Geometria B - Prova intermedia

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2016/2017
16 gennaio 2017

Lo studente svolga gli esercizi n. 1 e n. 4. Svolga inoltre soltanto uno tra gli esercizi n. 2 e n. 3. **Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata**. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

Attenzione. *Il testo è composto da due pagine (la seconda pagina è sul retro di questo foglio).*

Esercizio 1. Sia $\mathbb{R}$ la retta reale, sia $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ l'insieme delle parti di $\mathbb{R}$ e sia η la topologia su $\mathbb{R}$ avente come una base la seguente famiglia $\mathcal{B}$ di sottoinsiemi:

$$\mathcal{B} := \{[a,b) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \,|\, a,b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

(1a) Si calcoli la chiusura, la parte interna e la frontiera di $[0,1]$ in $(\mathbb{R},\eta)$.

(1b) Si dica se la funzione $f : (\mathbb{R},\eta) \longrightarrow (\mathbb{R},\eta)$ definita ponendo $f(x) := -x$ è continua.

(1c) Sia $(\mathbb{R}^2,\xi)$ il prodotto topologico di $(\mathbb{R},\eta)$ con se stesso e sia $\Delta^* := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = -x\}$. Si dimostri che la topologia indotta da ξ su Δ^* è quella discreta.

(1d) Si calcoli la componente connessa di 0 in $(\mathbb{R},\eta)$.

(1e) Si dica se il sottoinsieme $[0,1]$ di $(\mathbb{R},\eta)$ è compatto.

SOLUZIONE: (1a) Gli insiemi $(-\infty,0) = \bigcup_{n\geq 1}[-n,0)$ e $(1,+\infty) = \bigcup_{n\geq 2}[1+\frac{1}{n},n)$ sono due aperti di η. Poiché $\mathbb{R}\setminus[0,1] = (-\infty,0)\cup(1,+\infty)$, si ha che $[0,1]$ è chiuso in $(\mathbb{R},\eta)$ e quindi coincide con la sua chiusura in $(\mathbb{R},\eta)$, ovvero $\overline{[0,1]} = [0,1]$.

Osserviamo che, dato $x \in \mathbb{R}$, la famiglia $\mathcal{V}(x) := \{[x,y)\}_{y>x}$ è un sistema fondamentale di intorni di x in $(\mathbb{R},\eta)$. Dimostriamolo. Sia $U \in \mathcal{N}_\eta(x)$ e sia $A \in \eta$ tale che $x \in A \subset U$. Poiché A è uguale all'unione di intervalli del tipo $[a,b)$, esistono $z,y \in \mathbb{R}$ con $z < y$ tali che $x \in [z,y) \subset A$. Segue che $[x.y) \subset A \subset U$. Dunque $\mathcal{V}(x)$ è un sistema fondamentale di intorni di x in $(\mathbb{R},\eta)$.

Calcoliamo la parte interna $\mathrm{Int}([0,1])$ e la frontiera $\mathrm{Fr}([0,1])$ di $[0,1]$ in $(\mathbb{R},\eta)$. Si osservi che 1 non è un punto interno di $[0,1]$ in quanto, per ogni $[1,y) \in \mathcal{V}(1)$ (cioè per ogni $y > 1$), $[1,y) \not\subset [0,1]$. Poiché $[0,1)$ è un aperto di η, segue che $\mathrm{Int}([0,1]) = [0,1)$, e quindi $\mathrm{Fr}([0,1]) = \overline{[0,1]} \setminus \mathrm{Int}([0,1]) = \{1\}$.

(1b) f non è continua in quanto $[0,1) \in \eta$, mentre $f^{-1}([0,1)) = (-1,0] \notin \eta$ (infatti 0 non è un punto interno di $(-1,0]$).

(1c) È sufficiente osservare che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $[x,x+1) \times [-x,-x+1) \in \xi$ e quindi $\Delta^* \cap ([x,x+1) \times [-x,-x+1)) = \{(x,-x)\}$ è un aperto della topologia indotta da ξ su Δ^*. Dunque ogni singoletto di Δ^* è un aperto della topologia indotta da ξ su Δ^*.

(1d) Proviamo che la componente connessa $\mathcal{C}(0)$ di 0 coincide col singoletto $\{0\}$. Supponiamo per assurdo che $\mathcal{C}(0)$ contenga un punto x diverso da 0. Sia $x > 0$. Allora $\mathcal{C}(0)\cap(-\infty,x)$

e $\mathcal{C}(0) \cap [x, +\infty)$ sono due aperti non vuoti (il primo contiene 0, il secondo x) e disgiunti di $\mathcal{C}(0)$ che ricoprono $\mathcal{C}(0)$. Ciò è assurdo in quanto $\mathcal{C}(0)$ è un sottoinsieme connesso di $(\mathbb{R}, \eta)$. Se $x < 0$ si procede in modo simile.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{S}^1$ la circonferenza di $\mathbb{R}^2$ di raggio 1 centrata nell'origine e sia I l'intervallo chiuso $[0,1]$ di $\mathbb{R}$. Dotiamo $\mathbb{S}^1$ e I con le rispettive topologie euclidee, e $\mathbb{S}^1 \times I$ con la topologia prodotto. Definiamo la relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ su $\mathbb{S}^1 \times I$ ponendo:

$$(p,t)\,\mathcal{R}\,(q,s) \text{ se e soltanto se } (p,t) = (q,s) \text{ oppure } t = s = 0.$$

Si dimostri che lo spazio topologico quoziente $(\mathbb{S}^1 \times I)/_{\mathcal{R}}$ di $\mathbb{S}^1 \times I$ modulo $\mathcal{R}$ è omeomorfo al disco chiuso $\mathbb{D}^2$ di raggio 1 centrata nell'origine dotato della topologia euclidea.

SOLUZIONE: Sia $\pi : \mathbb{S}^1 \times I \to (\mathbb{S}^1 \times I)/_{\mathcal{R}}$ la proiezione naturale al quoziente e sia $f : \mathbb{S}^1 \times I \to \mathbb{D}^2$ l'applicazione continua e surgettiva definita ponendo $f(p,t) := pt$ (si osservi che se scriviamo il punto $p \in \mathbb{S}^1$ in coordinate, cioè $p = (x,y)$, allora $f(p,t)$ assume la forma polinomiale $f((x,y),t) = (tx, ty)$, in particolare f è continua). Indichiamo con $\mathcal{R}_f$ la relazione di equivalenza su $\mathbb{S}^1 \times I$ indotta da f, cioè quella avente per classi di equivalenza le fibre di f. Osserviamo che:

$$[(p,0)]_{\mathcal{R}} = \mathbb{S}^1 \times \{0\} = f^{-1}(f(p,0)) = [(p,0)]_{\mathcal{R}_f} \quad \text{per ogni } p \in \mathbb{S}^1$$

e

$$[(p,t)]_{\mathcal{R}} = \{(p,t)\} = f^{-1}(f(p,t)) = [(p,t)]_{\mathcal{R}_f} \quad \text{per ogni } (p,t) \in \mathbb{S}^1 \times (0,1].$$

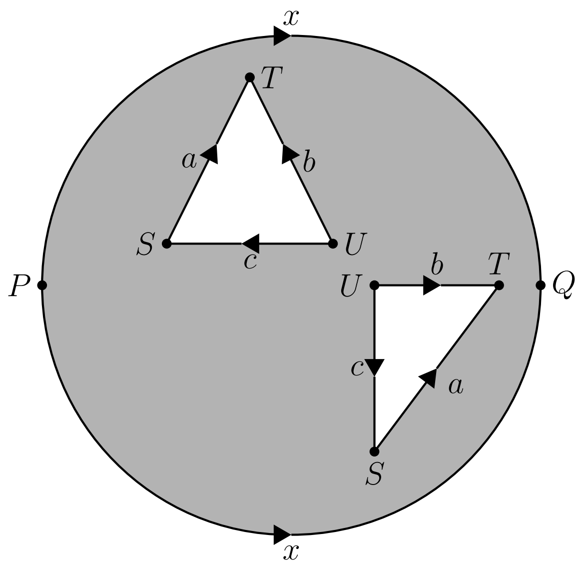
In altre parole si ha: $\mathcal{R} = \mathcal{R}_f$. Esiste quindi una applicazione $g : (\mathbb{S}^1 \times I)/_{\mathcal{R}} \to \mathbb{D}^2$ continua e bigettiva tale che $g \circ \pi = f$. Poiché $(\mathbb{S}^1 \times I)/_{\mathcal{R}}$ è compatto e $\mathbb{D}^2$ è Hausdorff, g è anche chiusa. Dunque g è un omeomorfismo.

Esercizio 3. Si dimostri che uno spazio topologico X è connesso se e soltanto se ogni sottoinsieme non vuoto e proprio di X ha frontiera non vuota.

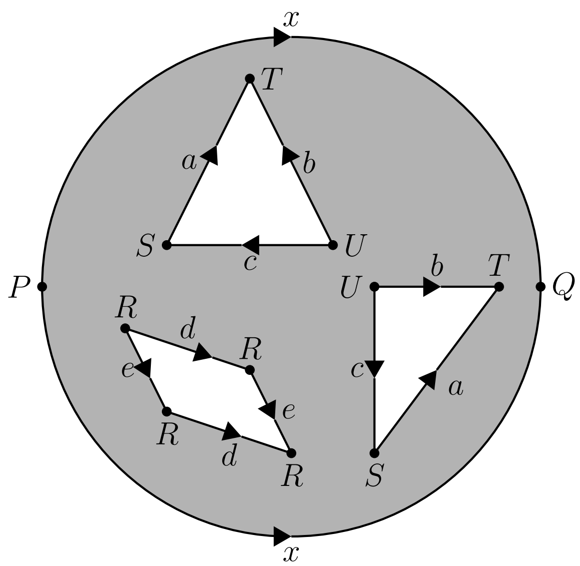
SOLUZIONE: Sia X connesso. Supponiamo per assurdo che esista un sottoinsieme non vuoto e proprio S di X tale che $\mathrm{Fr}(S) = \emptyset$. Il fatto che $\mathrm{Fr}(S) = \emptyset$ equivale a dire che ogni punto di X è o interno a S o esterno a S. Poiché i punti di S non possono essere esterni a S, segue che ogni punto di S è interno a S, ovvero S è aperto. Similmente si dimostra che anche $X \setminus S$ è aperto. Dunque S è un sottoinsieme non vuoto, proprio, aperto e chiuso di X, e quindi X è sconnesso contro l'ipotesi.

Supponiamo viceversa che X sia sconnesso. Allora esiste un sottoinsieme non vuoto, proprio, aperto e chiuso S di X. Sia $x \in X$. Se $x \in S$ allora x è interno a S e quindi x non è di frontiera per S. Se $x \notin S$ allora x è esterno a S e quindi ancora una volta x non è di frontiera per S. Segue che la frontiera di S è vuota.

Esercizio 4. Sia S lo spazio topologico ottenuto come quoziente di un disco con due buchi rispetto alle identificazioni indicate nella figura seguente.



Consideriamo inoltre lo spazio topologico T ottenuto come quoziente di un disco con tre buchi rispetto alle identificazioni indicate nella figura seguente.



(4a) Si dimostri che S è una superficie topologica compatta e la si classifichi.

(4b) Si dimostri che T è uguale alla somma connessa tra S e un toro.