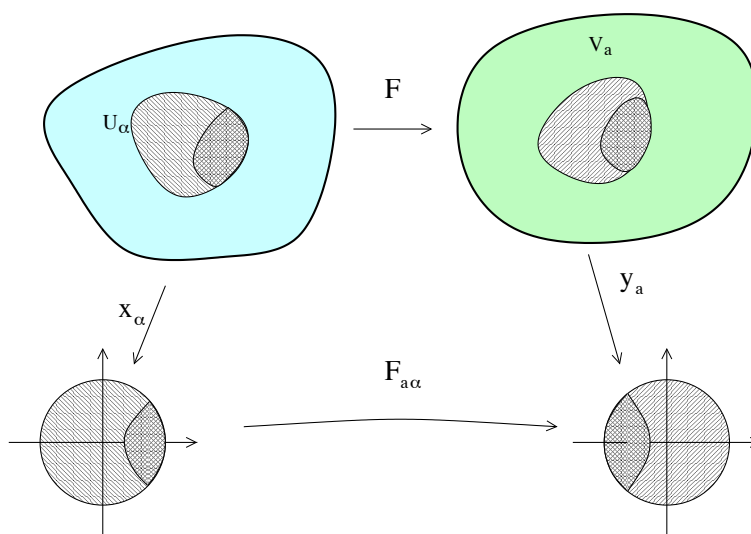
ed è infinitamente differenziabile in  $\mathbf{x}_j(U_i \cap U_j)$ , dove  $u_i \neq 0$ .

- g) Un aperto connesso di una varietà differenziabile è una varietà differenziabile. In particolare un intervallo aperto di  $\mathbb{R}$  è una varietà differenziabile.
- h) Il prodotto di due varietà differenziabili è una varietà differenziabile.
- i) Consideriamo  $\mathbb{R}$  come varietà differenziabile liscia con l'atlante costituito dalla carta  $(\mathbb{R}, \sqrt[3]{t})$ ; tale atlante non è equivalente all'atlante  $(\mathbb{R}, \text{Id}_{\mathbb{R}})$ , e definisce pertanto una diversa struttura differenziabile.

3.3 FUNZIONI E APPLICAZIONI DIFFERENZIABILI

**Definizione 3.3.1.** Sia  $X$  una varietà differenziabile (liscia) e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua;  $f$  si dice *differenziabile* di classe  $\mathcal{C}^k$  (liscia) in  $p \in X$  se esiste una carta locale  $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$  il cui dominio contiene  $p$ , tale che la funzione reale  $f_\alpha = f \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1} : \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}$  è differenziabile di classe  $\mathcal{C}^k$  (liscia) in  $\mathbf{x}_\alpha(p)$ . Tale funzione si dice *espressione locale* di  $f$  nella carta  $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ .

Osserviamo che, se  $(U_\beta, \mathbf{x}_\beta)$  è un'altra carta locale il cui dominio contiene  $p$ , allora  $f_\beta = f \circ \mathbf{x}_\beta^{-1} = f \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha \circ \mathbf{x}_\beta^{-1} = f_\alpha \circ \mathbf{x}_{\alpha\beta}$  è differenziabile di classe  $\mathcal{C}^k$  (liscia) in quanto composizione di funzioni differenziabili di classe  $\mathcal{C}^k$  (liscie).



**Definizione 3.3.2.** Analogamente, se  $X$  e  $Y$  sono due varietà differenziabili di dimensioni  $n$  ed  $m$ , un'applicazione continua  $F : X \rightarrow Y$  si dice *differenziabile* di classe  $\mathcal{C}^k$  (liscia) in  $p \in X$  se una sua espressione locale  $F_{\alpha\alpha} = \mathbf{y}_\alpha \circ F \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1} : \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha \cap F^{-1}(V_\alpha)) \rightarrow \mathbb{R}^m$  è differenziabile di classe  $\mathcal{C}^k$  (liscia) in  $\mathbf{x}_\alpha(p)$ .

**Osservazione 3.3.3.** Anche in questo caso la differenziabilità di  $F$  in  $p$  è equivalente alla differenziabilità di ogni espressione locale. Infatti è semplice verificare che la relazione tra due diverse espressioni locali di  $F$  è la seguente:

$$F_{b\beta} = \mathbf{y}_{b\alpha} \circ F_{\alpha\alpha} \circ \mathbf{x}_{\alpha\beta}.$$

**Esempio 3.3.4.** Sia  $X$  una varietà differenziabile liscia, e sia  $(U, \mathbf{x})$  una carta locale con componenti  $x_1, \dots, x_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Le funzioni  $x_i$  sono lisce. Infatti l'espressione locale di  $x_i$  è la proiezione  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sull' $i$ -esima coordinata.

**Esempio 3.3.5.** Come caso particolare dell'esempio precedente, su  $\mathbb{R}$  con l'atlante costituito dalla carta  $(\mathbb{R}, \sqrt[3]{t})$  la funzione  $\sqrt[3]{t}$  è una funzione liscia!

**Esempio 3.3.6.** Consideriamo l'applicazione  $F : \mathbb{RP}^1 \rightarrow \mathbb{RP}^1$  definita ponendo

$$F([x_0 : x_1]) = [x_1 : x_0].$$

Per verificare la differenziabilità di tale applicazione dobbiamo considerare le sue espressioni locali. Siano dunque  $U_0$  e  $U_1$  le carte sullo spazio di partenza e  $V_0, V_1$  quelle sullo spazio di arrivo; denotiamo inoltre con  $x_0, x_1$  le coordinate nello spazio di partenza e con  $y_0, y_1$  quelle nello spazio di arrivo.

Calcoliamo l'espressione locale  $F_{00} : \mathbf{x}_0(U_0 \cap F^{-1}(V_0)) \rightarrow \mathbf{y}_0(F(U_0) \cap V_0)$ .

E' immediato verificare che  $F(U_0) = V_1, F(U_1) = V_0$  e, essendo  $F$  biunivoca  $F^{-1}(V_0) = U_1$  e  $F^{-1}(V_1) = U_0$ , e quindi dominio e codominio di  $F_{00}$  sono dati rispettivamente da  $\mathbf{x}_0(U_0 \cap U_1)$  e  $\mathbf{y}_0(V_0 \cap V_1)$

$$\mathbf{x}_0(U_0 \cap U_1) \xrightarrow{\mathbf{x}_0^{-1}} U_0 \cap U_1 \xrightarrow{F} V_0 \cap V_1 \xrightarrow{\mathbf{y}_0} \mathbf{y}_0(V_0 \cap V_1)$$

$$z \longmapsto [1 : z] \longmapsto [z : 1] \longmapsto \frac{1}{z}$$

L'aperto  $\mathbf{x}_0(U_0 \cap U_1)$  non contiene  $z = 0$ , quindi  $F_{00}$  è una funzione liscia.

Calcoliamo ora l'espressione locale  $F_{10} : \mathbf{x}_1(U_1 \cap F^{-1}(V_0)) \rightarrow \mathbf{y}_0(F(U_1) \cap V_0)$ , che, per le considerazioni precedenti ha come dominio e codominio  $\mathbf{x}_1(U_1)$  e  $\mathbf{y}_0(V_0)$  rispettivamente.

$$\mathbf{x}_1(U_1) \xrightarrow{\mathbf{x}_1^{-1}} U_1 \xrightarrow{F} V_0 \xrightarrow{\mathbf{y}_0} \mathbf{y}_0(V_0)$$

$$z \longmapsto [z : 1] \longmapsto [1 : z] \longmapsto z$$

Analogamente si scrivono le espressioni locali  $F_{01}$  e  $F_{11}$  e si verifica che si tratta di funzioni lisce.

**Definizione 3.3.7.** Un'applicazione tra varietà differenziabili  $F : X \rightarrow Y$  che sia biunivoca e differenziabile di classe  $\mathcal{C}^k$  (liscia) con inversa differenziabile di classe  $\mathcal{C}^k$  (liscia) è detta *diffeomorfismo* di classe  $\mathcal{C}^k$  (liscio).

**Esempio 3.3.8.** L'applicazione dell'esempio precedente è invertibile e coincide con la sua inversa. Le verifiche precedenti implicano quindi che  $F$  è un diffeomorfismo (liscio) di  $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$  in sè.

### 3.4 SPAZIO TANGENTE

Sia  $X$  una varietà differenziabile liscia e  $p \in X$  un suo punto. Per ogni intorno aperto  $U$  di  $p$  poniamo

$$\mathcal{E}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ liscia}\}.$$

Diremo inoltre che  $f$  è *localmente liscia* in  $p$  se  $f \in \mathcal{E}(U)$  per qualche intorno aperto  $U$  di  $p$ .

Introduciamo ora una relazione di equivalenza nell'insieme delle funzioni localmente lisce in  $p$  in questo modo: se  $f \in \mathcal{E}(U)$  e  $g \in \mathcal{E}(V)$  diremo che  $f$  è equivalente a  $g$  se esiste un intorno  $W$  di  $p$  tale che  $W \subset U \cap V$  e  $f|_W = g|_W$ .

La classe di equivalenza di funzioni localmente lisce in  $p$  rappresentata da  $f$  si indica con  $[f]$  e si dice *germe liscio* in  $p$ ; l'insieme quoziente rispetto a tale relazione di equivalenza si indica con  $\mathcal{E}_p$  e si dice *spiga* su  $p$ .

Nell'insieme  $\mathcal{E}_p$  si possono introdurre due operazioni:

$$[f] + [g] := [f + g]$$

$$[f] \cdot [g] := [f \cdot g]$$

rispetto alle quali l'insieme  $\mathcal{E}_p$  risulta essere un anello commutativo dotato di unità. L'introduzione del prodotto esterno

$$\lambda[f] := [\lambda f]$$

rende  $\mathcal{E}_p$  una  $\mathbb{R}$ -algebra, l'algebra dei germi lisce in  $p$ .

**Definizione 3.4.1.** Un *vettore tangente* ad  $X$  nel punto  $p$  è una derivazione su  $\mathcal{E}_p$ , cioè un'applicazione  $\mathbf{v} : \mathcal{E}_p \rightarrow \mathbb{R}$  con le seguenti proprietà:

1.  $\mathbf{v}$  è lineare.
2.  $\mathbf{v}([f][g]) = f(p)\mathbf{v}([g]) + \mathbf{v}([f])g(p)$ .

**Definizione 3.4.2.** L'insieme dei vettori tangenti nel punto  $p$  alla varietà differenziabile  $X$  prende il nome di *spazio tangente* ad  $X$  in  $p$  e si indica con  $T_p X$ .

**Osservazione 3.4.3.** Per ogni coppia di vettori tangenti  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  e per ogni scalare  $\lambda \in \mathbb{R}$  è possibile definire una somma e un prodotto per uno scalare

$$(\mathbf{v} + \mathbf{w})([f]) := \mathbf{v}([f]) + \mathbf{w}([f])$$

$$(\lambda \mathbf{v})([f]) := \lambda \mathbf{v}([f]),$$

e questo mostra che lo spazio tangente in un punto ad una varietà differenziabile è uno spazio vettoriale reale.

**Definizione 3.4.4.** Sia  $p \in X$  un punto di una varietà differenziabile liscia e  $(U, \mathbf{x})$  una carta locale con coordinate locali  $(x_1, \dots, x_n)$ , tale che  $p \in U$ . Definiamo  $n$  funzioni  $(\frac{\partial}{\partial x_i})_p : \mathcal{E}_p \rightarrow \mathbb{R}$  in questo modo: dato  $[f] \in \mathcal{E}_p$ , allora

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p([f]) := \frac{\partial(f \circ \mathbf{x}^{-1})}{\partial u_i}(\mathbf{x}(p)), \quad (3.4.5)$$

dove le  $u_i$  sono le coordinate in  $\mathbb{R}^n$ . E' semplice verificare che la definizione è ben posta e che le funzioni  $(\frac{\partial}{\partial x_i})_p$  sono derivazioni su  $\mathcal{E}_p$ .

**Osservazione 3.4.6.** Dalla definizione appena data segue immediatamente che  $(\frac{\partial}{\partial x_i})_p([x_j]) = \delta_{ij}$ , dove  $\delta_{ij} = 0$  se  $i \neq j$  e  $\delta_{ij} = 1$  se  $i = j$ . Infatti

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p([x_j]) = \frac{\partial(x_j \circ \mathbf{x}^{-1})}{\partial u_i}(\mathbf{x}(p)) = \frac{\partial u_j}{\partial u_i}(\mathbf{x}(p))$$

da cui l'asserto.

Mostriamo ora che gli  $n$  vettori tangenti appena definiti costituiscono una base per lo spazio tangente  $T_p X$ . Nella dimostrazione utilizzeremo il seguente

**Lemma 3.4.7.** Sia  $p$  un punto di  $X$ ,  $f \in \mathcal{E}(V)$  con  $p \in V$  e  $(U, \mathbf{x})$  carta locale che contiene  $p$  con coordinate locali  $(x_1, \dots, x_n)$ ; sia  $\mathbf{x}(p) = \mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$ . Allora esistono un intorno  $W \subset U \cap V$ ,  $n$  funzioni  $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{E}(W)$  tali che, se  $p' \in W$  allora

$$f(p') = f(p) + \sum_{i=1}^n (x_i(p') - c_i) f_i(p');$$

Inoltre  $f_i(p) = (\frac{\partial}{\partial x_i})_p([f])$ .

**Dim.** Scegliamo un disco  $B_\delta(\mathbf{c})$  tale che  $B_\delta(\mathbf{c}) \subset \mathbf{x}(U \cap V)$  e sia  $W = \mathbf{x}^{-1}(B_\delta(\mathbf{c}))$ ; sia  $p'$  un punto di  $W$ , sia  $\mathbf{x}(p') = \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$  e sia  $g = f \circ \mathbf{x}^{-1}$  l'espressione locale di  $f$  in  $U$ . Definiamo infine  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , ponendo  $\alpha(\tau) = g(\mathbf{c} + \tau(\mathbf{b} - \mathbf{c}))$ . Si ha che

$$\alpha'(\tau) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial u_i}((\mathbf{c} + \tau(\mathbf{b} - \mathbf{c}))) (b_i - c_i);$$

poniamo

$$g_i(\mathbf{b}) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial u_i}((\mathbf{c} + \tau(\mathbf{b} - \mathbf{c}))) d\tau;$$

per il teorema fondamentale del calcolo possiamo scrivere

$$g(\mathbf{b}) - g(\mathbf{c}) = \alpha(1) - \alpha(0) = \int_0^1 \alpha'(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^n g_i(\mathbf{b})(b_i - c_i).$$

Pertanto, posto  $f_i = g_i \circ \mathbf{x}$  avremo

$$f(p') - f(p) = \sum_{i=1}^n f_i(p')(x_i(p') - x_i(p)).$$

Inoltre  $f_i(p) = g_i(\mathbf{c}) = \frac{\partial g}{\partial u_i}(\mathbf{c}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p([f])$ .  $\square$

**Teorema 3.4.8.** *Lo spazio vettoriale tangente  $T_p X$  ad una varietà differenziabile liscia di dimensione  $n$  in un punto  $p \in X$  è uno spazio vettoriale reale di dimensione  $n$ .*

*Data una carta locale  $(U, \mathbf{x})$  con coordinate locali  $(x_1, \dots, x_n)$  una base per  $T_p X$  è costituita dai vettori tangenti  $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p$ .*

**Dim.** Sia  $\mathbf{v} \in T_p X$ ; innanzitutto mostriamo che  $\mathbf{v}([1]) = 0$ ; infatti

$$\mathbf{v}([1]) = \mathbf{v}([1] \cdot [1]) = \mathbf{v}([1]) + \mathbf{v}([1]).$$

Sia ora  $[f] \in \mathcal{E}_p$ ; per il Lemma (3.4.7) possiamo scrivere

$$[f] = f(p)[1] + \sum_{i=1}^n ([x_i] - c_i[1])[f_i]$$

e quindi

$$\mathbf{v}([f]) = \sum_{i=1}^n f_i(p)\mathbf{v}([x_i] - c_i[1]) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p([f])\mathbf{v}([x_i]).$$

Possiamo quindi scrivere

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}([x_i]) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \quad (3.4.9)$$

e quindi abbiamo mostrato che  $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p$  costituiscono un sistema di generatori per  $T_p X$ .

Per mostrare l'indipendenza lineare scriviamo il vettore nullo come combinazione lineare di  $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p$

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^n \mu_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p;$$

poiché  $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p([x_j]) = \delta_{ij}$ , applicando il vettore nullo al germe  $[x_j]$

$$0 = \mathbf{0}([x_j]) = \sum_{i=1}^n \mu_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p([x_j]) = \mu_j$$

troviamo che  $\mu_j = 0 \quad \forall j$ , e quindi i vettori  $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p$  sono linearmente indipendenti.  $\square$

**Osservazione 3.4.10.** Sia  $\mathbf{v} \in T_p X$  un vettore tangente;  $\mathbf{v}$  si può scrivere utilizzando la base  $(\frac{\partial}{\partial x_1})_p, \dots, (\frac{\partial}{\partial x_n})_p$  come

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v_i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p.$$

Notiamo che, in virtù della (3.4.9) i coefficienti si ottengono applicando  $\mathbf{v}$  alle funzioni coordinate:  $v_i = \mathbf{v}([x_i])$ .

Vediamo ora una interpretazione geometrica dei vettori tangenti che li lega a curve sulla varietà differenziabile

**Definizione 3.4.11.** Una *curva differenziabile* di classe  $C^k$  in  $X$  è una applicazione differenziabile  $\gamma : J \rightarrow X$  di classe  $C^k$ , dove  $J$  è un intervallo di  $\mathbb{R}$ ; se  $J$  non è aperto si assume che  $\gamma$  sia definita e di classe  $C^k$  su un intervallo aperto contenente  $J$ .

Sia  $\gamma$  una curva differenziabile liscia definita su un intervallo  $J$  che contiene 0 e tale che  $\gamma(0) = p$ ; e sia  $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$  una carta locale il cui dominio contiene  $p$ .

Alla curva  $\gamma$  si può associare un elemento  $\gamma_*$  di  $T_p X$  in questo modo:

$$\gamma_*([f]) = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \Big|_{t=0}.$$

Viceversa, se  $\mathbf{v} \in T_p X$  è un vettore tangente,  $\mathbf{v} = \sum v_i (\frac{\partial}{\partial x_{i\alpha}})_p$  allora la curva  $\gamma_{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{x}_\alpha^{-1}(x_{1\alpha}(p) + tv_1, \dots, x_{n\alpha}(p) + tv_n)$  è tale che  $\gamma_{\mathbf{v}*} = \mathbf{v}$  (verificarlo!); la curva  $\gamma_{\mathbf{v}}$  con questa proprietà non è unica.

Siano  $\gamma_{i\alpha} : J \rightarrow \mathbb{R}$  le componenti di  $\gamma_\alpha = \mathbf{x}_\alpha \circ \gamma$ ; il vettore tangente  $\gamma_*$  si può scrivere sulla base  $(\frac{\partial}{\partial x_{1\alpha}})_p, \dots, (\frac{\partial}{\partial x_{n\alpha}})_p$ , ed i suoi coefficienti, ricordando l'Osservazione (3.4.10) sono dati da  $\gamma_*([x_{i\alpha}])$ .

Per definizione

$$\gamma_*([x_{i\alpha}]) = \frac{d(x_{i\alpha} \circ \gamma)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d\gamma_{i\alpha}}{dt} \Big|_{t=0} = \dot{\gamma}_{i\alpha}(0)$$

e quindi

$$\gamma_* = \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_{i\alpha}(0) \left( \frac{\partial}{\partial x_{i\alpha}} \right)_p. \quad (3.4.12)$$

Cosa succede cambiando carta? Scegliamo un'altra carta  $(U_\beta, \mathbf{x}_\beta)$  che contiene  $p$ , con coordinate locali  $(x_{1\beta}, \dots, x_{n\beta})$ . In tale carta la curva ha un'altra espressione locale  $\gamma_\beta = \mathbf{x}_\beta \circ \gamma$ , con componenti  $\gamma_{j\beta}$ ; il vettore tangente  $\gamma_*$  si scriverà, sulla base  $(\frac{\partial}{\partial x_{1\beta}})_p, \dots, (\frac{\partial}{\partial x_{n\beta}})_p$  come  $\gamma_* = \sum_{j=1}^n \dot{\gamma}_{j\beta}(0) (\frac{\partial}{\partial x_{j\beta}})_p$ .

Qual è la relazione che lega questi due vettori? Dalla relazione  $\gamma_\beta(t) = \mathbf{x}_{\beta\alpha}(\gamma_\alpha(t))$  otteniamo

$$\dot{\gamma}_\beta(t) = J(\mathbf{x}_{\beta\alpha}) \cdot \dot{\gamma}_\alpha(t). \quad (3.4.13)$$

3.5 DIFFERENZIALE E APPLICAZIONI

**Definizione 3.5.1.** Siano  $X$  e  $Y$  varietà differenziabili e  $F : X \rightarrow Y$  un'applicazione differenziabile; sia  $p$  un punto di  $X$  e  $p' = F(p)$ . L'applicazione  $F$  induce un'applicazione

$$d_p F : T_p X \rightarrow T_{p'} Y$$

definita ponendo

$$d_p F(\mathbf{v})([f]) := \mathbf{v}([f \circ F]);$$

tale applicazione è detta *differenziale* di  $F$  in  $p$ . È immediato verificare che il differenziale di  $F$  in  $p$  è un'applicazione lineare tra spazi vettoriali.

**Proposizione 3.5.2.** Siano  $X$  e  $Y$  varietà differenziabili lisce e  $F : X \rightarrow Y$  un'applicazione differenziabile; sia  $p$  un punto di  $X$  e  $p' = F(p)$ ; siano  $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$  e  $(V_a, \mathbf{y}_a)$  carte locali contenenti rispettivamente  $p$  e  $p'$ ; allora la matrice associata al differenziale  $d_p F$ , rispetto alle basi di  $T_p X$  e  $T_{p'} Y$  date da  $\left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x_{1\alpha}} \right)_p, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial x_{n\alpha}} \right)_p \right\}$  e  $\left\{ \left( \frac{\partial}{\partial y_{1a}} \right)_{p'}, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial y_{ma}} \right)_{p'} \right\}$  è la matrice Jacobiana dell'espressione locale  $F_{a\alpha}$  di  $F$ .

**Dim.** Per trovare la matrice dell'applicazione lineare  $d_p F$  calcoliamo le immagini dei vettori della base di  $T_p X$ . La componente  $i$ -esima di  $d_p F \left( \left( \frac{\partial}{\partial x_{j\alpha}} \right)_p \right)$  si trova applicando  $d_p F \left( \left( \frac{\partial}{\partial x_{j\alpha}} \right)_p \right)$  a  $y_{ia}$ :

$$\begin{aligned} d_p F \left( \left( \frac{\partial}{\partial x_{j\alpha}} \right)_p \right) ([y_{ia}]) &= \left( \frac{\partial}{\partial x_{j\alpha}} \right)_p ([y_{ia} \circ F]) = \\ &= \frac{\partial (y_{ia} \circ F \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1})}{\partial u_j} (\mathbf{x}_\alpha(p)) = [J(F_{a\alpha})_{\mathbf{x}_\alpha(p)}]_{ij} \end{aligned}$$

dove  $J(F_{a\alpha})_{\mathbf{x}_\alpha(p)}$  è la matrice jacobiana in  $\mathbf{x}_\alpha(p)$  della funzione  $F_{a\alpha} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , espressione locale di  $F$  rispetto alle carte  $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$  e  $(V_a, \mathbf{y}_a)$ .  $\square$

Siano  $(U_\beta, \mathbf{x}_\beta)$  e  $(V_b, \mathbf{y}_b)$  altre carte contenenti  $p$  e  $p'$ ; l'espressione locale di  $d_p F$  in queste carte è data da

$$d_p F(\mathbf{v}) = J(F_{b\beta})_{\mathbf{x}_\beta(p)} \cdot \mathbf{v}.$$

Poiché  $F_{b\beta} = \mathbf{y}_{ba} \circ F_{a\alpha} \circ \mathbf{x}_{\alpha\beta}$ , si ha

$$J(F_{b\beta})_{\mathbf{x}_\beta(p)} = J(\mathbf{y}_{ba})_{\mathbf{y}_a(F(p))} \cdot J(F_{a\alpha})_{\mathbf{x}_\alpha(p)} \cdot J(\mathbf{x}_{\alpha\beta})_{\mathbf{x}_\beta(p)}. \quad (3.5.3)$$

Le matrici  $J(\mathbf{x}_{\alpha\beta})_{\mathbf{x}_\beta(p)}$  e  $J(\mathbf{y}_{ba})_{\mathbf{y}_a(F(p))}$  corrispondono a cambiamenti di base in  $T_p X$  e  $T_{F(p)} Y$ .

**Osservazione 3.5.4.** Sia  $F : X \rightarrow Y$  un'applicazione differenziabile liscia tra varietà lisce, sia  $p \in X$  e sia  $\gamma : J \rightarrow X$  una curva liscia tale che  $\gamma(0) = p$ . A tale curva è associato un vettore tangente  $\gamma_*$ ; applicando il differenziale di  $F$  in  $p$  a tale vettore, se  $f$  è una funzione localmente liscia in  $F(p)$ , abbiamo



$$d_p F(\gamma_*)[f] = \gamma_*(f \circ F) = \frac{d(f \circ F \circ \gamma)}{dt} \Big|_{t=0} = (F \circ \gamma)_*([f]),$$

cioè l'immagine del vettore  $\gamma_*$  è il vettore associato alla curva  $F \circ \gamma$ .

**Definizione 3.5.5.** Un'applicazione differenziabile  $F : X \rightarrow Y$  si dice *immersiva* in  $p \in X$  se l'applicazione lineare  $d_p F : T_p X \rightarrow T_{F(p)} Y$  è iniettiva; si dice invece *sommersiva* in  $p$  se  $d_p F$  è suriettiva. L'applicazione  $F$  è un'*immersione* (*sommersione*) se è immersiva (*sommersiva*) per ogni  $p \in X$ .

**Definizione 3.5.6.**  $F$  è un'*embedding* se è un'immersione ed è un omeomorfismo sull'immagine ( $X \simeq F(X)$  con la topologia indotta da  $Y$ ).

### Esempi 3.5.7.

1. Immersione canonica di  $\mathbb{R}^k$  in  $\mathbb{R}^n$ , con  $k \leq n$

$$(x_1, \dots, x_k) \mapsto (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$$

2. Sommersione canonica di  $\mathbb{R}^n$  su  $\mathbb{R}^k$ , con  $k \leq n$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_k)$$

3.  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da  $F(t) = t^3$  non è immersiva in 0.
4.  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita ponendo  $F(t) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$  (Cf. Figura 1) è un'immersione, ma non un'embedding, perché non è un'applicazione iniettiva.
5.  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita ponendo  $F(t) = (t^2, t^3)$  (Cf. Figura 2) non è immersiva in 0.

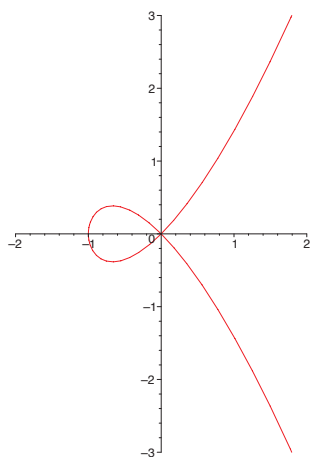


Figura 1

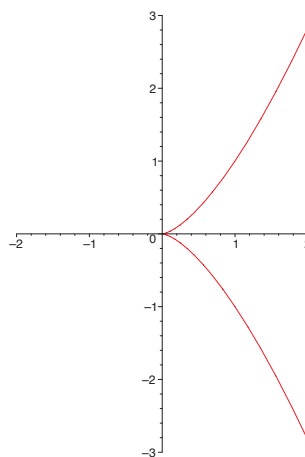
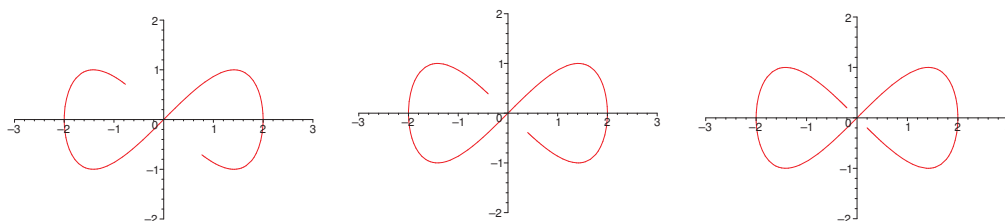


Figura 2

6.  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F(t) = (t, t^2)$  è un'embedding.
7.  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$   $F(t) = (2 \cos(2 \arctan(t) + \pi/2), \sin(4 \arctan(t) + \pi))$ .  
 $F$  è immersiva ed iniettiva, ma non è un'embedding, perché non c'è un intorno di  $F(0) = (0, 0)$  in  $F(\mathbb{R})$  con la topologia indotta che sia omeomorfo a un intorno di  $0 \in \mathbb{R}$ .



Una condizione sufficiente perché un'immersione iniettiva  $F : X \rightarrow Y$  sia un'embedding è la compattezza di  $X$ :

**Proposizione 3.5.8.** *Sia  $F : X \rightarrow Y$  un'immersione iniettiva. Se  $X$  è compatta, allora  $F$  è un'embedding.*

**Dim.** L'applicazione  $F : X \rightarrow F(X)$  è biunivoca e continua. Poiché  $X$  è uno spazio topologico compatto e  $Y$  è di Hausdorff, anche  $F^{-1}$  è continua.  $\square$

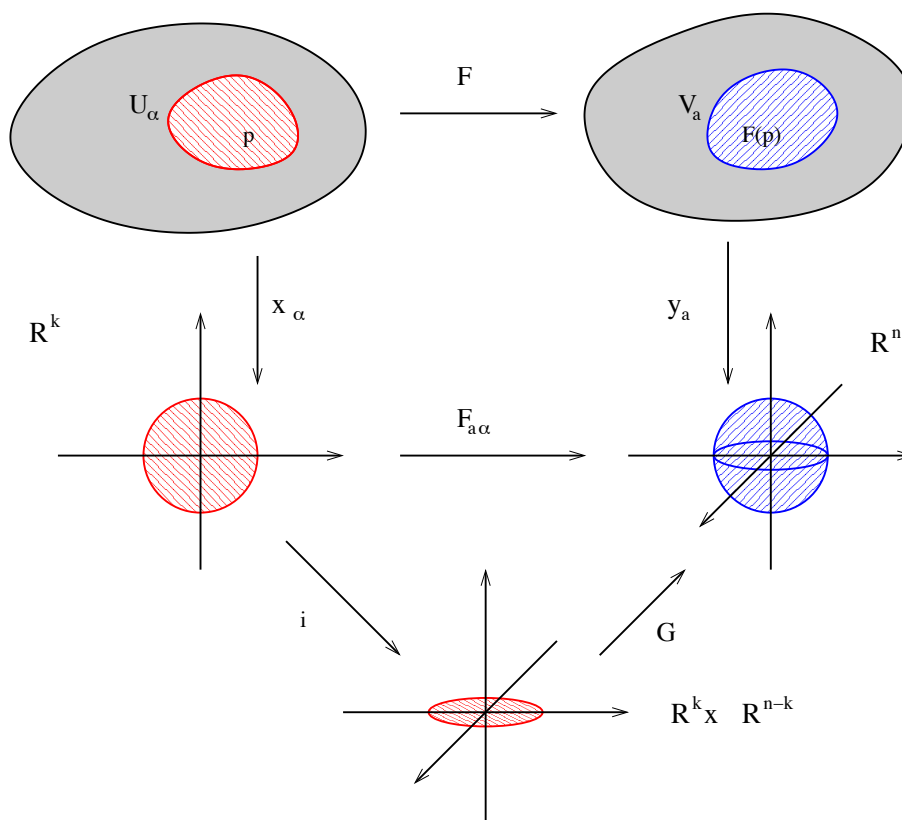
Mostreremo ora che un'immersione (rispettivamente una sommersione) hanno espressioni locali come negli Esempi (3.5.7) 1. e 2.

**Teorema 3.5.9.** *Sia  $F : X \rightarrow Y$  un'applicazione liscia, immersiva in  $p \in X$ , e siano  $k = \dim X$ ,  $n = \dim Y$ . Allora esistono carte  $(U, \mathbf{x})$  e  $(V, \mathbf{y})$  centrate in  $p$  ed  $F(p)$  tali che l'espressione locale di  $F$  in tali carte sia l'immersione canonica di  $\mathbb{R}^k$  in  $\mathbb{R}^n$ .*

**Dim.** Siano  $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$  e  $(V_a, \mathbf{y}_a)$  due carte locali centrate in  $p$  e  $F(p)$ , e sia  $F_{a\alpha}$  l'espressione locale di  $F$  in tali carte. Per l'ipotesi di immersività abbiamo che  $\dim \text{Im}(d_p F) = k$ ; a meno di uno scambio di coordinate possiamo supporre che una sottomatrice di  $J(F_{a\alpha})$  che realizza il rango sia quella costituita dalle prime  $k$  righe, cioè

$$J(F_{a\alpha}) = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \quad \text{con } \det A \neq 0$$

Definiamo una mappa  $G : \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha \cap F^{-1}(V_a)) \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^n$  come  $G(\mathbf{u}, \mathbf{t}) = F_{a\alpha}(\mathbf{u}) + (0, \mathbf{t})$ .



Osserviamo che  $F_{a\alpha} = G \circ i$ , dove  $i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  è l'immersione canonica. lo Jacobiano di  $G$  in  $(\mathbf{x}_\alpha(p), \mathbf{0})$  è dato da

$$J(G) = \left[ \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline B & I \end{array} \right],$$

ed è quindi invertibile in  $\mathbf{0}$ ; applicando a  $G$  il Teorema (2.3.1) troviamo che esistono intorno  $\tilde{U}$  e  $\tilde{V}$  di  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$  su cui  $G$  è un diffeomorfismo. A meno di restringere tali intorno possiamo assumere che  $G(\tilde{U}) \subset y_\alpha(V_\alpha)$ .

Siano  $V = y_\alpha^{-1}(G(\tilde{U}))$  e  $\mathbf{y} = G^{-1} \circ y_\alpha$ . L'espressione locale di  $F$  nelle carte  $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$  e  $(V, \mathbf{y})$  è data da

$$\mathbf{y} \circ F \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1} = G^{-1} \circ y_\alpha \circ F \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1} = G^{-1} \circ F_{a\alpha} = i,$$

concludendo la dimostrazione. □

**Teorema 3.5.10.** *Sia  $F : X \rightarrow Y$  un'applicazione liscia, sommersiva in  $p \in X$ ; siano  $n = \dim X, k = \dim Y$ . Allora esistono carte  $(U, \mathbf{x})$  e  $(V, \mathbf{y})$  centrate in  $p$  ed  $F(p)$  tali che l'espressione locale di  $F$  in tali carte sia la sommersione canonica di  $\mathbb{R}^n$  su  $\mathbb{R}^k$ .*

**Dim.** Siano  $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$  e  $(V_\alpha, \mathbf{y}_\alpha)$  due carte locali centrate in  $p$  e  $F(p)$ , e sia  $F_{a\alpha}$  l'espressione locale di  $F$  in tali carte.

Per l'ipotesi di sommersività abbiamo che  $\dim \text{Im}(d_p F) = k$ ; a meno di uno scambio di coordinate possiamo supporre che la sottomatrice di  $J(F_{a\alpha})$  che realizza il rango sia quella costituita dalle prime  $k$  righe, cioè

$$J(F_{a\alpha}) = \left[ A \mid B \right] \quad \text{con } \det A \neq 0.$$

Definiamo  $G : \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}^n$  come  $G(\mathbf{u}, \mathbf{t}) = (F_{a\alpha}(\mathbf{u}, \mathbf{t}), \mathbf{t})$ ; osserviamo che  $F_{a\alpha} = s \circ G$ , dove  $s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  è la sommersione canonica. Lo Jacobiano di  $G$  in  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$  è dato da

$$J(G) = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & I \end{array} \right],$$

ed è quindi invertibile; applicando a  $G$  il Teorema (2.3.1) troviamo che esistono intorno  $\tilde{U}$  e  $\tilde{V}$  di  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$  su cui  $G$  è un diffeomorfismo.

Siano  $U = \mathbf{x}_\alpha^{-1}(\tilde{U})$  e  $\mathbf{x} = G \circ \mathbf{x}_\alpha$ . L'espressione locale di  $F$  nelle carte  $(U, \mathbf{x})$  e  $(V, \mathbf{y}_a)$  è data da

$$\mathbf{y}_a \circ F \circ \mathbf{x}^{-1} = \mathbf{y}_a \circ F \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1} \circ G^{-1} = F_{a\alpha} \circ G^{-1} = s,$$

concludendo la dimostrazione. □

**Definizione 3.5.11.** Sia  $X$  una varietà differenziabile e  $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  il suo atlante universale. Un sottoinsieme connesso  $S \subset X$  è detto *sottovarietà differenziabile* di  $X$  di dimensione  $k$  se  $\forall p \in S$  esiste  $\alpha_p \in A$  con  $\mathbf{x}_{\alpha_p}(U_{\alpha_p} \cap S) \subset i(\mathbb{R}^k) \subset \mathbb{R}^n$  dove  $i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  è l'immersione canonica. Le coppie  $(U_{\alpha_p} \cap S, \mathbf{x}_{\alpha_p}|_{U_{\alpha_p} \cap S})$ , al variare di  $p$  in  $S$ , costituiscono un atlante per  $S$ , che è quindi essa stessa una varietà differenziabile, di dimensione  $k$ .

Utilizzando il Teorema (3.5.9) si può dimostrare il seguente:

**Teorema 3.5.12.** *Sia  $X$  una varietà differenziabile liscia e  $F : X \rightarrow Y$  un'embedding. Allora  $F(X)$  è una sottovarietà di  $Y$ .*

**Dim.** Siano  $k$  ed  $n$  le dimensioni di  $X$  e di  $Y$ , rispettivamente. Sia  $q \in F(X)$  e  $p = F^{-1}(q)$ ; l'applicazione  $F$  è immersiva in  $p$ , pertanto per il Teorema (3.5.9) esistono una carta locale  $(U, \mathbf{x})$  centrata in  $p$  e una carta locale di  $(V, \mathbf{y})$  centrata in  $q$ , tali che  $\mathbf{y} \circ F \circ \mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U) \rightarrow \mathbf{y}(V)$  sia la restrizione a  $\mathbf{x}(U)$  dell'immersione canonica di  $\mathbb{R}^k$  in  $\mathbb{R}^n$ .

Poiché  $F(U)$  è un aperto di  $F(X)$  con la topologia indotta da  $Y$  possiamo scrivere  $F(U) = W \cap F(X)$  con  $W$  aperto di  $Y$ . A meno di sostituire ora  $V$  con  $V \cap W$  abbiamo che  $\mathbf{y}(V \cap F(X))$  è contenuto in  $i(\mathbb{R}^k)$ . □

**Osservazione 3.5.13.** Con ragionamento analogo a quello della dimostrazione del Teorema (3.5.12) si mostra che una superficie differenziabile  $S \subset \mathbb{R}^3$  è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^3$ .

Utilizzando il Teorema (3.5.10) si può dimostrare il seguente:

**Teorema 3.5.14.** (del valore regolare) Sia  $F : X \rightarrow Y$  un'applicazione differenziabile, e sia  $q \in Y$ . Se  $F$  è sommersiva nei punti di  $F^{-1}(q)$  allora ogni componente connessa di  $F^{-1}(q)$  è una sottovarietà differenziabile di  $X$  di dimensione  $\dim X - \dim Y$ .

**Dim.** Siano  $n = \dim X$  e  $m = \dim Y$ ; sia  $p \in F^{-1}(q)$ ; per ipotesi il rango del differenziale di  $F$  in  $p$  è  $m$ . Per il Teorema (3.5.10) esistono carte  $(U, \mathbf{x})$  e  $(V, \mathbf{y})$  centrate in  $p$  e  $q$ , tali che l'espressione locale di  $F$  in tali carte è la sommersione canonica di  $\mathbb{R}^n$  su  $\mathbb{R}^m$ . I punti di  $F^{-1}(q) \cap U$  sono i punti del tipo  $(0, \dots, 0, x_{m+1}, \dots, x_n)$ , e il Teorema è provato.  $\square$

**Esempio 3.5.15.** Sia  $S \subset \mathbb{R}^n$  un sottoinsieme definito da equazioni  $F_1(x_1, \dots, x_n) = F_2(x_1, \dots, x_n) = \dots = F_k(x_1, \dots, x_n) = 0$ ; se nei punti di  $S$  il rango della matrice jacobiana

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

è  $k$  allora ogni componente connessa di  $S$  è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^n$  di dimensione  $n - k$ . Per mostrarlo consideriamo l'applicazione  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  definita ponendo

$$F(x_1, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_k(x_1, \dots, x_n)).$$

Per tale applicazione si ha  $S = F^{-1}(0, \dots, 0)$ , e la condizione richiesta sulla matrice jacobiana è esattamente quella della sommersività.

**Osservazione 3.5.16.** La condizione sullo Jacobiano dell'Esempio (3.5.15) non è necessaria.

**Esempio 3.5.17.** Gli zeri del polinomio  $x_0^2 - x_1^2 + x_1x_2$  definiscono una sottovarietà differenziabile di  $\mathbb{RP}^2$ . Sia  $F : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^1$  l'applicazione definita ponendo

$$F([x_0 : x_1 : x_2]) = [x_0^2 - x_1^2 + x_1x_2 : x_0^2 + x_1^2 + x_2^2].$$

Verifichiamo che nei punti di

$$S := F^{-1}([0 : 1]) = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{RP}^2 \mid x_0^2 - x_1^2 + x_1x_2 = 0\}$$

$F$  è sommersiva, ovvero che il differenziale di  $F$  è suriettivo in tali punti.

Scriviamo l'espressione locale di  $F$  nelle carte  $U_0$  e  $V_1$ , cioè la  $F_{01} = \mathbf{x}_0^{-1} \circ F \circ \mathbf{y}_1$ .

$$F_{01}(t_1, t_2) = \frac{1 - t_1^2 + t_1t_2}{1 + t_1^2 + t_2^2}$$

Lo Jacobiano dell'espressione locale, nei punti di  $S \cap U_0$  è

$$\left[ \frac{-2t_1 + t_2}{1 + t_1^2 + t_2^2}, \frac{t_1}{1 + t_1^2 + t_2^2} \right].$$

Lo Jacobiano non ha rango massimo nel punto  $t_1 = t_2 = 0$ , che non appartiene a  $S \cap U_0$ . Le verifiche in  $U_1$  ed  $U_2$  sono analoghe.

3.6 SPAZIO COTANGENTE

**Definizione 3.6.1.** Sia  $X$  una varietà differenziabile liscia e  $p \in X$  un suo punto; il duale dello spazio tangente a  $X$  in  $p$  è detto *spazio cotangente* a  $X$  in  $p$  e si denota con  $T_p^*X$ . Quindi  $T_p^*X = \text{Hom}(T_pX, \mathbb{R})$ .

Lo spazio tangente a  $\mathbb{R}^n$  in un suo punto  $p$  può essere identificato in modo canonico con  $\mathbb{R}^n$  stesso associando a un vettore tangente  $\mathbf{v} \in T_p\mathbb{R}^n$  la ennupla  $(\mathbf{v}([u_1]), \dots, \mathbf{v}([u_n]))$ , ove  $(u_1, \dots, u_n)$  sono le coordinate in  $\mathbb{R}^n$ .

Nel caso  $n = 1$  quindi l'identificazione tra lo spazio tangente ad  $\mathbb{R}$  in un suo punto  $p$  ed  $\mathbb{R}$  stesso viene fatta associando al vettore tangente  $\mathbf{v} \in T_p\mathbb{R}$  il numero reale  $\mathbf{v}([\text{Id}_{\mathbb{R}}])$ .

**Esempio 3.6.2.** Sia  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie differenziabile,  $p \in S$  e  $\mathbf{P} : \Omega \rightarrow S$  una parametrizzazione locale. Lo spazio tangente  $T_pS$  può essere identificato con un sottospazio vettoriale di  $T_p\mathbb{R}^3$ , che a sua volta si può identificare con  $\mathbb{R}^3$ , come appena spiegato, associando al vettore tangente  $\mathbf{v} \in T_p\mathbb{R}^3$  la terna  $(\mathbf{v}([t_1]), \mathbf{v}([t_2]), \mathbf{v}([t_3]))$ , ove le  $t_i$  sono le coordinate in  $\mathbb{R}^3$ .

Sia  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = \mathbf{P}^{-1} : S \rightarrow \Omega$ ; lo spazio tangente  $T_pS$  ha come base canonica  $\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_p, (\frac{\partial}{\partial x_2})_p\}$ . Tramite l'identificazione sopra descritta, ricordando che

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p([t_j]) = \frac{\partial(t_j \circ \mathbf{P})}{\partial u_i}(u_1, u_2) = \frac{\partial \mathbf{P}_j}{\partial u_i}(u_1, u_2),$$

troviamo che i vettori della base canonica corrispondono, nell'identificazione  $T_p\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$  ai vettori  $\mathbf{P}_{u_1}$  e  $\mathbf{P}_{u_2}$ .

Se  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  è un'applicazione liscia, di componenti  $(f_1, \dots, f_n)$  allora, via l'identificazione sopra descritta

$$d_p f(\mathbf{v}) = (\mathbf{v}([f_1]), \dots, \mathbf{v}([f_n])).$$

In particolare, se  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  è un'applicazione liscia e  $p \in X$ , allora, via l'identificazione sopra descritta tra  $T_p\mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}$ , abbiamo che il differenziale di  $f$  in  $p$  può essere visto come un elemento dello spazio cotangente:

$$T_pX \xrightarrow{d_p f} T_p\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}.$$

$$\mathbf{v} \longmapsto \mathbf{v}([f])$$

Sia  $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$  una carta locale tale che  $p \in U_\alpha$ ; allora i differenziali delle funzioni coordinate,  $d_p x_{i\alpha}$  sono elementi dello spazio cotangente; essendo

$$d_p x_{j\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i\alpha}}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x_{i\alpha}}\right)_p([x_{j\alpha}]) = \delta_{ij}$$

abbiamo che  $d_p x_{1\alpha}, \dots, d_p x_{n\alpha}$  costituiscono una base di  $T_p^* X$ , e precisamente la base duale della base  $\left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x_{1\alpha}} \right)_p, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial x_{n\alpha}} \right)_p \right\}$  dello spazio tangente  $T_p X$ .

Un vettore  $\mathbf{v}^* \in T_p^* X$  si può dunque scrivere  $\mathbf{v}^* = \sum v_{i\alpha}^* d_p x_{i\alpha}$  con  $v_{i\alpha}^* = \mathbf{v}^* \left( \frac{\partial}{\partial x_{i\alpha}} \right)_p$ ; la relazione che lega le componenti di un vettore cotangente sulla base canonica associata ad una carta locale  $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$  alle componenti sulla base canonica associata ad una carta locale  $(U_\beta, \mathbf{x}_\beta)$  sono quindi le seguenti:

$$v_\alpha^* = J(\mathbf{x}_{\beta\alpha})^T \cdot v_\beta^* \quad (3.6.3)$$

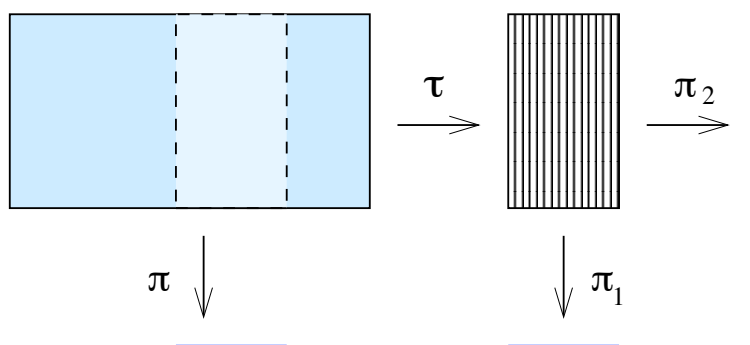
Ricordando che  $J(\mathbf{x}_{\beta\alpha}) = J(\mathbf{x}_{\alpha\beta})^{-1}$  abbiamo che

$$v_\beta^* = J(\mathbf{x}_{\alpha\beta})^T \cdot v_\alpha^*. \quad (3.6.4)$$

### 3.7 FIBRATO TANGENTE E COTANGENTE

**Definizione 3.7.1.** Un *fibrato vettoriale* reale di rango  $k$  su  $X$  è uno spazio topologico  $E$  dotato di un'applicazione continua e suriettiva  $\pi : E \rightarrow X$  che gode delle seguenti proprietà:

1.  $\forall p \in X$  l'insieme  $\pi^{-1}(p)$ , detto *fibra* su  $p$ , è uno spazio vettoriale reale di dimensione  $k$ ;
2.  $\forall p \in X$  esistono un aperto  $U \ni p$  e un omeomorfismo  $\tau : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$  tali che, indicate con  $\pi_i$  le proiezioni sui fattori di  $U \times \mathbb{R}^k$  si abbia
  - a)  $\pi_1 \circ \tau = \pi$ ;
  - b)  $\forall p \in U$   $\pi_2 \circ \tau$  ristretto a  $\pi^{-1}(p)$  sia un isomorfismo di spazi vettoriali.



**Definizione 3.7.2.** Sia  $\pi : E \rightarrow X$  un fibrato vettoriale di rango  $k$ ; una *sezione* del fibrato  $E$  su un sottospazio  $Y \subset X$  è un'applicazione continua  $\sigma : Y \rightarrow E$  tale che  $\pi \circ \sigma = \text{Id}_Y$ .

Sia ora  $TX$  l'insieme di tutti i vettori tangenti ad  $X$ , cioè

$$TX = \bigcup_{p \in X} T_p X \quad (3.7.3)$$

e sia  $\pi : TX \rightarrow X$  la mappa che associa a  $v \in TX$  il punto  $p$  se  $v \in T_p X$ .

**Teorema 3.7.4.** *Sia  $X$  una varietà differenziabile liscia di dimensione  $n$ ; allora  $TX$  è un fibrato vettoriale di rango  $n$ , detto fibrato tangente ad  $X$ ; inoltre  $TX$  è una varietà differenziabile liscia di dimensione  $2n$ .*

**Dim.** La prima condizione della definizione di fibrato vettoriale è chiaramente verificata, poiché  $\pi^{-1}(p) = T_p X$  è uno spazio vettoriale reale di dimensione  $n$ . Sia  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$  un atlante di  $X$ . Vogliamo mostrare che esistono omeomorfismi  $\tau_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$  con le proprietà richieste. Indicheremo d'ora in avanti con  $TU_\alpha$  l'aperto  $\pi^{-1}(U_\alpha)$ . Siano  $(x_{1\alpha}, \dots, x_{n\alpha})$  coordinate locali in  $U_\alpha$  e sia  $(p, \mathbf{v}) \in TU_\alpha$ ; possiamo scrivere  $\mathbf{v} = \sum v_i \left(\frac{\partial}{\partial x_{i\alpha}}\right)_p$  e quindi, ricordando l'Osservazione (3.4.10), possiamo definire  $\tau_\alpha$  in questo modo:

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(U_\alpha) &\xrightarrow{\tau_\alpha} U_\alpha \times \mathbb{R}^n \\ (p, \mathbf{v}) &\longmapsto (p, \mathbf{v}([x_{1\alpha}], \dots, [x_{n\alpha}])) \end{aligned}$$

E' immediato verificare che  $\pi_1 \circ \tau_\alpha = \pi$  e che  $\pi_2 \circ \tau_\alpha$  ristretto a  $\pi^{-1}(p)$  è un isomorfismo di spazi vettoriali.

Vediamo ora come sia possibile dare a  $TX$  una topologia rispetto alla quale le applicazioni  $\tau_\alpha$  siano omeomorfismi; a tal fine consideriamo le biiezioni

$$T\mathbf{x}_\alpha : TU_\alpha \longrightarrow \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n} = (\mathbf{x}_\alpha, \text{Id}_{\mathbb{R}^n}) \circ \tau_\alpha$$

cioè ad un vettore  $\mathbf{v} \in T_p X$  la mappa  $T\mathbf{x}_\alpha$  associa le coordinate del punto  $\mathbf{x}_\alpha(p)$  e le componenti di  $\mathbf{v}$  sulla base di  $T_p X$  associata alla carta  $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ .

Mediante le  $T\mathbf{x}_\alpha$  possiamo dare a  $TU_\alpha$  la topologia che rende  $T\mathbf{x}_\alpha$  un omeomorfismo; gli aperti di  $TU_\alpha$  sono cioè i sottoinsiemi  $V$  tali che  $T\mathbf{x}_\alpha(V)$  è aperto in  $\mathbb{R}^{2n}$ . Ora è possibile dare una topologia a  $TX$ , dicendo aperti di  $TX$  i sottoinsiemi  $W \subset TX$  tali che  $W \cap TU_\alpha$  è aperto in  $TU_\alpha$  per ogni  $\alpha$ ; con tale topologia le applicazioni  $\tau_\alpha$  sono omeomorfismi, e quindi abbiamo terminato di verificare che  $TX$  è un fibrato vettoriale di rango  $n$  su  $X$ .

Mostriamo ora che gli aperti  $TU_\alpha$  e gli omeomorfismi  $T\mathbf{x}_\alpha$  costituiscono un atlante differenziabile liscio per  $TX$ , cioè che le funzioni di transizione  $T\mathbf{x}_{\beta\alpha} = T\mathbf{x}_\beta \circ T\mathbf{x}_\alpha^{-1}$  sono applicazioni lisce. Sulle prime  $n$  coordinate tali funzioni coincidono con le  $\mathbf{x}_{\beta\alpha}$ , mentre sulle ultime  $n$  esse realizzano il cambio di base negli spazi tangenti associato al cambio delle carte. Abbiamo visto precedentemente (Cf. (3.4.13)) che il cambio di base è realizzato dalla moltiplicazione per la matrice Jacobiana di  $\mathbf{x}_{\beta\alpha}$ , quindi le funzioni di transizione  $T\mathbf{x}_{\beta\alpha}$  sono date da:

$$T\mathbf{x}_{\beta\alpha}(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n) = (\mathbf{x}_{\beta\alpha}(u_1, \dots, u_n), J(\mathbf{x}_{\beta\alpha})[v_1, \dots, v_n]^T),$$

e sono quindi applicazioni lisce. □

**Definizione 3.7.5.** Data un'applicazione differenziabile liscia tra varietà lisce  $F : X \rightarrow Y$ , l'applicazione

$$dF : TX \rightarrow TY$$

definita ponendo  $dF(p, \mathbf{v}) := d_p F(\mathbf{v})$  è detta *differenziale* di  $F$ .



L'applicazione  $dF$  è un'applicazione differenziabile liscia tra le varietà differenziabili  $TX$  e  $TY$ ; la sua espressione locale relativa a due carte  $TU_\alpha \ni (p, \mathbf{v})$  e  $TV_\alpha \ni (p', d_p F(\mathbf{v}))$  è infatti data da

$$(dF)_{\alpha\alpha}(p, \mathbf{v}) = (F_{\alpha\alpha}(p), J(F_{\alpha\alpha}) \cdot \mathbf{v}).$$

**Definizione 3.7.6.** Sia  $X$  una varietà differenziabile e  $U \subset X$  un suo aperto; una sezione  $\sigma : U \rightarrow TX$ , che sia un'applicazione liscia di varietà differenziabili è detta *campo vettoriale* liscio su  $U$ .

Sia  $T^*X$  l'insieme di tutti i vettori cotangenti ad  $X$ , cioè

$$T^*X = \bigcup_{p \in X} T_p^*X$$

e sia  $\pi : T^*X \rightarrow X$  la mappa che associa a  $v \in T^*X$  il punto  $p$  se  $v \in T_p^*X$ . In modo analogo a quanto visto per il fibrato tangente si mostra che

**Teorema 3.7.7.** *Sia  $X$  una varietà differenziabile liscia di dimensione  $n$ ; allora  $T^*X$  è un fibrato vettoriale di rango  $n$ , detto fibrato cotangente ad  $X$ ; inoltre  $T^*X$  è una varietà differenziabile di dimensione  $2n$ .*

**Definizione 3.7.8.** Sia  $X$  una varietà differenziabile e  $U \subset X$  un suo aperto; una sezione  $\sigma : U \rightarrow T^*X$ , che sia un'applicazione liscia di varietà differenziabili è detta *1-forma differenziale* liscia su  $U$ .

### 3.8 VARIETÀ RIEMANNIANE - CENNI

Abbiamo visto che per superfici in  $\mathbb{R}^3$  è possibile definire concetti quali la lunghezza di una curva sulla superficie, l'angolo tra due vettori tangenti, l'area di una porzione di superficie; ci chiediamo se è possibile fare la stessa cosa su una qualsiasi varietà differenziabile.

Alla base delle nozioni metriche per le superfici elementari c'è la prima forma fondamentale, cioè una forma bilineare simmetrica e definita positiva sugli spazi tangenti.

Dall'algebra lineare sappiamo che è equivalente avere, su di uno spazio vettoriale  $V$ , una forma bilineare simmetrica definita positiva o una forma quadratica definita positiva. Questo motiva la seguente

**Definizione 3.8.1.** Una *varietà Riemanniana*  $(X, \Phi)$  è una varietà differenziabile liscia dotata di una applicazione liscia  $\Phi : TX \rightarrow \mathbb{R}$ , che, ristretta a  $T_pX$ , è una forma quadratica definita positiva  $\forall p \in X$ . Una tale applicazione è detta *metrica Riemanniana* su  $X$ .

**Osservazione 3.8.2.** Sia  $p \in X$  e sia  $(U, \mathbf{x})$  una carta locale tale che  $p \in U$ ; a  $\Phi$  è possibile associare una matrice simmetrica

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix}$$

dove, denotata con  $\varphi$  la forma bilineare associata a  $\Phi$  si ha  $g_{ij} = \varphi\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right)$ , e le  $g_{ij}$  sono funzioni lisce.

E' possibile dimostrare che ogni varietà differenziabile può essere resa varietà Riemanniana:

**Teorema 3.8.3.** *Sia  $X$  una varietà differenziabile liscia; allora su  $X$  esiste una metrica Riemanniana.*

**Definizione 3.8.4.** Date due varietà Riemanniane  $(X, \Phi)$  e  $(X', \Phi')$ , un'isometria  $F : (X, \Phi) \rightarrow (X', \Phi')$  è un diffeomorfismo tale che  $\varphi'(dF(\mathbf{u}), dF(\mathbf{v})) = \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  per ogni coppia di vettori  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_p X$  e per ogni  $p \in X$ , cioè è un diffeomorfismo che induce isometrie di spazi vettoriali sugli spazi tangenti.

Siano  $(U, \mathbf{x})$  e  $(V, \mathbf{y})$  carte locali tali che  $p \in U$  e  $F(p) \in V$ , e sia  $F_{\mathbf{xy}}$  l'espressione locale di  $F$  in tali carte. Siano poi  $G$  e  $G'$  come nell'Osservazione (3.8.2). Allora si ha (Cf. Definizione (2.3.11)):

$$G' = J(F_{\mathbf{xy}})^T G J(F_{\mathbf{xy}}).$$

**Esempio 3.8.5.** Sia  $X$  una sottovarietà di  $\mathbb{R}^n$ ; per ogni  $p \in X$  possiamo identificare  $T_p X$  con un sottospazio vettoriale di  $T_p \mathbb{R}^n$ ; otteniamo perciò una metrica Riemanniana su  $X$  restringendo agli spazi tangenti ad  $X$  l'usuale prodotto scalare di  $\mathbb{R}^n$  definito sugli spazi tangenti a  $\mathbb{R}^n$ .

**Esempi 3.8.6.** Vediamo invece due esempi di superfici Riemanniane che non sono sottovarietà due dimensionali di  $\mathbb{R}^3$  con la metrica indotta dal prodotto scalare di  $\mathbb{R}^3$ .

1.  $\mathbb{T}$ , il toro, visto come il prodotto di  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  in  $\mathbb{R}^4$ ; tale superficie è detta *Toro piatto*. Possiamo descriverlo come il luogo di zeri delle equazioni  $x^2 + y^2 = 1 = z^2 + w^2$  o, localmente, come l'immagine della mappa  $\mathbf{T} : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^4$  data da  $(\cos u, \sin u, \cos v, \sin v)$ .  
Con questa seconda descrizione vediamo che una base per lo spazio tangente è data da  $\mathbf{P}_u = (-\sin u, \cos u, 0, 0)$ ,  $\mathbf{P}_v = (0, 0, -\sin v, \cos v)$ , e quindi che la matrice che rappresenta la restrizione del prodotto scalare di  $T_p \mathbb{R}^4$  è la matrice identica.

2.  $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$  con il prodotto scalare dato dalla seguente matrice:

$$G_{\mathbb{H}} := \begin{bmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{bmatrix}.$$

Tale superficie è detta *Semipiano iperbolico*.

Abbiamo visto che la curvatura di Gauss, i simboli di Christoffel e le geodetiche di una superficie elementare possono essere calcolati a partire dalla prima forma fondamentale; possiamo quindi definirli per una qualunque superficie Riemanniana; in particolare i simboli di Christoffel si calcoleranno utilizzando le equazioni (2.8.4, 2.8.5, 2.8.6) e la curvatura di Gauss utilizzando la (2.8.7) o le altre equazioni ad essa analoghe.

**Esempio 3.8.7.** Poiché la matrice della metrica Riemanniana del toro piatto è in ogni punto la matrice identica, i simboli di Christoffel sono tutti nulli e nulla è pure la curvatura di Gauss - da qui il nome di toro *piatto*.

**Esempio 3.8.8.** I simboli di Christoffel per il semipiano iperbolico, calcolati come spiegato sopra, sono:

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y}, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y}$$

Utilizzandoli per calcolare la curvatura di Gauss si trova  $K = -1$ .

**Osservazione 3.8.9.** Il semipiano iperbolico  $\mathbb{H}$  e la pseudosfera (Cf. (2.6.7 e)) sono localmente isometrici. Consideriamo il diffeomorfismo  $f$  di espressione locale

$$\begin{cases} x = v \\ y = \frac{1}{\sin u} \end{cases}$$

Lo Jacobiano di  $f$  è dato da

$$J_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos u / \sin^2 u & 0 \end{bmatrix};$$

ricordando che la prima forma fondamentale della pseudosfera è data da

$$G = \begin{bmatrix} \cot^2 u & 0 \\ 0 & \sin^2 u \end{bmatrix},$$

si verifica che  $G_{\mathbb{H}} = J_f^T G J_f$ .

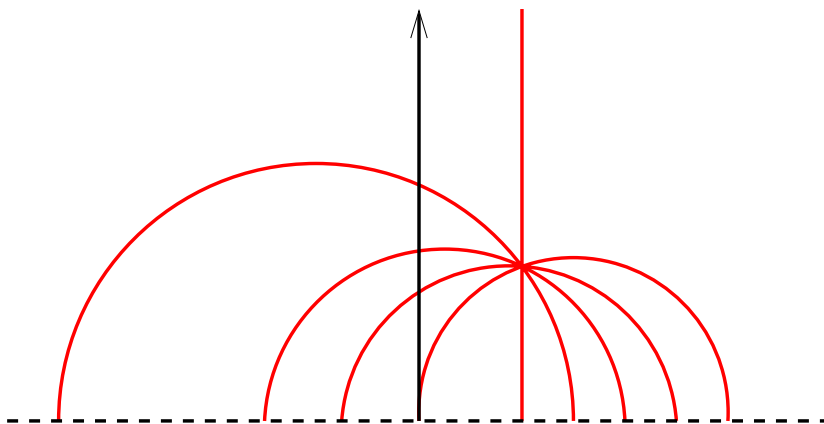
**Esempio 3.8.10.** Le equazioni differenziali delle geodetiche sul semipiano iperbolico (2.10.12) sono date da:

$$\begin{cases} y\ddot{x} - 2\dot{x}\dot{y} = 0 \\ y\ddot{y} + \dot{x}^2 - \dot{y}^2 = 0 \end{cases} \quad (3.8.11)$$

E' immediato verificare che le curve

$$\gamma(t) = \begin{cases} (x_0, e^t) \\ \left(x_0 + \frac{r \sinh t}{\cosh t}, \frac{r}{\cosh t}\right) \end{cases}$$

soddisfano il sistema per ogni  $x_0 \in \mathbb{R}$  e per ogni  $r > 0$ ; si tratta delle rette verticali e delle semicirconferenze centrate sull'asse  $x$  con opportuna parametrizzazione. Per il Corollario (2.10.14) queste curve sono tutte e sole le geodetiche del semipiano iperbolico.



---

# Indice analitico

---

- applicazione differenziabile, 84
  - tra superfici, 41
- atlante, 80
  - universale, 83
- campo vettoriale, 67
  - parallelo, 67
- catenaria, 21
- catenoide
  - curvatura di Gauss, 54
  - matrici  $G, B, X$ , 48
- cicloide, 19
- circonferenza osculatrice, 13
- coniche di Dupin, 60
- coordinate semigeodetiche, 69
- curva, 1
  - biregolare, 4
  - condizioni di sfericit , 15
  - curvatura, 5
  - di Frenet, 5
  - parametrizzata, 1
  - regolare, 1
    - lunghezza, 2
  - semplice, 1
  - sferica, 14
  - sostegno, 1
  - versore binormale, 5
  - versore normale, 5
- curva chiusa, 25
  - indice di rotazione, 25
- curva di Frenet
  - forma canonica locale, 13
  - sfera osculatrice, 14
  - torsione, 6
- curvatura
  - di una curva biregolare, 5
  - geodetica, 68
  - media, 65
- curvatura di Gauss, 52
  - interpretazione geometrica, 63
  - invariante per isometrie, 63
- curvatura geodetica, 68
- curvatura normale, 49
  - significato geometrico, 50
- curvature principali, 52
- derivata covariante, 67
- differenziale, 98
  - in un punto, 90
  - matrice del, 90
- direzioni asintotiche, 60
- direzioni coniugate, 60
- direzioni principali, 52
- elica, 11
- elica circolare, 4
- elicoide, 33
  - curvatura di Gauss, 55
  - matrici  $G, B, X$ , 48
- embedding, 91
- evoluta, 17
- fibrato vettoriale, 97
  - fibrato cotangente, 99
  - fibrato tangente, 98
  - sezione di un, 97
- funzione di transizione, 82

- funzione differenziabile, 84
- geodetiche, 67
  - del cilindro circolare retto, 72
  - della sfera, 71
  - delle superfici di rotazione, 71
  - esistenza e unicità locale, 69
  - proprietà di minima distanza locale, 70
  - sistema delle, 68
- immersione, 91
- involuta, 18
- iperboloide rigato, 32
- isometria, 42, 100
  - esempi, 42
- isometria locale, 42
- linee asintotiche, 60
- linee coordinate, 29
- linee di curvatura, 59
- localmente euclideo, 79
- mappa di Gauss, 45
- operatore di Weingarten, 45
- ordine di contatto, 12
  - tra due curve, 12
  - tra una curva e una superficie, 13
- parametro arco, 3
- piano osculatore, 5
- prima forma fondamentale, 36
- pseudosfera
  - curvatura di Gauss, 57
- punto piatto, 50
- punto umbilico, 50
- regione semplice, 38
- riparametrizzazione
  - di una curva, 1
  - di una superficie, 34
- seconda forma fondamentale, 46
- simboli di Christoffel, 62, 67
  - in coordinate semigeodetiche, 70
  - in funzione di  $g_{ij}$ , 62
- sommersione, 91
- sottovarietà, 94
  - di  $\mathbb{R}^n$  definite da equazioni, 95
  - superfici di  $\mathbb{R}^3$ , 94
- spazio cotangente, 96
- spazio tangente, 86
  - base associata a una carta locale, 88
- struttura differenziabile, 82
- superfici di rotazione, 30
  - curvatura di Gauss, 57
  - tipo di punti, 56
- superfici minimali, 65
- superfici rigate, 32
  - rigata delle normali, 59
  - sviluppari, 56
  - tipo di punti, 55
- superficie
  - orientabile, 76
  - geodeticamente completa, 73
- superficie differenziabile in  $\mathbb{R}^3$ , 34
- superficie elementare, 29
  - piano tangente, 29
  - sostegno, 29
  - spazio vettoriale tangente, 29
  - versore normale, 29
- teorema
  - dei quattro vertici, 26
  - del valore regolare, 95
  - delle tangenti, di Hopf, 26
  - di Cauchy sugli ovali, 28
  - di Gauss-Bonnet versione globale, 77
  - di Gauss-Bonnet versione locale, 74
  - di Hopf-Rinow, 73
  - di immersione locale, 92
  - di invarianza della dimensione, 79
  - di inversione locale, 40
  - di sommersione locale, 94
- Theorema Egregium, 62
- tipo di punti, 52
- trattrice, 23
- triangolo geodetico, 75
- varietà differenziabile, 83
- varietà topologica, 80
- vertice, 26
- vettore curvatura, 5

---

## Bibliografia

---

- [1] Marco Abate e Francesca Tovena. *Curve e superfici*. Springer, 2008.
- [2] Manfredo do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, 1976.
- [3] Abraham Goetz. *Introduction to differential geometry*. Addison Wesley Publ. Comp., 1970.
- [4] Edoardo Sernesi. *Geometria 2*. Bollati Boringhieri, 2001.
- [5] Theodore Shifrin. *Differential Geometry: A First Course in Curves and Surfaces*. Note del Corso, 2011.
- [6] Iskander A. Taimanov. *Lectures on differential geometry*. EMS Series of Lectures in Mathematics, Zürich, 2008.

Ultima revisione: giugno 2015

