PRESENTAZIONE

Nel passaggio dalla scuola superiore all'università molti studenti incontrano difficoltà non indifferenti. Cambia l'ambiente, cambiano i rapporti con i docenti e con l'istituzione, cambia il modo di studiare. Ma la difficoltà maggiore consiste, da sempre, nella scelta del corso di laurea: non tutti riescono ad effettuare una scelta consapevole e corrispondente alle proprie capacità e inclinazioni.

Più di 15 anni fa, l'Unione Matematica Italiana diffuse un "Syllabus di Matematica", ovvero una specie di manifesto delle conoscenze e abilità minime indispensabili per affrontare un corso di laurea con elevati contenuti matematici.

Molte cose sono cambiate in questi 15 anni; l'Unione Matematica Italiana ha allora deciso di diffondere una nuova edizione del Syllabus, molto più estesa ed elaborata della precedente.

Il Syllabus si rivolge principalmente agli allievi degli ultimi anni delle Scuole Secondarie Superiori che intendono mettere alla prova le proprie doti individuali e le conoscenze apprese in vista di una possibile, prossima iscrizione ad una Facoltà scientifica e, più precisamente, a uno dei corsi di laurea dell'area scientifica e scientifico-tecnologica oppure dell'area tecnico-progettuale, cioè quelli con più alto contenuto matematico.

Proprio perché proiettato verso il futuro immediato dello studente, il Syllabus astrae dai programmi di insegnamento ministeriali e dalle problematiche attuali della scuola. Sarebbe quindi errato trarre da esso indicazioni di carattere didattico su cosa si deve insegnare e come lo si deve insegnare. La scuola deve infatti puntare alla maturazione completa dello studente (e le scelte del docente devono essere funzionali a tale obiettivo) mentre il Syllabus intende verificarne le vocazioni.

Inoltre, lo scopo principale del Syllabus dovrebbe essere non certo quello di dissuadere dall'iscriversi ad una Facoltà scientifica coloro che temono di non essere portati per quel tipo di studi ma, al contrario, avvicinare alla matematica studenti che, facendo prevalere considerazioni di natura diversa, potrebbero finire per fare delle scelte non in armonia con i propri interessi e le proprie predisposizioni.

L'Unione Matematica Italina si ripropone di aggiornare periodicamente questo Syllabus, in modo da mantenerlo adeguato ai cambiamenti che continuamente si verificano nel mondo dell'educazione, tenendo conto anche e soprattutto di commenti e suggerimenti che studenti e docenti vorranno indirizzarci.

Il Presidente dell'UMI
Prof. Alberto Conte

SYLLABUS DI MATEMATICA
Conoscenze e capacità per l'accesso all'Università

Suggerimenti dell'Unione Matematica Italiana
per la preparazione all'accesso alle Facoltà scientifiche

1999

Introduzione

L'Unione Matematica Italiana si è proposta, offrendo questo *Syllabus*, di fornire alcuni suggerimenti riguardanti i contenuti minimi di conoscenze e capacità necessari per affrontare gli insegnamenti matematici delle principali Facoltà scientifiche universitarie.

Questo Syllabus è stato dunque compilato in primo luogo per gli studenti che, dopo aver superato la maturità, intendono iscriversi ad un corso universitario che richieda una buona preparazione matematica (Matematica, Fisica, Ingegneria, Informatica, Statistica, Economia, Scienze Biologiche, Chimica, Scienze Geologiche, ...). Gli estensori ritengono tuttavia che esso possa essere utile anche a coloro che intendono iscriversi ad uno dei numerosi corsi universitari in cui la matematica, pur non essendo oggetto di studio, o pur essendolo in modo marginale, viene impiegata come linguaggio o come strumento. Anche se i prerequisiti di conoscenze e di abilità matematiche richiesti sono diversi per i diversi corsi universitari, tuttavia questo Syllabus, benché non differenziato, potrà essere utile strumento per l'accesso ad una vasta gamma di Facoltà e Corsi di Laurea e di Diploma. In ogni caso il presente Syllabus potrà anche essere utilmente impiegato ai fini di una verifica della preparazione matematica acquisita a conclusione della Scuola Secondaria.

In genere, nell'insegnamento della matematica a livello universitario, molte nozioni vengono riprese dall'inizio e quindi potrebbero — in linea di principio — essere ignorate dagli studenti che si accingono ad entrare nell'Università. Tuttavia, la velocità e l'ampiezza con cui si sviluppano i corsi universitari di contenuto matematico sono tali che risulta difficile seguirli se le conoscenze elementari non sono già in parte bene assestate e se la mente non è già stata affinata ed allenata in modo assiduo ed intelligente. Per queste ragioni si è ritenuto opportuno elencare in questo Syllabus anche alcuni argomenti di base che risultano essere solitamente trattati (di nuovo e più approfonditamente) nei corsi universitari e la cui conoscenza non è quindi da considerare un prerequisito irrinunciabile. Tali argomenti vengono indicati nel seguito con un asterisco "$*$".

Il Syllabus si compone di cinque "*temi*", illustrati nel primo capitolo; ognuno dei temi è suddiviso in due colonne affiancate. La prima colonna, intitolata "*sapere*", elenca le conoscenze minime necessarie per poter frequentare con profitto un corso di matematica a livello universitario; la seconda colonna, intitolata "*saper fare*", elenca le capacità operative collegate.

Nel secondo capitolo vengono proposti alcuni "*esercizi e quesiti illustrativi*", suddivisi per ciascun tema. Mentre il "*sapere* " ed il "*saper fare*" hanno una certa organicità, la sezione degli esercizi offre solo un piccolo saggio degli innumerevoli quesiti e problemi che si possono porre.

Per renderne più proficua l'utilizzazione, gli esercizi ed i quesiti proposti sono stati graduati, in relazione alla loro difficoltà, in due livelli. Gli esercizi ed i quesiti del primo livello (denominato "*livello base*") sono tali che lo studente, al quale il Syllabus è rivolto, dovrebbe essere in grado di affrontarli e risolverli senza particolari problemi. I quesiti del secondo livello (denominati “*quesiti che richiedono maggiore attenzione*”) sono invece più impegnativi e, per la loro risoluzione, possono richiedere talvolta anche un pizzico di inventiva. In ogni caso di tutti gli esercizi e quesiti proposti viene fornita una esauriente spiegazione e risposta. Riteniamo di poter affermare che lo studente che sappia rispondere ad un buon numero di quesiti proposti possa sentirsi abbastanza tranquillo per affrontare un corso di studi universitari che richieda una buona preparazione di carattere matematico.

A conclusione del Syllabus, nel terzo capitolo, viene proposto un “*test di autovalutazione*” sulla preparazione dello studente. Il test è preceduto da una illustrazione dei criteri da utilizzare per la valutazione delle singole risposte.

È opportuno segnalare esplicitamente che questo Syllabus contiene alcune domande a cui molti studenti forse non sapranno rispondere. Ciò non deve spaventare eccessivamente, ma deve soltanto costituire un ulteriore stimolo ad affrontare gli studi universitari con impegno adeguato. Eventuali lacune potranno essere facilmente colmate da quanti seguiranno con successo i corsi universitari di matematica del primo anno.

CAPITOLO I

Sapere, Saper fare

Contenuti minimi di conoscenze e capacità per poter frequentare
con profitto un corso di contenuto matematico a livello universitario

---

Nota. L'asterisco sta ad indicare un argomento che viene in genere nuovamente trattato nei corsi universitari e la cui conoscenza non è quindi da considerarsi un prerequisito, anche se tuttavia può essere d'aiuto.

Tema 1

Strutture numeriche, aritmetica

SAPERE	SAPER FARE
I numeri naturali: operazioni aritmetiche e loro proprietà.	Semplici calcoli mentali.
La divisione con resto.	
Numeri primi.	Scomposizione di un numero naturale in fattori primi.
Massimo comune divisore e minimo comune multiplo.	
Le frazioni numeriche: operazioni e ordinamento.	Saper sommare e moltiplicare le frazioni; date due frazioni, saper riconoscere se sono equivalenti o qual è la maggiore. Calcolo di percentuali.
I numeri interi relativi. I numeri razionali relativi.	
Rappresentazione dei numeri come allineamenti; allineamenti con virgola, finiti o periodici.	
Idea intuitiva dei numeri reali.	$*$ Saper dimostrare che $\sqrt{2}$ non è razionale.
Disuguaglianze e relative regole di calcolo.	Trasformazione di una disuguaglianza in un'altra equivalente. Somma membro a membro, moltiplicazione o divisione per un dato numero.

Valore assoluto.	$*$ Semplici disuguaglianze con l'uso del valore assoluto.
Potenze e radici.	Calcolo con le potenze e calcolo con le radici. Saper operare con le disuguaglianze quando si eleva a potenza o si estrae una radice.
Media aritmetica e media geometrica di due numeri positivi.	
Logaritmi e loro proprietà.	Saper applicare le proprietà dei logaritmi.
Logaritmo decimale e sua relazione con la rappresentazione decimale dei numeri.	
$*$ Basi numeriche.	$*$ Saper rappresentare un numero naturale in basi diverse.

Tema 2

Algebra elementare, equazioni, disequazioni

SAPERE	SAPER FARE
Elementi di calcolo letterale, uso delle parentesi.	Saper semplificare un'espressione algebrica (riduzione di termini simili, cancellazione di termini opposti, ecc.).
Polinomi.	Somma e prodotto di polinomi.
Prodotti notevoli. ∗ Potenza *n*-esima di un binomio.	
Divisione con resto tra polinomi. Regola di Ruffini. ∗ I polinomi come funzioni e il teorema di identità dei polinomi (un enunciato preciso, anche senza dimostrazione).	Saper "fattorizzare" un polinomio in casi semplici.
Espressioni razionali fratte.	Somma e prodotto di espressioni razionali fratte.
Identità ed equazioni: nozione di soluzione.	Saper semplificare o trasformare un'equazione in un senso desiderato (regole per il passaggio di un addendo oppure di un fattore da un membro all'altro ecc.).
Equazioni algebriche di primo e secondo grado.	Saper risolvere anche equazioni di grado superiore in casi particolari. Applicazioni della legge di annullamento del prodotto.
Sistemi lineari di due equazioni in due incognite.	Saper applicare uno o più metodi risolutivi per i sistemi lineari.

Disequazioni.	Saper semplificare o trasformare una disequazione in un senso desiderato (regole per il passaggio di un addendo oppure di un fattore da un membro all’altro ecc.).
Disequazioni algebriche di primo e secondo grado.	
Disequazioni con espressioni fratte. Radicali, disequazioni con radicali.	

Tema 3

Insiemi, elementi di logica, calcolo combinatorio, relazioni e funzioni

SAPERE	SAPER FARE
Linguaggio elementare degli insiemi; appartenenza, inclusione, intersezione, unione, complementare, insieme vuoto.	$*$ Saper interpretare formule insiemistiche e saper dimostrare semplici identità insiemistiche.
Coppie ordinate (prodotto cartesiano).	
Relazioni, funzioni (o applicazioni). $*$ Relazioni di equivalenza e di ordine.	
$*$ Funzioni iniettive, suriettive, biiettive (corrispondenze biunivoche).	
$*$ Composizione di funzioni, funzione identica, funzione inversa di una funzione biiettiva.	
$*$ Permutazioni, disposizioni semplici e con ripetizione, combinazioni semplici.	$*$ Saper calcolare il numero dei sottoinsiemi composti da k elementi di un insieme con n elementi.
Connettivi logici: negazione, congiunzione, disgiunzione.	
Implicazione. Condizioni sufficienti, condizioni necessarie.	

Conoscere il significato dei termini: assioma, definizione, teorema, lemma, corollario, ipotesi, tesi. Dimostrazioni per assurdo.	Saper riconoscere ipotesi e tesi in un teorema.
$*$ Quantificatori: $\forall$ (per ogni) e $\exists$ (esiste).	* Uso dei quantificatori.

Tema 4

Geometria

SAPERE	SAPER FARE
Geometria euclidea piana: incidenza, ordinamento, parallelismo, congruenza (in alcuni testi: uguaglianza). Esistenza e unicità della parallela e della perpendicolare per un punto ad una retta assegnata.	
Lunghezza di un segmento (distanza tra due punti); corrispondenza biunivoca tra i punti di una retta e i numeri reali.	
Ampiezza degli angoli: misura in gradi. Lunghezza della circonferenza e misura degli angoli in radianti. Somma degli angoli interni di un triangolo. Relazioni tra gli angoli formati da due rette parallele tagliate da una trasversale.	
Criteri di equiscomponibilità dei poligoni e nozione elementare di area. Area del cerchio. Relazioni tra aree di figure simili.	
Misure e proporzionalità tra grandezze.	Saper eseguire cambiamenti di unità di misura.

Luoghi geometrici notevoli (asse di un segmento, bisettrice di un angolo, circonferenza ecc.).
$*$ Figure convesse.

Proprietà delle figure piane: criteri di congruenza dei triangoli. Punti notevoli dei triangoli (baricentro, incentro, circocentro, ortocentro). Parallelogrammi. Teoremi di Talete, di Euclide, di Pitagora. Proprietà segmentarie e angolari del cerchio (corde, secanti, tangenti, arco sotteso da un angolo). Angoli al centro e alla circonferenza.

Saper effettuare costruzioni geometriche elementari: asse di un segmento, bisettrice di un angolo, circonferenza passante per tre punti assegnati, retta passante per un punto e perpendicolare (oppure parallela) ad una retta assegnata. Saper svolgere alcune dimostrazioni geometriche; ad esempio, in relazione ai punti notevoli di un triangolo e alle proprietà dei parallelogrammi.

Trasformazioni geometriche del piano: isometrie e similitudini. Simmetrie rispetto ad una retta e rispetto ad un punto, traslazioni, rotazioni, omotetie e loro composizioni.

Coordinate cartesiane: equazioni di rette e circonferenze. Equazioni di semplici luoghi geometrici (parabole, ellissi, iperboli) in sistemi di riferimento opportuni.

Saper interpretare geometricamente equazioni e sistemi algebrici. Saper tradurre analiticamente problemi geometrici come ad esempio: retta per un punto perpendicolare ad una retta assegnata; simmetrico di un punto rispetto ad una retta; immagine di un punto attraverso una traslazione o una rotazione con centro nell'origine.

Trigonometria: seno, coseno, tangente di un angolo. Identità trigonometrica fondamentale $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Formule di addizione.

Saper "risolvere" un triangolo (eventualmente con l'uso di un opportuno strumento di calcolo). Ad esempio: calcolare le ampiezze degli angoli di un triangolo rettangolo di cateti assegnati.

Geometria euclidea dello spazio: mutue posizioni di due rette, di due piani, di una retta e di un piano (angoli, parallelismo, perpendicolarità). Diedri e triedri.

Saper visualizzare una configurazione geometrica nello spazio. Per esempio: che cosa si ottiene intersecando (a) una sfera con un piano; (b) un prisma infinito a sezione rettangolare con un piano; (c) un cubo con un piano perpendicolare ad una diagonale?

Sfera, cono, cilindro.

Poliedri convessi, parallelepipedi, piramidi, prismi, poliedri regolari.
$*$ Formula di Eulero.

Idea intuitiva di volume dei solidi. Formule per il calcolo del volume e dell'area della superficie di parallelepipedo, piramide, prisma, cilindro, cono e sfera. Relazioni tra aree e tra volumi di solidi simili.

$*$ Consapevolezza dell'esistenza di geometrie in cui sono negati alcuni assiomi della geometria euclidea classica (geometrie non-euclidee).

Tema 5

Successioni e funzioni numeriche

SAPERE	SAPER FARE
Nozione di successione. $*$ Successioni definite assegnando il termine generale e successioni definite per ricorrenza.	Saper riconoscere in casi semplici se una successione è crescente.
Progressioni aritmetiche e geometriche.	Saper effettuare semplici calcoli sulle progressioni, come ad esempio la somma dei primi n termini.
Le funzioni numeriche e i loro grafici. Dominio di una funzione. $*$ Proprietà qualitative: crescenza, decrescenza, zeri, limitatezza, massimi e minimi relativi e assoluti.	Saper interpretare il grafico di una funzione: riconoscere dal disegno gli intervalli dove la funzione cresce o decresce e dove assume valori positivi o negativi; individuare i punti di massimo o di minimo; riconoscere eventuali simmetrie (funzioni pari, funzioni dispari, funzioni periodiche).
Proprietà di alcune funzioni elementari: polinomi di primo e secondo grado, funzione potenza $x \mapsto x^{\frac{n}{m}}$; funzioni logaritmo $x \mapsto \log_a x$ ed esponenziale $x \mapsto a^x$ (con $a > 0$, $a \neq 1$); funzioni trigonometriche $x \mapsto \operatorname{sen} x$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \operatorname{tg} x$. Loro grafici. La funzione logaritmo come inversa dell'esponenziale. Periodicità delle funzioni trigonometriche.	

N. B.: Il calcolo differenziale e integrale viene svolto in maniera approfondita e dettagliata sia negli insegnamenti di *Analisi Matematica* per i corsi di laurea in Matematica, Fisica, Ingegneria e Informatica, sia negli insegnamenti di *Matematica*, *Istituzioni di Matematica* e di *Matematica Generale* di altri corsi di laurea. Anche gli studenti che non hanno avuto occasione di acquisire nozioni di calcolo differenziale e integrale negli studi secondari possono dunque ragionevolmente pensare di iscriversi a uno dei corsi di laurea citati. Tuttavia conviene avvertire che gli strumenti del calcolo differenziale e integrale sono spesso usati fin dall'inizio in altri insegnamenti (Fisica, per esempio). Inoltre, soprattutto nei corsi di laurea dove l'insegnamento è impartito sulla base di semestri intensivi non è facile apprenderne in poche settimane sia i fondamenti teorici sia la manualità.

CAPITOLO II

Esercizi e quesiti illustrativi

In questa sezione del Syllabus vengono proposti alcuni esercizi e quesiti con l'intento di illustrare, approfondire e concretizzare gli argomenti elencati in precedenza. Si è creduto opportuno mantenere la suddivisione in cinque temi (*Strutture numeriche, aritmetica; Algebra elementare, equazioni, disequazioni; Insiemi, elementi di logica, calcolo combinatorio, relazioni e funzioni; Geometria; Successioni e funzioni numeriche*) in modo da sottolineare la continuità con la sezione "Sapere, saper fare" anche se, in alcuni casi, i quesiti possono far riferimento a più argomenti di temi diversi.

Per ciascun tema vengono proposti esercizi e quesiti a due livelli. Si ritiene che uno studente che si prepara ad affrontare un corso di laurea con elevati contenuti matematici debba possedere una preparazione tale da consentirgli di risolvere agevolmente una parte consistente degli esercizi di "livello base". Si ritiene poi che uno studente che sia in grado di misurarsi con un certo successo con gli esercizi "che richiedono maggiore attenzione" possieda non solo la preparazione necessaria per ben iniziare, ma abbia anche ragionevoli speranze di procedere senza troppa fatica negli studi prescelti.

Per ciascun quesito viene riportata una soluzione commentata. A questa lo studente può ricorrere per controllare le proprie risposte, oppure nei casi in cui non sia pervenuto a una conclusione.

Nota. Anche se la capacità di utilizzare in modo consapevole e ragionato strumenti di calcolo elettronico è auspicabile e può essere d'aiuto nell'affrontare gli studi universitari, per le particolari finalità di questo Syllabus, nella risoluzione dei quesiti di seguito proposti non è opportuno l'uso di tali strumenti.

Tema 1

strutture numeriche, aritmetica

1.1 Quesiti di livello base

1.1.1 Eseguire la divisione con resto di 237 per 43 ed esprimere con un'uguaglianza il significato dell'operazione compiuta.

1.1.2 Fra 1 e 600 (inclusi) quanti sono i multipli di 3, quanti i multipli di 3 e di 4, quanti i multipli di 3 o di 4, quanti i multipli di 17?

1.1.3 Riscrivere in ordine crescente i seguenti numeri: $\frac{2}{5}$; 0; -1; 0,91; -3; 0,19; 0,003

1.1.4 Date le due frazioni $\frac{3}{7}$ e $\frac{4}{5}$, trovare una frazione che sia strettamente compresa fra esse. (Si può procedere in vari modi ...)

1.1.5 Eseguendo la "divisione con virgola" fra due interi, in quale caso essa si arresta? Se non si arresta, essa dà luogo, almeno da un certo punto in poi, ad un allineamento decimale periodico. Perché?

1.1.6 Si consideri il numero $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23$; è possibile decidere se è divisibile per 17 senza eseguire alcuna operazione?

1.1.7 Un'azienda, in un momento di difficile congiuntura, abbassa lo stipendio di tutti i dipendenti dell'8%; superata questa difficoltà, alza tutti gli stipendi dell'8%. Come è, dopo di ciò, la situazione dei dipendenti?

1.1.8 Trovare il Massimo Comune Divisore di 10002 e 9999.

1.1.9 Dimostrare che per ogni intero naturale n, il numero $n^3 - n$ è divisibile per 6.

1.1.10 Qual è il maggiore dei due numeri: $5^{1/3}, 3^{1/2}$?

1.1.11 Ricordiamo che la "parte intera" di un numero reale x è il più grande intero che non supera x; la parte intera di x si indica con $[x]$; ad esempio, $[2{,}34] = 2$, $[-2{,}24] = -3$. Ciò premesso, rispondere al seguente quesito: qual è la "parte intera" del logaritmo del numero 3748279 in base 10?

1.1.12 In quali casi gli interi n, $n+2$ sono primi fra loro? (Ricordiamo che due interi naturali si dicono primi fra loro se hanno come unico divisore comune 1)

1.1.13 È ben noto che il numero $\sqrt{2}$ è irrazionale; per dimostrarlo si può procedere per assurdo, nel seguente modo. Supponiamo che sia $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ dove p e q sono interi e dove si può esigere che p e q siano primi fra loro. Moltiplicando membro a membro per q ed elevando al quadrato, si trova:

$$2q^2 = p^2 \ .$$

Questa uguaglianza ci dice che p^2 è pari e, perciò, anche p è pari. Infatti se p non fosse multiplo di 2, nemmeno p^2 potrebbe esserlo. Poniamo allora: $p = 2r$; sostituendo si ha $2q^2 = 4r^2$, da cui $q^2 = 2r^2$. Da questa relazione ricaviamo come prima che q è pari; dunque p e q sono entrambi pari: assurdo perché li abbiamo supposti primi fra loro.

Si chiede di dimostrare, usando un ragionamento analogo, che $\sqrt{3}$ è irrazionale.

1.1.14 Dimostrare che $\log_2 5$ è irrazionale. (Un avvio: si procede per assurdo; se fosse razionale, si avrebbe $\log_2 5 = \frac{p}{q}$, con p e q interi naturali ...)

1.2 Quesiti che richiedono maggiore attenzione

1.2.1 La somma di tre numeri interi consecutivi è divisibile per 3. Verificarlo su qualche caso e dimostrarlo. Questo fatto è generalizzabile (e come?) alla somma di quattro interi consecutivi? Di cinque?

1.2.2 Per quali valori interi di n il numero $n^2 - 4n + 3$ è divisibile per 7?

1.2.3 Siano (a, a') ,(b, b') due coppie di numeri reali positivi, con $a < a'$, $b < b'$; dei due numeri $ab + a'b'$, $ab' + a'b$ qual è il più grande? Più in generale, dati due insiemi A, B, ciascuno formato da n diversi numeri reali positivi, si moltiplichi ciascun numero del primo insieme per un numero del secondo, in modo da esaurire tutti i numeri di questo, e si sommino gli n prodotti ottenuti. Come procedere affinché il risultato sia massimo? E come per ottenere che sia minimo?

1.2.4 Consideriamo la coppia di frazioni:

$$\frac{a}{b}\,, \quad \frac{a'}{b'}$$

(b, b' interi positivi, a, a' interi non negativi). Diciamo che le due frazioni sono fra loro associate se $a'b - ab' = \pm 1$.

Si dimostri che due frazioni associate sono entrambe irriducibili (cioè, come si dice usualmente, sono ridotte ai minimi termini).

Si dimostri poi che se due frazioni a/b, a'/b' sono fra loro associate, la frazione $(a + a')/(b + b')$ è associata con entrambe.

1.2.5 Se è $2{,}3 \leq x \leq 2{,}5$ ed è $-1{,}6 \leq y \leq -1{,}4$, fra quali limiti sono compresi i numeri $x + y$, $x - y$, xy, x/y?

1.1 Risposte commentate

1.1.1 Il quoziente è 5, il resto è 22, e il significato dell'operazione compiuta è espresso dalla relazione: $237 = 43 \cdot 5 + 22$ essendo evidente che $22 < 43$.

1.1.2 Questo esercizio, pur nella sua semplicità, è istruttivo. Cominciamo considerando la terna di numeri 1, 2, 3; i resti della divisione per 3 sono rispettivamente 1, 2, 0; proseguendo, troviamo terne di numeri con gli stessi resti 1, 2, 0 che si ripetono periodicamente. Dunque un solo numero per ogni terna (il terzo!) ha come resto 0, cioè è divisibile per 3. Si trovano, in conclusione, questi risultati:

- Numero dei multipli di 3: 200;
- Numero dei multipli di 4: 150;
- Numero dei multipli di 12: 50.

Per i multipli di 17 si procede in modo analogo, ma poiché 600 non è multiplo di 17, si deve fare la divisione con resto di 600 per 17: il quoziente è 35 (e il resto è 5).

Il numero degli interi divisibili per 3 o per 4 è uguale alla somma del numero degli interi divisibili per 3 con quelli divisibili per 4, diminuita del numero di quelli che sono divisibili per 3 e per 4, cioè per 12. Nel nostro caso si ha dunque: $(200 + 150) - 50 = 300$.

1.1.3 L'ordinamento richiesto è, evidentemente, il seguente: -3; -1; 0; $0{,}003$; $0{,}19$; $2/5$; $0{,}91$ che può essere opportunamente visualizzato mediante la "retta dei numeri".

1.1.4 Le due frazioni $3/7$ e $4/5$, ridotte allo stesso denominatore,diventano rispettivamente:

$$\frac{15}{35}\,, \quad \frac{28}{35}\,.$$

È evidente che la prima è minore delle seconda; è anche facile trovare una frazione intermedia (ad esempio, $20/35$). Anche la media aritmetica, cioè la frazione $43/70$ è compresa fra le due frazioni assegnate. Un'altra idea per trovare una frazione intermedia consiste nel sommare numeratori e denominatori: si verifica subito che la frazione $\frac{3+4}{7+5} = \frac{7}{12}$ è intermedia fra le due frazioni assegnate.

1.1.5 Una frazione irriducibile $\frac{a}{b}$ si può esprimere come numero decimale finito (cioè come frazione che ha per denominatore una potenza di 10) quando e soltanto quando il suo denominatore contiene solo fattori 2 e 5. In caso diverso la "divisione con la virgola" non può concludersi. Le successive cifre vengono determinate, una volta esaurite le cifre del dividendo, aggiungendo la cifra 0 ai resti; ma i resti diversi, se il divisore è b, possono essere al più in numero di $b-1$ (infatti, il resto non può essere uguale a 0). Dunque vi sarà un resto che si ripete, dopodiché le cifre si ripeteranno periodicamente. Il periodo allora non può superare $b-1$. È facile trovare esempi in cui il periodo è $b-1$. Consideriamo, ad esempio, la frazione $3/7$; il risultato del calcolo è $0{,}42857342873\ldots$ con periodo 6. Esempio di tipo opposto: $5/6 = 0{,}8333...$, con periodo 1.

1.1.6 Il numero assegnato si presenta già scomposto in fattori primi. Fra questi fattori non compare il 17, che è un numero primo. Allora il numero assegnato non è divisibile per 17. L'esercizio ci ricorda che la decomposizione di un numero in fattori primi è unica (a meno dell'ordine dei fattori).

1.1.7 Se x è lo stipendio iniziale di un dipendente, dopo l'abbassamento questo diventa $x - x \cdot 0{,}08 = x \cdot (1 - 0{,}08)$, dopo il rialzo diventa $x \cdot (1 - 0{,}08) \cdot (1 + 0{,}08) = x \cdot (1 - 0{,}0064)$; pertanto lo stipendio, alla fine, rimane ad un livello leggermente più basso di quello iniziale.

1.1.8 Ogni divisore comune dei due numeri deve essere anche un divisore della loro differenza; nel caso specifico, deve essere un divisore di $10002 - 9999 = 3$; è immediato verificare che 3 è effettivamente un divisore comune dei due numeri; perciò esso è il M.C.D.

Su questo principio è basato l'algoritmo di Euclide per la ricerca del M.C.D.

1.1.9 Si ha $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1)$; il numero è dunque prodotto di 3 interi consecutivi; esso è certamente divisibile per 2 e per 3, dunque per 6.

1.1.10 Si deve avere ben presente che per due numeri reali positivi x, y e per un qualsiasi intero positivo m si ha

$$x^m < y^m \quad \text{se e soltanto se} \quad x < y \, .$$

Nel nostro caso, prendendo $m = 6$, si ha che la disuguaglianza $5^{1/3} < 3^{1/2}$ equivale alla $(5^{1/3})^6 < (3^{1/2})^6$, cioè alla $5^2 < 3^3$; ma questa è vera, essendo $25 < 27$. Dunque è vero che il maggiore dei due numeri proposti è $3^{1/2}$.

1.1.11 Teniamo presente che se è $b > 1$ e se x e y sono numeri reali positivi, la disuguaglianza

$$x \leq y \quad \text{è equivalente alla} \quad \log_b x \leq \log_b y \, .$$

Prendiamo $x = 10^m$, con m intero naturale, $y = 3748279$. Allora

$$m \leq \log_{10} 3748279 \quad \text{se e solo se} \quad 10^m \leq 3748279 \, .$$

Il maggiore intero m per cui vale quest'ultima disuguaglianza è 6. Il ragionamento che abbiamo fatto ha, in realtà, portata generale ed è cosa ben nota: la parte intera del logaritmo decimale di un intero positivo N è uguale al numero delle cifre decimali di N diminuito di 1. Dunque, la parte intera di $\log_{10} 3748279$ è uguale a 6.

1.1.12 Ogni divisore comune di due interi è anche divisore della loro differenza; pertanto, ogni divisore comune di n e di $n+2$ è un divisore di 2; allora, i casi sono due: n ed $n+2$ sono entrambi pari, cioè entrambi divisibili per 2, oppure entrambi dispari, e allora sono primi fra loro.

1.1.13 Il ragionamento svolto nel testo per provare che $\sqrt{2}$ è irrazionale si applica alla lettera per dimostrare che $\sqrt{3}$ è irrazionale, osservando che se p è un intero naturale tale che p^2 è divisibile per 3, allora anche p è divisibile per 3.

1.1.14 La relazione $\log_2 5 = p/q$, con p e q interi naturali equivale alla $2^{p/q} = 5$, cioè alla $2^p = 5^q$, ma questa relazione è assurda per l'unicità della decomposizione in fattori primi.

* * *

1.2.1 Si ha: $1+2+3=6$; $7+8+9=24$; .... In generale, la somma di tre interi consecutivi, cioè il numero $n+(n+1)+(n+2)=3n+3=3(n+1)$ è divisibile per 3.

La somma di quattro interi consecutivi si può scrivere: $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)=4n+6$ e certamente non è divisibile per 4. Passiamo a cinque interi consecutivi: $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)=5n+10=5(n+2)$ e otteniamo evidentemente un numero divisibile per 5. L'enunciato ci stimola ad ottenere una risposta generale, riguardante la somma di k interi consecutivi; si ha:

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+\ldots+(n+k-1)=nk+(1+2+3+\ldots+k-1)=nk+\frac{1}{2}k(k-1)\,.$$

Si vede allora che per k dispari, essendo $k-1$ pari, l'espressione scritta è divisibile per k, mentre per k pari, essendo $k-1$ dispari, l'espressione è divisibile per $\frac{1}{2}k$, ma non per k.

1.2.2 Si ha: $n^2-4n+3=(n-1)\cdot(n-3)$; questo prodotto è divisibile per 7 (che è numero primo) quando e solo quando uno dei fattori lo è. I numeri cercati sono dunque quelli per cui $n-1=7\cdot k$, cioè $n=1+7\cdot k(k=0,1,2,3,\ldots)$, oppure $n-3=7\cdot h$, cioè $n=3+7\cdot h(h=0,1,2,\ldots)$. Notiamo che questi due insiemi di numeri sono disgiunti.

1.2.3 Si intuisce che il risultato sarà più grande quando nel prodotto vengono accoppiati il maggiore con il maggiore e il minore con il minore. Dimostriamo dunque che

$$ab+a'b'>ab'+a'b\;;$$

questa relazione equivale alle seguenti:

$$a(b-b')+a'(b'-b)>0\;;\quad a(b-b')-a'(b-b')>0\;;\quad (a-a')(b-b')>0\,.$$

Quest'ultima è evidentemente vera. Per il caso generale, indichiamo la soluzione soltanto in termini intuitivi. Se due elementi di A, a,a' con $a<a'$ vengono moltiplicati per due numeri di B, b,b' tali che $b>b'$, possiamo scambiare b con b' aumentando la somma complessiva, come abbiamo dimostrato. Così, per mezzo di successivi scambi, possiamo fare im modo che gli elementi di A vengano moltiplicati per quelli di B che corrispondono ad essi nell'ordinamento, e ciò sempre accrescendo il valore della somma complessiva. Al contrario, si potrà ottenere, con successivi scambi che fanno diminuire la somma complessiva, che gli elementi di B si seguano in ordine inverso rispetto a quelli di A che sono con essi associati con la moltiplicazione.

1.2.4 Supponiamo, per assurdo, che la prima delle frazioni sia riducibile; allora c'è un intero $k > 1$ tale che $a = ka''$, $b = kb''$; ma allora si ha: $a'b - ab' = k(a'b'' - a''b') \neq \pm 1$. Analogamente si procede per la seconda.

Dimostriamo che se a/b e a'/b' sono fra loro associate, anche a/b e $(a+a')/(b+b')$ lo sono; basta fare un piccolo calcolo:

$$(a+a')b - a(b+b') = a'b - ab' = \pm 1 \ .$$

La teoria delle frazioni associate è molto elegante; ad esempio, si può dimostrare che partendo dalle due frazioni $0/1$, $1/1$ e applicando più volte quella strana operazione (che è una ingannevole addizione)

$$\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}\right) \to \frac{a+a'}{b+b'}$$

si può ottenere una *qualsiasi* frazione irriducibile con valore compreso fra 0 ed 1.

1.2.5 Sappiamo che dalle due disuguaglianze (nello stesso senso!) $a \leq b$, $c \leq d$ si deduce: $a+c \leq b+d$; pertanto, nel nostro caso, si ha:

$$2{,}3 + (-1{,}6) \leq x+y$$

cioè $0,7 \leq x+y$; procedendo in modo analogo per l'estremo destro, si ottiene:

$$0{,}7 \leq x+y \leq 1{,}1 \ .$$

Per avere i limiti di variabilità di $x-y$, basta tenere presente che $x-y = x+(-y)$. Occorre allora trovare i limiti di variabilità di $-y$; poiché passando agli opposti i sensi delle disuguaglianze si invertono, si ha

$$(*) \qquad 1{,}4 \leq -y \leq 1{,}6$$

perciò procedendo come nel primo caso si ottiene:

$$3{,}7 \leq x-y \leq 4{,}1 \ .$$

Per le altre due limitazioni, la via più sbrigativa è quella di ridursi a disuguaglianze tra numeri non negativi; prendiamo dunque la seconda limitazione nella forma $(*)$. Da questa e dalla prima limitazione si ha:

$$2{,}3 \cdot 1{,}4 \leq x \cdot (-y) \leq 2{,}5 \cdot 1{,}6$$

cioè:

$$2{,}3 \cdot 1{,}4 \leq -xy \leq 2{,}5 \cdot 1{,}6$$

e, infine:

$$-2{,}5 \cdot 1{,}6 \leq xy \leq -2{,}3 \cdot 1{,}4\ .$$

Per ottenere la quarta limitazione, ricordiamo che se a e b sono numeri positivi, la disuguaglianza $a \leq b$ equivale alla $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$. Ritorniamo dunque ancora alla $(*)$; passando ai reciproci si ha: $\frac{1}{1{,}6} \leq \frac{1}{-y} \leq \frac{1}{1{,}4}$. Facendo ora intervenire la limitazione per la x, si ottiene:

$$\frac{2{,}3}{1{,}6} \leq -\frac{x}{y} \leq \frac{2{,}5}{1{,}4}$$

cioè, infine:

$$-\frac{2{,}5}{1{,}4} \leq \frac{x}{y} \leq -\frac{2{,}3}{1{,}6}\ .$$

Tema 2

Algebra elementare, equazioni, disequazioni

2.1 Quesiti di livello base

2.1.1 Sia
$$A = \frac{p^3 - q^3}{p - q}.$$
Calcolare il valore di A, quando $p = \dfrac{1}{2}$, $q = 1$.

2.1.2 Semplificare (se possibile) l'espressione
$$\frac{(a+b)^2 - c^2}{c - a - b}.$$

2.1.3 Risolvere l'equazione
$$(2x+1)(3x-2)(x+4) = 0.$$

2.1.4 Tradurre la seguente frase del linguaggio corrente in una formula matematica: "Detraendo il 19% dall'importo lordo L, si ottiene l'importo netto N".

2.1.5 Risolvere il sistema:
$$\begin{cases} 0{,}3x + 0{,}12y = 0 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$$

2.1.6 Determinare l'insieme dei valori di x per i quali risulta
$$\frac{x+\sqrt{2}}{x+\sqrt{3}} \geq 0.$$

2.1.7 A partire dalla relazione
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$$
(con p, q, r non nulli) esprimere p in funzione di q e di r.

2.1.8 Nel polinomio $x^2 + y^2$ eseguire le sostituzioni:

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad y = \frac{2t}{1+t^2}$$

e poi semplificare.

2.1.9 Semplificare: $(y^2 - x^2)(y^2 + x^2 - 1) - y^4 + x^4$.

2.1.10 Si sa che la somma di due numeri è 6 e che il loro prodotto è 8. Trovare i due numeri.

2.1.11 Si sa che la differenza di due numeri è 3 e che il loro prodotto è -2. Trovare i due numeri.

2.1.12 Tradurre la seguente frase del linguaggio corrente in una formula matematica: “Se la somma dei reciproci di due numeri positivi è 1, la somma dei due numeri è uguale al loro prodotto”.

Stabilire quindi se l’enunciato è vero.

2.2 Quesiti che richiedono maggiore attenzione

2.2.1 Stabilire quali delle seguenti uguaglianze sono vere qualunque siano i numeri a, b, c, d (purché le espressioni abbiano senso) e giustificare le risposte:

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d} \qquad \frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d} \qquad \frac{a}{c} : \frac{b}{d} = \frac{a : b}{c : d}$$

$$(a+b) : c = a : c + b : c \qquad a : (b+c) = a : b + a : c.$$

2.2.2 Scrivere un’equazione di terzo grado che abbia per soluzioni i numeri $-1, 4, \dfrac{11}{3}$.

2.2.3 Determinare i valori di x per i quali risulta

$$x^3 + 2 > 0.$$

2.2.4 Dati due numeri distinti a, b, determinare due numeri c, d in modo che sussista l’identità:

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{c}{x+a} + \frac{d}{x+b}.$$

2.2.5 Trasformare (se possibile) la seguente espressione in un prodotto di due fattori di secondo grado (nel complesso delle variabili x, y, u, v):

$$(xu - yv)^2 + (xv + yu)^2.$$

2.2.6 Trasformare (se possibile) le seguenti espressioni in somme di quadrati:

$$3x^2 - 2xy + 2y^2 \qquad\qquad 3x^2 - 6xy + 2y^2.$$

2.2.7 Eseguire la divisione del polinomio x^4 per il polinomio $x^2 + 1$ ed esprimere con un'uguaglianza il significato dell'operazione eseguita.

2.2.8 Dati due numeri reali a, b e sapendo che $0 < a \leq b$, in che relazione stanno tra loro i numeri $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$?

2.2.9 Il lato più lungo di un foglio rettangolare misura k cm. Quale deve essere la misura del lato più corto per fare sì che, dividendo il foglio in due parti uguali (con un taglio parallelo al lato più corto) ciascuna di queste sia simile al foglio iniziale?

2.2.10 Determinare le soluzioni delle seguenti equazioni:

$$\sqrt{x^2} = x \ , \qquad\qquad \sqrt{x^2 + 3} = 2x \ .$$

2.2.11 Determinare le soluzioni delle seguenti disequazioni:

$$\frac{1}{x} + x > 2 \ , \qquad\qquad \frac{1}{\sqrt{x+5}} + 2 \geq 0 \ .$$

2.2.12 Dati due numeri a e b distinti, sia c la loro media aritmetica. Vale allora, ovviamente, l'uguaglianza:

(1) $a + b = 2c$.

Da questa qualcuno ha dedotto successivamente le seguenti:

(2) $(a + b)(a - b) = 2c(a - b)$

(3) $a^2 - b^2 = 2ac - 2bc$

(4) $a^2 - 2ac = b^2 - 2bc$

(5) $a^2 - 2ac + c^2 = b^2 - 2bc + c^2$

(6) $(a - c)^2 = (b - c)^2$

(7) $a - c = b - c$

(8) $a = b$.

La (8) contraddice l'ipotesi da cui siamo partiti, dunque almeno uno dei passaggi fatti è sbagliato. Quale o quali?

2.3 Risposte commentate

2.1.1 $A = \frac{7}{4}$.

Nota. Il calcolo poteva essere effettuato mediante sostituzione diretta nell'espressione data, oppure osservando preliminarmente che l'espressione può essere semplificata in quanto $p^3 - q^3$ è divisibile per $p - q$. Nel caso specifico, i due procedimenti sono ugualmente semplici. In genere è più vantaggioso effettuare le sostituzioni solo dopo avere eseguito le semplificazioni (specie se i valori numerici da sostituire sono complicati).

2.1.2 $-(a+b+c)$.

2.1.3 Tenuto conto della legge di annullamento del prodotto, le soluzioni dell'equazione data si ottengono semplicemente risolvendo le tre equazioni di primo grado:

$$2x+1=0 \qquad 3x-2=0 \qquad x+4=0$$

quindi le soluzioni sono: $-\frac{1}{2}\ ,\ \frac{2}{3}\ ,\ -4$.

Nota. Chi, invece di ricorrere alla legge di annullamento del prodotto, avesse svolto i calcoli per "togliere le parentesi", avrebbe trasformato l'equazione originaria in un'altra (equivalente alla data, ma di forma diversa) di cui poi sarebbe stato difficile determinare le radici.

2.1.4 $N = L - \frac{19}{100}L = \frac{81}{100}L$.

2.1.5 Il sistema ammette un'unica soluzione: $(x;y) = (0{,}2\ ;\ -0{,}5)$.

2.1.6 Si tratta dell'unione di due intervalli:

$$\{x < -\sqrt{3}\} \quad \text{oppure} \quad \{x \geq -\sqrt{2}\}.$$

Nota. Sarebbe sbagliato usare il segno di disuguaglianza debole (ossia $\leq$) nel caso del primo intervallo e sarebbe sbagliato usare il segno di disuguaglianza forte (ossia $>$) nel caso del secondo intervallo.

Ancor più sbagliato sarebbe usare scritture del tipo

$$-\sqrt{2} \leq x < -\sqrt{3}$$

oppure

$$\begin{cases} x < -\sqrt{3} \\ x \geq -\sqrt{2} \end{cases}$$

Cercate di capire perché tutte queste scritture non sono accettabili!

2.1.7

$$p = \frac{1}{\frac{1}{r} - \frac{1}{q}} = \frac{qr}{q-r}.$$

Nota. L'espressione trovata ha senso solo se $q \neq r$. D'altra parte, questa condizione era implicita già nella formulazione del quesito, poiché se fosse $q = r$ ne seguirebbe $\frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ e quindi, sostituendo nella relazione iniziale, $\frac{1}{p} = 0$, relazione non soddisfatta da alcun valore di p.

2.1.8 Si ottiene un'espressione in t che, effettuate le debite semplificazioni, si riduce alla costante 1.

Nota. Il risultato ottenuto ammette un'interpretazione geometrica in termini di funzioni trigonometriche: posto $t = \operatorname{tang}\theta/2$ (con θ angolo opportuno) risulta $x = \cos\theta$, $y = \operatorname{sen}\theta$. Quindi si tratta delle equazioni parametriche della circonferenza con centro nell'origine e raggio 1.

2.1.9 Per non dover fare troppi calcoli conviene riscrivere l'espressione data nella forma $(y^2 - x^2)(y^2 + x^2 - 1) - (y^2 - x^2)(y^2 + x^2)$ da cui, raccogliendo il fattore comune $(y^2 - x^2)$ e semplificando, si ottiene $x^2 - y^2$.

2.1.10 Detti p, q i due numeri, si tratta di risolvere il sistema:

$$\begin{cases} p + q = 6 \\ p \cdot q = 8. \end{cases}$$

La soluzione è data dai due numeri 2 e 4.

2.1.11 Ragionando come per il quesito precedente e risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} p - q = 3 \\ p \cdot q = -2 \end{cases}$$

si trovano due soluzioni: la coppia di numeri 1 e -2 e la coppia di numeri 2 e -1.

Nota. I quesiti 2.1.10 e 2.1.11 sono simili. Tuttavia il primo ammette una sola soluzione, mentre il secondo ne ammette due. Per chi avesse la curiosità di capire il perché di questa apparente anomalia, ecco una possibile spiegazione. In entrambi i casi si tratta di risolvere un sistema di secondo grado. Ripercorriamo per sommi capi le tappe del procedimento risolutivo: nella prima equazione si esplicita una delle due variabili in funzione dell'altra, per esempio q in funzione di p, e si sostituisce l'espressione così trovata nella seconda equazione; con ciò si perviene ad un'equazione di secondo grado nella sola p, che dunque ha due soluzioni p_1, p_2 (le quali risultano reali e distinte in entrambi i quesiti). Sostituendo p_1 nella prima equazione si trova un certo valore q_1 con la proprietà che (p_1, q_1) è una soluzione del sistema. Analogamente, sostituendo p_2 nella prima equazione, si trova un certo valore q_2 con la proprietà che (p_2, q_2) è una soluzione del sistema.

Orbene, nel caso del sistema del quesito 2.1.10 le due coppie così trovate: $(p_1, q_1) = (2,4)$, $(p_2, q_2) = (4,2)$ coincidono (a meno dell'ordine) e quindi si usa dire che c'è una sola soluzione. Nel caso del sistema del quesito 2.1.11 invece, le due coppie: $(p_1, q_1) = (1, -2)$, $(p_2, q_2) = (2, -1)$ sono distinte. La ragione di fondo del diverso comportamento dei due sistemi deriva dal fatto che nel caso 2.1.10 i ruoli di p e q sono simmetrici e dunque interscambiabili (l'addizione e la moltiplicazione godono della proprietà commutativa) mentre nel caso 2.1.11 i due ruoli di p e q sono distinti (in quanto la sottrazione non gode della proprietà commutativa).

Si noti infine che, proprio grazie alla simmetria del sistema 2.1.10, esiste un metodo più rapido per trovarne la soluzione: basta ricordare che p e q sono le radici dell'equazione $x^2 - (p+q)x + p \cdot q = 0$.

2.1.12 Traduzione. Se a , b sono numeri reali positivi, da $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ segue: $a + b = ab$.

L'enunciato è vero: basta svolgere i calcoli.

Nota. L'ipotesi che i due numeri a, b siano positivi non viene sfruttata nei calcoli, quindi l'enunciato è vero più in generale, anche senza questa limitazione (vanno solo esclusi i valori $a = 0$, $b = 0$). Si noti però che, dei tre casi a priori possibili: numeri entrambi positivi, un numero positivo e l'altro negativo, numeri entrambi negativi, quest'ultimo non si può presentare. Infatti da $a < 0$, $b < 0$ segue che anche i rispettivi reciproci sono entrambi negativi; pertanto la somma di tali reciproci è ancora un numero negativo, e dunque non può essere 1.

* * *

2.2.1 Sono vere la prima, la terza e la quarta uguaglianza (conseguenza delle proprietà formali delle operazioni). Sono false la seconda e la quinta uguaglianza (basta dare un esempio, attribuendo opportuni valori numerici ad a, b, c, d , per es. $a = b = c = d = 1$).

Nota. È importante riflettere sulla struttura delle domande in cui si articola questo quesito e sulla struttura delle rispettive risposte. Le domande contengono dei "quantificatori universali" espressi dalle parole "qualunque siano i numeri..." (una formulazione equivalente poteva essere: "per tutti i numeri..."). In situazioni di questo tipo, ossia quando si tratta di stabilire se un'affermazione "universale" è vera o falsa, per provarne la verità occorre dare una dimostrazione che contempli la totalità dei casi possibili, mentre per provarne la falsità basta esibire un esempio. Infatti un'affermazione si considera "falsa", quando la negazione dell'affermazione è "vera"; inoltre, la negazione di un'affermazione "universale": "Per ogni ... vale ..." è un'affermazione "esistenziale": "Esiste almeno un ... per il quale ... non vale".

2.2.2 Per la legge di annullamento del prodotto (vedi sopra, soluzione dell'esercizio 2.1.3) l'equazione cercata è:

$$(x+1)(x-4)\left(x-\frac{11}{3}\right)=0.$$

<u>Nota</u>. Anche ogni altra equazione ottenuta moltiplicando entrambi i membri della precedente per un numero diverso da 0 soddisfa alle condizioni richieste, per es. $(x+1)(x-4)(3x-11)=0$.

2.2.3 $x>-\sqrt[3]{2}$.

2.2.4 Riducendo allo stesso denominatore e uguagliando i coefficienti al numeratore, ci si riconduce al sistema:

$$\begin{cases} c+d=0 \\ bc+ad=1 \end{cases}$$

che, risolto nelle incognite c,d dà:

$$c=\frac{1}{b-a} \qquad\qquad d=\frac{1}{a-b}\ .$$

2.2.5 Svolgendo i calcoli:

$$(xu-yv)^2+(xv+yu)^2=x^2(u^2+v^2)+y^2(u^2+v^2)=(x^2+y^2)(u^2+v^2).$$

<u>Nota</u>. In generale, partendo da altre espressioni di quarto grado in più variabili, non è detto che queste siano trasformabili in prodotti di due fattori di secondo grado.

2.2.6 L'espressione $3x^2-2xy+2y^2$ può essere scritta in un'infinità di modi come somma di quadrati. Per es.:

$$(x^2-2xy+y^2)+2x^2+y^2=(x-y)^2+(\sqrt{2}x)^2+y^2.$$

<u>Nota</u>. È altresì possibile trasformare la stessa espressione in somma di due soli quadrati. Basta ricorrere al classico procedimento noto come "completamento del quadrato". Si spezza l'espressione data in due componenti:

$$3x^2-2xy+2y^2=(3x^2-2xy+ky^2)+(2-k)y^2$$

e si determina k in modo che il polinomio $3x^2-2xy+ky^2$ risulti un quadrato perfetto. Ciò accade per $k=1/3$:

$$3x^2-2xy+\frac{1}{3}y^2=(\sqrt{3}x-\frac{1}{\sqrt{3}}y)^2.$$

Per $k=1/3$ anche l'altra componente può essere scritta sotto forma di quadrato perfetto:

$$(2-\frac{1}{3})y^2=\frac{5}{3}y^2=\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\,y\right)^2$$

da cui la tesi.

L'espressione $3x^2 - 6xy + 2y^2$ non può essere scritta come somma di quadrati. Per provarlo, basta osservare che attribuendo opportuni valori alle variabili x, y l'espressione assume valori negativi, mentre una somma di quadrati deve essere sempre ≥ 0. Per es. si prenda $x = y = 1$.

2.2.7 Il quoziente della divisione del polinomio $A = x^4$ per il polinomio $B = x^2 + 1$ è $Q = x^2 - 1$ e il resto è $R = 1$. Questo fatto si esprime mediante l'uguaglianza $A = B \cdot Q + R$ che nel caso specifico diventa: $x^4 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) + 1$.

2.2.8 Da $0 < a \leq b$ segue $\dfrac{1}{a} \geq \dfrac{1}{b} > 0$.

2.2.9 Sia h la misura del lato più corto. Allora (vedi Figura 1):

$$k : h = h : \frac{k}{2}.$$

Quindi $h = \dfrac{k}{\sqrt{2}}$.

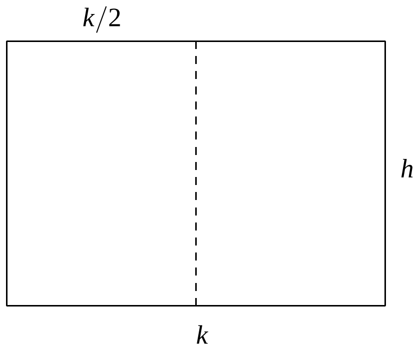


Figura 1.

2.2.10 L'equazione $\sqrt{x^2} = x$ ammette come soluzione ogni valore di x tale che $x \geq 0$.

Nota. I valori di x per cui $x < 0$ invece non risolvono l'equazione. Infatti in tal caso si ha identicamente: $\sqrt{x^2} = -x$.

L'equazione $\sqrt{x^2 + 3} = 2x$ ammette l'unica soluzione $x = 1$.

Nota. Il procedimento risolutivo basato sull'elevamento al quadrato di ambedue i membri dà luogo ad un'equazione di secondo grado $x^2 + 3 = 4x^2$ che ammette due soluzioni: $+1$ e -1. Ma la soluzione negativa va esclusa, in quanto non verifica l'equazione di partenza.

2.2.11 La disequazione $\frac{1}{x} + x > 2$ è verificata per ogni x maggiore di 0 e diverso da 1.

L'insieme delle soluzioni può essere scritto anche nella forma

$$(0,1) \cup (1,\infty).$$

La disequazione $\frac{1}{\sqrt{x+5}} + 2 \geq 0$ è verificata per ogni $x > -5$.

Possiamo anche scrivere che x è soluzione se e solo se

$$x \in (-5,\infty).$$

2.2.12 È sbagliato il passaggio da (6) a (7). Infatti l'uguaglianza tra i quadrati di due numeri non implica l'uguaglianza tra i numeri stessi. Quindi da (6) si può dedurre solo che

$$a - c = b - c \qquad \text{oppure} \qquad a - c = -b + c$$

Tema 3

Insiemi, elementi di logica, calcolo combinatorio, relazioni e funzioni

3.1 Quesiti di livello base

3.1.1 Si considerino i seguenti enunciati: "*n* è un multiplo di 3 o è un numero pari, e inoltre è minore di 20"; "*n* è un numero pari minore di 20, oppure è multiplo di 3 e minore di 20" (*n* è un numero naturale). Interpretare con espressioni insiemistiche i due enunciati.

3.1.2 Illustrare e giustificare (con un controllo su diagrammi di Eulero-Venn) la formula insiemistica $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

3.1.3 Sia p l'affermazione "ogni numero naturale maggiore di 1 è somma di due numeri dispari". Esprimere l'affermazione "non p" (senza usare espressioni come "non è vero che ...").

Stabilire poi se p è vera oppure "non p" è vera.

3.1.4 In quanti modi n persone si possono sedere su una panca? Intorno a un tavolo circolare? (Due schieramenti si ritengono indistinguibili solo se ciascun commensale ha lo stesso vicino di destra e lo stesso vicino di sinistra).

3.1.5 Quante sono le colonne possibili nella schedina del Totocalcio?

3.1.6 Nell'insieme dei numeri naturali, come si può caratterizzare il sottoinsieme $S = \{1,3,5,7,9\}$? Con altre parole: trovare una proprietà caratteristica di S, cioè una proprietà che sia vera per tutti e soli gli elementi di S.

3.1.7 Dati gli insiemi $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{a,b,c\}$, quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B?

3.1.8 Quanti sono i sottoinsiemi dell'insieme $A = \{1,2,3,4\}$?

3.1.9 Nello schema della Figura 2, tutte le frecce hanno il significato di "... è maggiore di ..."; c'è un circoletto vuoto: in questo scrivete un numero naturale che rispetti le frecce. Manca anche qualche freccia fra i numeri dello schema; tracciate le frecce che collegano i numeri scritti.

3.2 Quesiti che richiedono maggiore attenzione

Alcune delle domande che seguono possono sembrare "non matematiche", perché non si parla di numeri, di figure, di insiemi, ... Ma richiedono qualche semplice ragionamento, e quindi sono utili per saggiare le capacità matematiche.

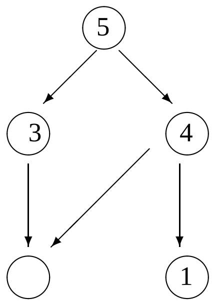


Figura 2.

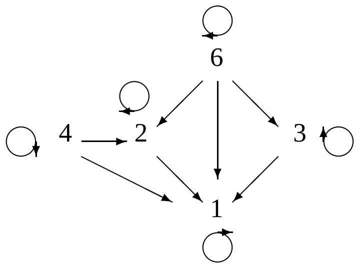


Figura 3.

3.2.1 Tra le applicazioni di cui si parla nell'esercizio 3.1.7, ce ne sono di suriettive? di iniettive? di biiettive?

3.2.2 Siano s, t due segmenti di lunghezza diversa tra loro paralleli e non allineati. Disegnate, se esistono, le seguenti applicazioni:

- un'applicazione biiettiva fra s e t,
- un'applicazione iniettiva di s in t che non sia biiettiva,
- un'applicazione suriettiva di s su t che non sia biiettiva,
- un'applicazione che non sia iniettiva né suriettiva.

3.2.3 Nella Figura 3 sono segnati alcuni numeri e alcune frecce fra essi (questa volta tutte le frecce possibili sono state tracciate). Che cosa possono significare queste frecce?

3.2.4 Nell'insieme delle rette del piano, fare un esempio di una relazione d'equivalenza.

3.2.5 Date le funzioni f, g tali che $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2$, costruite le funzioni che si ottengono componendo g seguito da f (cioè $f \circ g$), e, rispettivamente, f seguito da g (cioè $g \circ f$).

3.2.6 In un'isola ogni abitante è un cavaliere (e allora dice sempre la verità) o un furfante (e allora mente sempre). Incontriamo due abitanti A, B che ci fanno queste dichiarazioni:

A: "Io sono un cavaliere"

B: "A è un furfante".

A è un cavaliere? e B? Si può rispondere a queste domande?

3.2.7 Esprimere senza usare il "non" la frase "Non è vero che Gigi è buono e attento".

3.2.8 L'insieme $\{$A,C,N,O,R$\}$ è caratterizzato dalla proprietà di essere:

a) l'insieme delle prime 16 lettere, tolte alcune di esse
b) l'insieme delle lettere della parola *ANCONA*
c) l'insieme delle lettere della parola *ANCORA*
d) l'insieme delle lettere della parola *ANCORAGGIO*.

3.2.9 Siano p, q due proposizioni; supponiamo che da p si possa dedurre q. Che cosa altro si può certamente dire?

a) da (non p) si può dedurre (non q)
b) da (non q) si può dedurre (non p)
c) da q si può dedurre p
d) nessuna delle affermazioni precedenti.

Scrivere al posto di p e di q due proposizioni matematiche opportune in modo che dalla prima si possa dedurre la seconda. Quale chiamereste ipotesi? Quale chiamereste tesi?

3.3 Risposte commentate

3.1.1 Indichiamo con A, B, C rispettivamente, gli insiemi dei numeri pari, dei multipli di 3, dei numeri minori di 20: le espressioni cercate sono $(A \cup B) \cap C$ e $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.

3.1.2 Basta osservare i due "diagrammi di Eulero-Venn" nella Figura 4. In quello di sinistra $A \cup B$ è rappresentato dalla regione tratteggiata verticalmente, C dalla regione tratteggiata orizzontalmente, e la zona quadrettata rappresenta $(A \cup B) \cap C$. Nel secondo, sono evidenziati $(A \cap C)$ e $(B \cap C)$: la zona tratteggiata in un modo o nell'altro rappresenta $(A \cap C) \cup (B \cap C)$. I risultati finali sono uguali. L'uguaglianza si esprime anche dicendo che "l'unione di insiemi è distributiva rispetto all'intersezione".

3.1.3 L'affermazione "non p" è "ci sono numeri naturali che non sono somma di due numeri dispari". Essa è vera, mentre p è falsa (un numero dispari non è somma di due numeri dispari).

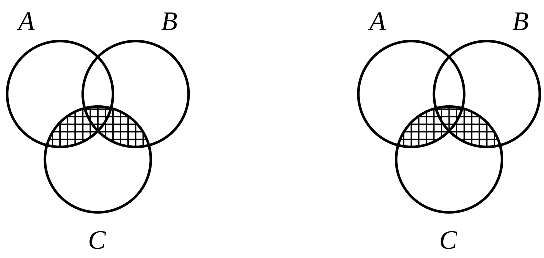


Figura 4.

3.1.4 Nel caso della panca, alla fine ci saranno n posti occupati: al primo ci può andare una qualunque delle n persone, al secondo una delle rimanenti $n-1$: abbiamo finora $n(n-1)$ possibilità. Al terzo posto può andare una delle rimanenti $n-2$ persone, ... Per l'ultimo posto resta una sola possibilità. In tutto i modi di sedersi sono tanti quanto il prodotto dei primi n numeri naturali (lo si indica con $n!$). Intorno a un tavolo circolare, facciamo sedere una persona in un posto qualsiasi (che alla fine non sarà distinguibile dagli altri, perché il tavolo è circolare). Tutto dipende da come le restanti $n-1$ persone si siedono nei restanti $n-1$ posti, e questo può avvenire in $(n-1)!$ modi.

3.1.5 Ci sono tre possibilità per la prima partita, tre per la seconda: combinandole tra loro abbiamo allora $9 = 3^2$ possibilità. Se si tiene conto anche della terza partita, si hanno $27 = 3^3$ possibilità .... Per tutte le 13 partite, le colonne possibili sono 3^{13}.

3.1.6 Si tratta di trovare una proprietà numerica che sia vera per ogni elemento di S, e per nessun altro. Per esempio: S è l'insieme dei numeri dispari minori di 10 (osservate che c'è nascosta la congiunzione "*e*": "... è un numero dispari e inoltre è minore di 10"). Non sarebbe corretto rispondere "sono numeri dispari", perché vi sono numeri dispari che non compaiono in S.

3.1.7 All'elemento 1 possiamo associare a, oppure b, oppure c; poi a 2 possiamo associare a, oppure b, oppure c, e così via. In tutto si hanno 3^4 applicazioni.

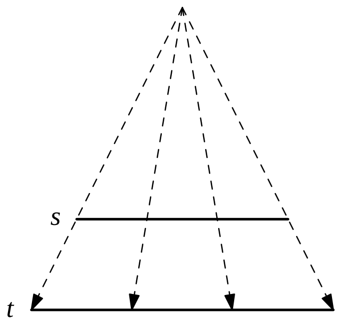
3.1.8 C'è il sottoinsieme vuoto; poi 4 sottoinsiemi formati da un solo elemento; poi 6 formati da due elementi $(\{1,2\},\{1,3\},...,\{3,4\})$; 4 di tre elementi (ciascuno si ottiene eliminando uno dei quattro elementi); infine A stesso. In totale $1+4+6+4+1 = 16$ sottoinsiemi.

3.1.9 In basso a sinistra manca un numero, minore di 3: può trattarsi di 0, di 1 o di 2. Prendiamo per esempio 2: occorre tracciare una freccia da 5 a 2 e a 1, da 4 a 3, da 2 a 1.

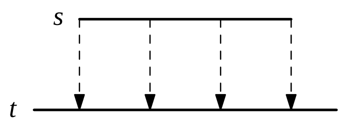
* * *

3.2.1 Vi sono varie applicazioni suriettive di A in B. Ne otteniamo una associando a $1,2,3,4$ rispettivamente a,b,c,c. Non vi sono applicazioni iniettive, perché due elementi di A debbono avere lo stesso corrispondente. In particolare, non vi sono applicazioni biiettive di A in B.

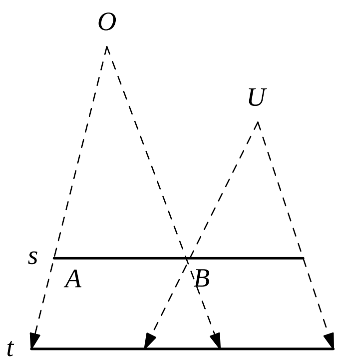
3.2.2 Esistono molte applicazioni di ciascuno dei tipi richiesti. Ad esempio quelle in Figura 5.



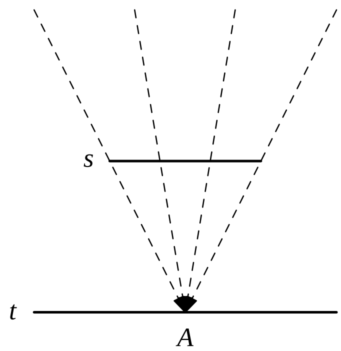
applicazione biiettiva



applicazione iniettiva



applicazione suriettiva (i punti da A a B compreso si proiettano da O; gli altri da U)



applicazione che non è iniettiva e neppure suriettiva (tutti i punti di s sono proiettati nel punto A)

Figura 5.

3.2.3 Una possibile risposta è: “... è multiplo di ...”.

3.2.4 Un esempio possibile è: “due rette r,s non hanno punti comuni o sono coincidenti”.

Un altro possibile esempio è il seguente. Sia P un punto arbitrario del piano; due rette r, s sono equivalenti se passano entrambe per il punto P oppure se entrambe non lo contengono. Le rette del piano risultano in questo modo suddivise in due classi di equivalenza: le rette passanti per P (una classe) e tutte le altre (l'altra classe).

3.2.5 Si osservi che $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Posto $y = f(x) = 2x$, si ha $z = g(y) = g(f(x)) = (2x)^2 = 4x^2$: quindi $(g \circ f)(x) = 4x^2$. Invece $(f \circ g)(x) = 2x^2$.

3.2.6 A e B sono certamente di tipo diverso, perché fanno affermazioni opposte. Non si può dire altro: A può essere un cavaliere, e B un furfante; oppure A ha mentito, e allora è un furfante, e B ha detto la verità, ed è un cavaliere.

3.2.7 Negare che Gigi abbia tutt'e due le qualità, vuol dire che gliene manca almeno una, cioè non è buono o non è attento. È dunque corretta la risposta "Gigi è cattivo o disattento". Spesso si crede che la risposta giusta sia "Gigi è cattivo e disattento": ma non si può pretendere che Gigi abbia tutt'e due le 'qualità negative'.

3.2.8 Risposta giusta: c). La b) non va bene perché nella parola *ANCONA* manca la "R"; la parola *ANCORAGGIO* contiene tutte le lettere A, C, N, O, R, ma contiene anche "G" e "I". Quanto alla risposta a), è vero che l'insieme $\{$A, C, N, O, R$\}$ si ottiene prendendo le prime 16 lettere e togliendone qualcuna, ma non si può dire che in questo modo si ottenga solo tale insieme, e quindi non si può dire che esso sia l'insieme così fatto (la domanda si poteva formulare anche dicendo "trovate una proprietà caratteristica dell'insieme $\{$A, C, N, O, R$\}$": quella espressa dalla risposta a) non si può considerare caratteristica per il nostro insieme, perché non viene precisato quali lettere si debbano togliere).

3.2.9 Risposta giusta: b). Infatti se si afferma che la tesi q è falsa, cioè che "non q" è vera, non può essere vera l'ipotesi p (altrimenti sarebbe vera anche q); quindi da "non q" segue "non p". Esempio: p: "Il quadrilatero *ABCD* è un rettangolo"; q: "Il quadrilatero *ABCD* si può inscrivere in una circonferenza". Osservate che a) non va bene, come si vede dall'esempio: se *ABCD* non è un rettangolo, non si può dire che non sia inscrivibile in una circonferenza. Anche c) non va bene, per lo stesso motivo.

Tema 4

Geometria

4.1 Quesiti di livello base

4.1.1 Assegnati tre segmenti le cui lunghezze misurano rispettivamente a, b, c, esiste sempre un triangolo che li ammette come lati? Se il triangolo esiste, spiegare come si costruisce con riga e compasso.

4.1.2 Spiegare come si costruisce con riga e compasso la circonferenza inscritta e la circonferenza circoscritta ad un triangolo dato. Realizzare effettivamente tali costruzioni.

4.1.3 Dimostrare le seguenti proposizioni:

a) in ogni quadrilatero inscritto in una circonferenza la somma degli angoli opposti è un angolo piatto;

b) in ogni quadrilatero circoscritto ad una circonferenza la somma delle lunghezze di due lati opposti è uguale alla somma delle lunghezze degli altri due.

4.1.4 Dimostrare le seguenti proposizioni:

a) la somma degli angoli interni di un poligono convesso è uguale a tanti angoli piatti quanti sono i lati del poligono, meno due angoli piatti;

b) la somma degli angoli esterni di un poligono convesso è uguale a due angoli piatti.

4.1.5 Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali:

a) scrivere l'equazione della retta che passa per il punto $(2,-1)$ ed è perpendicolare alla retta $4x-3y+12=0$;

b) determinare la distanza del punto $(-3,2)$ dalla retta $4x-3y+12=0$;

c) scrivere l'equazione della retta (è una sola?) passante per il punto $(0,0)$ e tangente alla circonferenza $x^2+y^2-2x+y=0$.

4.1.6 Due sfere hanno rispettivamente area S_1, S_2 e volume V_1, V_2. Conoscendo il rapporto $\frac{S_1}{S_2} = h$ (numero positivo) determinare il valore del rapporto $\frac{V_1}{V_2}$.

4.1.7 Sia K un cilindro circolare retto illimitato (formato cioè dalle rette che passano per i punti di una circonferenza C e sono perpendicolari al piano γ della circonferenza stessa). Esaminando le intersezioni di K con un piano π, in relazione a diverse posizioni di π dire quali dei seguenti casi si possono presentare.
L'intersezione è: a) una ellisse, b) una iperbole, c) un ramo di iperbole, d)una parabola, e) una circonferenza, f) una retta, g) due rette, h) tre rette, i) un punto, l) nessun punto.

4.1.8 Sappiamo che l'intersezione di *due* piani distinti dello spazio può essere di due tipi: a) una retta comune ai due piani, b) l'insieme vuoto, quando i piani sono tra loro paralleli.
Si chiede di elencare analogamente tutti i possibili tipi di intersezione che si possono presentare con *tre* piani distinti dello spazio.

4.1.9 Date nello spazio due rette sghembe r, s quanti sono i piani che

a) contengono r e sono paralleli a s?

b) contengono r e sono perpendicolari a s?

Si osservi che la risposta alla seconda domanda esige una distinzione di casi.

4.2 Quesiti che richiedono maggiore attenzione

4.2.1 Siano dati nel piano una circonferenza C e un punto P non appartenente a C. Trovare tra i punti di C, quello piú vicino a P e quello piú lontano da P. Giustificare la risposta.

4.2.2 Si consideri la proposizione: "in un triangolo rettangolo la bisettrice dell'angolo retto e la mediana relativa al cateto maggiore sono perpendicolari". Dire se tale proposizione è vera o falsa. Se è vera dimostrarla; se è falsa riconoscere se esiste qualche caso particolare in cui essa è vera.

4.2.3 Si considerino i seguenti enunciati che si riferiscono al piano euclideo:

a) asse di un segmento AB è la retta passante per il punto medio di AB e perpendicolare alla retta contenente il segmento;

b) asse di un segmento AB è il luogo dei punti del piano equidistanti dai punti A e B.

In alcuni libri di testo l'enunciato (a) è assunto come definizione di asse e quindi l'enunciato (b) è un teorema che esprime una proprietà dell'asse stesso. In altri libri di testo, al contrario, (b) è assunto come definizione, mentre (a) esprime un teorema. Analizzare se questi fatti sono in contraddizione tra loro.

4.2.4 Date in un piano due rette perpendicolari, studiare il luogo dei punti del piano tali che la somma delle loro distanze da tali rette non superi 1.

4.2.5 Nel piano riferito a coordinate cartesiane è dato un triangolo di vertici A, B, C. Costruire un algoritmo per stabilire se un punto assegnato P si trova all'interno, sul bordo o all'esterno del triangolo.
Risolvere effettivamente il problema facendo uso dell'algoritmo costruito nel caso in cui i punti assegnati abbiano, rispettivamente, le coordinate: $A = (1,3)$, $B = (6,7)$, $C = (5,-1)$, $P = (3,3)$.

4.2.6 Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x,y) si consideri la famiglia $\mathcal{F}$ di curve (luoghi geometrici), rappresentate, al variare del parametro reale a, dalle equazioni

$$a(x^2+y^2+x+y)+(x+y) = 0.$$

Riconoscere, al variare di a, la natura dei luoghi geometrici appartenenti alla famiglia $\mathcal{F}$.
Nella famiglia $\mathcal{F}$ vi sono delle circonferenze; trovare il luogo dei loro centri.
Fissato un valore reale positivo r, esistono circonferenze di $\mathcal{F}$ di raggio r? quante?
Prima di rispondere a questo quesito enunciare con precisione cosa si intende con la espressione "equazione di una curva" oppure "equazione di un luogo geometrico".

4.2.7 Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x,y) si considerino i luoghi dei punti rappresentati dalle seguenti equazioni:

a) $x^2+y^2-1 = 0$,

b) $x^2+y^2 = 0$,

c) $x^2+y^2+1 = 0$,

d) $x^2+y^2+2xy = 0$,

e) $x^2+y^2+xy = 0$,

f) $x^2-y^2 = 0$,

g) $x^2+y^2+2x+2y+2 = 0$,

h) $(x^2-1)^2+y^2 = 0$.

Dopo aver dato una definizione precisa di "equazione di un luogo di punti", riconoscere quale delle precedenti equazioni rappresenta:

i) nessun punto,

ii) un punto,

iii) due punti,

iv) una retta,

v) due rette,

vi) una circonferenza.

4.2.8 Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y), sia $\mathcal{L}$ il luogo dei punti le cui coordinate soddisfano alla equazione

$$f(x, y) = 0$$

(con $f(x, y)$ polinomio nelle variabili reali x, y).
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false, giustificando le risposte date.

a) Un punto non può essere rappresentato da una sola equazione in x e y;

b) $\mathcal{L}$ è una retta se e solo se $f(x, y)$ è di primo grado;

c) $\mathcal{L}$ è una circonferenza se e solo se per ogni x, y, si ha $f(x, y) = f(-x, -y)$ e inoltre $f(x, y)$ non contiene il termine in xy;

d) $\mathcal{L}$ è una circonferenza se e solo se, per ogni x, y si ha $f(x, y) = f(y, x)$ e $f(x, y)$ è un polinomio di secondo grado in cui manca il termine in xy.

4.3 Risposte commentate

4.1.1 Per rispondere alla domanda posta occorre ricordare la nota proprietà dei triangoli: "in ogni triangolo ciascun lato è minore della somma degli altri due". Di conseguenza le misure assegnate per le lunghezze dei segmenti devono soddisfare le tre disuguaglianze

$$a+b>c, \;\; b+c>a, \;\; c+a>b.$$

Tali relazioni sono note col nome "disuguaglianze triangolari".
Per costruire graficamente il triangolo si può procedere come segue. Fissato uno dei tre segmenti assegnati, sia per esempio AA' quello di misura a, si traccino le circonferenze B, C che hanno rispettivamente raggi di misura b e c e i cui centri sono rispettivamente sugli estremi A e A' del segmento.
Se B e C si incontrano in due punti distinti P e Q, i triangoli $AA'P$ oppure $AA'Q$ sono le figure cercate. Se $P=Q$ (e quindi P è sulla retta AA') oppure B e C non hanno punti in comune, il triangolo cercato non esiste.
Gli ultimi due casi si verificano rispettivamente nelle seguenti eventualità. Si ha $P=Q$ se al posto di una delle disuguaglianze si ha una identità e quindi uno dei segmenti è uguale alla somma degli altri due. Le circonferenze B e C sono prive di punti in comune se una delle tre disuguaglianze non è verificata, senza che valga al suo posto una identità. Si osservi in proposito che, essendo a,b,c maggiori di zero, al piú una delle tre disuguaglianze può essere violata.
Lo studente è invitato a realizzare effettivamente la costruzione indicata, assumendo: $a=2$, $b=3$, $c=4$ (misure espresse rispetto ad una unità di misura prefissata).

4.1.2 Si tratta di un classico esercizio la cui soluzione si trova su ogni libro di testo. Ricordiamo che il centro della circonferenza inscritta (incentro) è il punto di incontro delle bisettrici degli angoli del triangolo; il centro della circonferenza circoscritta (circocentro) è il punto di incontro degli assi dei lati del triangolo. Lo studente è fortemente invitato a realizzare effettivamente la costruzione richiesta e ad accompagnarla con una breve giustificazione *scritta*, senza fare ricorso in un primo momento ad alcun libro. Terminato l'esercizio sarà opportuno controllare sul libro di testo la correttezza e la adeguatezza del procedimento seguito.

4.1.3 a) Sia $ABCD$ il quadrilatero inscritto in una circonferenza di centro O (Figura 6). Ricordiamo ora il noto teorema "ogni angolo alla circonferenza è la metà dell'angolo al centro che insiste sullo stesso arco".

Consideriamo quindi gli angoli $B\hat{A}D$ e $B\hat{C}D$ del quadrilatero: ciascuno di essi è la metà di uno dei due angoli al centro individuati dalle semirette OB e OD (l'uno convesso e l'altro concavo o, eventualmente, entrambi piatti).

Poiché la somma di questi due angoli al centro è in ogni caso un angolo giro, la somma $B\hat{A}D + B\hat{C}D$ risulta uguale ad un angolo piatto.

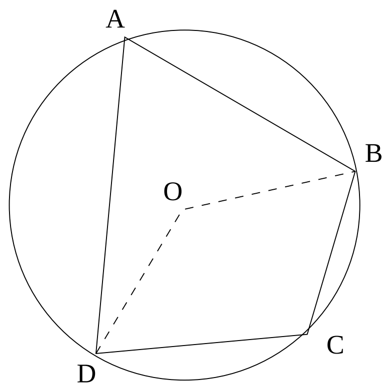


Figura 6.

b) Sia $ABCD$ il quadrilatero circoscritto ad una circonferenza di centro O e siano H, K, L, M rispettivamente i punti di contatto dei lati AB, BC, CD, DA (Figura 7).

Ricordando le proprietà delle tangenti ad una circonferenza condotte da un suo punto esterno, si hanno le seguenti relazioni tra le lunghezze dei segmenti:

$$AH = AM, \quad BH = BK, \quad CL = CK, \quad DL = DM.$$

Da queste uguaglianze sommando membro a membro si ottiene:

$$AH + BH + CL + DL = AM + BK + CK + DM,$$

cioè

$$AB + CD = BC + AD.$$

Osservazione Le proposizioni (a), (b) sono condizioni *necessarie* affinché un quadrilatero sia, rispettivamente inscritto oppure circoscritto ad una circonferenza. Queste due condizioni sono però anche *sufficienti*. Si invita il lettore interessato a darne una dimostrazione.

4.1.4 a) Sia $ABCDEF\ldots$ un poligono convesso di n lati (e quindi n vertici) e P un suo punto interno (Figura 8). Congiungendo P successivamente con i vertici del poligono si ottengono tanti triangoli quanti sono i lati del poligono stesso, cioè n.

La somma degli angoli interni di tutti questi triangoli è dunque n angoli piatti; sottraendo da questa somma due angoli piatti (cioè l'angolo giro costituito dalla somma di tutti gli angoli di tali triangoli aventi vertice P) si ottiene la somma degli angoli interni del poligono che risulta quindi uguale a $(n-2)$ angoli piatti.

b) Come è noto in un poligono convesso si chiama *angolo esterno* in un generico vertice H l'angolo formato dalla semiretta di origine H, che contiene uno dei due lati del poligono

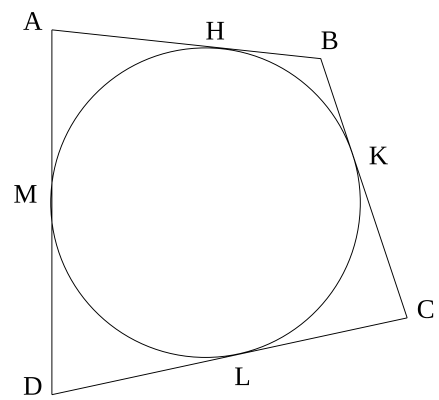


Figura 7.

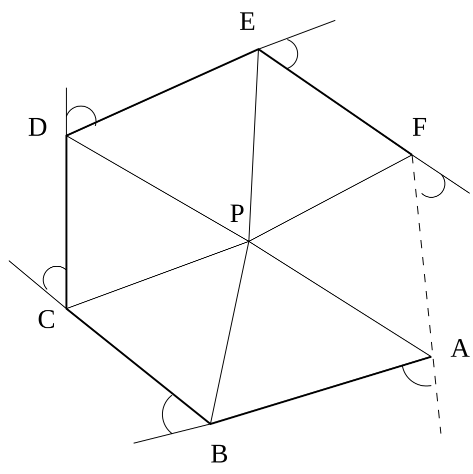


Figura 8.

uscenti da H, e la semiretta opposta a quella che contiene l'altro lato per H. Dunque in ogni vertice del poligono la somma dell'angolo interno e di un angolo esterno relativo a quel vertice è uguale ad un angolo piatto. Se il poligono ha n vertici, la somma di tutti i suoi angoli interni e dei relativi angoli esterni è dunque n angoli piatti. Poiché è noto (proposizione (a)) che la somma degli n angoli interni è uguale a $(n-2)$ angoli piatti, se ne deduce che la somma degli n angoli esterni è uguale a due angoli piatti.

4.1.5

a) $3x+4y-2=0$;

b) la distanza è $\frac{6}{5}$;

c) La retta tangente è unica poiché il punto assegnato appartiene alla circonferenza; la sua equazione è $2x-y=0$.

4.1.6 Osserviamo che l'area S e il volume V di una sfera di raggio r sono proporzionali rispettivamente a r^2 e r^3. Ne consegue $h=\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{r_1^2}{r_2^2}$ e quindi $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{r_1^3}{r_2^3}=\sqrt{h^3}$.

4.1.7 Indichiamo con I l'intersezione di K con π. Se il piano π è parallelo al piano γ, l'intersezione I è una circonferenza; se i piani π e γ si incontrano senza essere perpendicolari l'intersezione I è una ellisse; se π è perpendicolare a γ l'intersezione I potrà essere costituita da due rette, una retta oppure sarà priva di punti, secondo che la retta r, intersezione di π con γ, è secante, tangente oppure esterna alla circonferenza C.
In conclusione, i casi che si possono presentare sono: (a), (e), (f), (g), (l).

4.1.8 Le possibili intersezioni di tre piani distinti dello spazio sono:

a) una retta r comune ai tre piani;

b) un solo punto P, quando i piani si incontrano a due a due secondo tre rette distinte a,b,c che passano per P;

c) l'insieme vuoto, quando i tre piani assumono una delle seguenti posizioni reciproche:

i) sono paralleli tra loro;

ii) si incontrano a due a due secondo tre rette distinte e parallele a,b,c (i tre piani formano cioè in questo caso un prisma illimitato di sezione triangolare e spigoli a,b,c);

iii) due dei tre piani sono paralleli e questi, a loro volta, incontrano il terzo piano secondo due rette a,b pure distinte e parallele.

4.1.9 a) Vi è esattamente un piano che contiene r ed è parallelo a s (cioè non ha punti in comune con s). Esso è il piano determinato da r e da una qualunque retta s' che è parallela a s e che passa per un punto di r.

b) Se le rette sghembe r e s sono ortogonali esiste esattamente un piano che contiene r ed è perpendicolare a s. Esso è il piano determinato dalla retta r e dalla retta t perpendicolare comune a r e s. Se r e s, sghembe, non sono tra loro ortogonali il piano richiesto non esiste.

* * *

4.2.1 Risoluzione sintetica.
Se il punto P è centro di $\mathcal{C}$, i punti della circonferenza hanno tutti la stessa distanza da P. Sia dunque P diverso dal centro C di $\mathcal{C}$. I punti cercati sono i punti M,N intersezione di $\mathcal{C}$ con la retta PC. Per dimostrarlo consideriamo ad esempio il più vicino a P dei due punti M,N: sia esso M. Il cerchio $\mathcal{M}$, di centro P e passante per M, è tangente a $\mathcal{C}$ in M, essendo la retta passante per M e perpendicolare a PC tangente comune a $\mathcal{C}$ e $\mathcal{M}$. Dunque $\mathcal{C}$ e $\mathcal{M}$ non hanno punti in comune oltre a M, e quindi $\mathcal{M}$ è tutto esterno o tutto interno a $\mathcal{C}$, secondo che lo è il punto P. Allora la distanza da P di un qualsiasi punto X di $\mathcal{C}$, è maggiore o uguale a quella di M da P. Ragionamento analogo per il punto N.
Risoluzione analitica.
Per procedere alla risoluzione analitica è necessario in primo luogo scegliere in modo opportuno il sistema di riferimento. Tale scelta va fatta in modo da poter esprimere i dati del problema nella forma che renda i calcoli e la lettura dei risultati più semplice che sia possibile, avendo però cura di non ledere la generalità delle ipotesi.

Supponiamo ora che il punto P sia diverso dal centro C della circonferenza. Possiamo fissare nel piano un sistema di riferimento cartesiano (ortogonale monometrico) avente l'origine degli assi nel centro C e l'asse delle ascisse coincidente con la retta CP orientato in modo che P abbia ascissa positiva. Assumiamo la lunghezza del raggio di $\mathcal{C}$ come unità di misura. In tal caso la circonferenza $\mathcal{C}$ avrà equazione $x^2+y^2=1$ e il punto P avrà coordinate $(t,0)$, con $t>0$. Se $X=(a,b)$ è un generico punto di $\mathcal{C}$, la distanza d tra P ed X sarà data da $d^2=(a-t)^2+b^2$. Ricordando che $a^2+b^2=1$ si ha $d^2=t^2-2at+1$ e quindi, se $t\neq 0$, d è minima o massima al variare di a secondo che è minimo o massimo il valore $(-2at)$. Poiché il campo di variabilità di a è $-1\leq a\leq 1$, il minimo valore di d si avrà per $a=1$, il massimo per $a=-1$. Il punto di $\mathcal{C}$ più vicino e quello più lontano da P saranno dunque, rispettivamente, $(1,0)$ e $(-1,0)$. Si conferma in questo modo lo stesso risultato già trovato per via sintetica.
Se P coincide con C, tutti i punti della circonferenza hanno la stessa distanza da P.

4.2.2 La proposizione è falsa perché esiste almeno un contro-esempio; infatti in un triangolo rettangolo isoscele la bisettrice dell'angolo retto è perpendicolare all'ipotenusa. La proposizione è invece vera se e solo se uno dei cateti ha lunghezza doppia dell'altro.

4.2.3 Entrambe le proposizioni possono essere assunte come definizione di asse di un segmento e quindi l'altra proposizione può costituire l'enunciato di un teorema. La scelta dipende essenzialmente dalle nozioni che i diversi libri di testo vogliono considerare note e dagli strumenti teorici che sono a disposizione per svolgere la dimostrazione.
Ad esempio, se nello svolgimento della teoria viene introdotta preliminarmente la nozione di riflessione (simmetria) rispetto ad una retta (ed è quindi nota l'esistenza e unicità della retta passante per un punto e perpendicolare ad una retta data) la più naturale definizione di asse di un segmento è formulata dall'enunciato (a). In questo caso la proposizione (b) esprime una importante proprietà delle riflessioni. Occorre a questo fine distinguere due eventualità. Se la riflessione è stata *definita* come una particolare isometria, allora la validità della proposizione (b) è immediata. Se invece la riflessione è stata semplicemente definita come una particolare biiezione, allora la proposizione (b) va dimostrata nel contesto più ampio in cui si dimostra che le riflessioni sono isometrie.
Al contrario, se nel libro di testo è stata introdotta preliminarmente la nozione di distanza tra due punti del piano (oppure, il che è lo stesso, la nozione di congruenza tra segmenti del piano) è naturale allora assumere come definizione di asse di un segmento l'enunciato (b). Occorre poi introdurre la definizione di punto medio di un segmento, di rette perpendicolari e il teorema di esistenza e unicità della retta, passante per un punto assegnato e perpendicolare ad una retta data. Con questi strumenti, e sulla base dei criteri di congruenza dei triangoli, è possibile dimostrare che il luogo definito in (b) è una retta e che tale retta possiede le proprietà enunciate in (a).

4.2.4 (Risoluzione analitica). Si assumano le due rette perpendicolari come assi di un sistema di riferimento cartesiano (ortogonale monometrico). Il luogo cercato è costituito dai punti $P = (x,y)$ le cui coordinate soddisfano la disequazione $|x| + |y| \leq 1$.
Tale luogo consiste nei punti interni e nel contorno del quadrato di vertici $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,-1)$, $(-1,0)$.

4.2.5 Un punto P del piano è punto interno al triangolo se si trova, rispetto a ciascuna retta che contiene un lato, nello stesso semipiano che contiene il vertice restante. Per riconoscere questo fatto basta scrivere l'equazione di ognuno dei lati, poniamo $ax + by + c = 0$, e poi controllare se, sostituendo al posto delle coordinate correnti le coordinate del punto P e, rispettivamente, del terzo vertice, il primo membro della equazione $(ax + by + c)$ assume, in entrambi i casi, lo stesso segno. Il punto P sarà invece sul bordo del triangolo se coincide con uno dei vertici oppure risulta interno, con riferimento a due delle tre rette che contengono i lati, ed appartiene invece alla terza retta.
Nel caso particolare proposto le equazioni dei lati del triangolo sono: retta AB $4x - 5y + 11 = 0$, retta AC $4x + 4y - 16 = 0$, retta BC $8x - y - 41 = 0$. Indicati ora i primi membri di queste equazioni rispettivamente con le espressioni

$$c(x,y) = 4x - 5y + 11, \quad b(x,y) = 4x + 4y - 16, \quad a(x,y) = 8x - y - 41,$$

si ottiene:
$c(C) = c(5,-1) = 20+5+11 > 0$, $c(P) = c(3,3) = 12-15+11 > 0$,
$b(B) = b(6,7) = 24+28-16 > 0$, $b(P) = b(3,3) = 12+12-16 > 0$,
$a(A) = a(1,3) = 8-3-41 < 0$, $a(P) = a(3,3) = 24-3-41 < 0$.
Il punto $P = (3,3)$ risulta quindi interno al triangolo ABC.

4.2.6 La proposizione "la curva γ (oppure il "luogo geometrico γ") è rappresentata dalla equazione $f(x,y) = 0$" significa che γ è l'insieme di tutti e soli i punti le cui coordinate soddisfano l'equazione $f(x,y) = 0$. In questo senso può anche accadere che γ non contenga punti, oppure che sia composta da un solo punto.
Nella famiglia $\mathcal{F}$ si trova una retta (per $a = 0$) e un punto (il punto $(0,0)$ per $a = -1$). Per ogni altro valore di a i luoghi geometrici appartenenti alla famiglia $\mathcal{F}$ sono le circonferenze di equazione

$$x^2 + y^2 + (1+\frac{1}{a})x + (1+\frac{1}{a})y = 0.$$

Al variare di a ($a \neq 0$, $a \neq -1$) esse hanno centro nel punto $(-\frac{a+1}{2a}, -\frac{a+1}{2a})$ e raggio di lunghezza $r = \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{a+1}{a}\right|$. Il luogo dei centri di $\mathcal{F}$ è dunque contenuto nella retta di equazione $y = x$. Da tale retta va escluso il punto $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ che non è centro di alcuna circonferenza della famiglia $\mathcal{F}$ (con abuso di linguaggio si potrebbe anche dire che la circonferenza di $\mathcal{F}$ avente centro nel punto $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ corrisponde al valore "infinito" del parametro a).
Per ogni valore reale positivo r, le circonferenze di $\mathcal{F}$ che hanno raggio di lunghezza r, sono dunque quelle di centro $(r\frac{\sqrt{2}}{2}, r\frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(-r\frac{\sqrt{2}}{2}, -r\frac{\sqrt{2}}{2})$. Per ogni valore di $r \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$ si trovano quindi in $\mathcal{F}$ due circonferenze distinte; per $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ si ha invece l'unica circonferenza di centro $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

4.2.7 Per il significato della espressione "equazione di un luogo di punti" si veda quanto già detto nella risposta al Quesito 4.2.6.
Le equazioni proposte rappresentano, rispettivamente, i seguenti luoghi:

a) una circonferenza (centro $(0,0)$, raggio 1);

b) un punto ($(0,0)$);

c) nessun punto;

d) una retta ($x+y=0$);

e) un punto ($(0,0)$);

f) due rette ($y = x$, $y = -x$);

g) un punto ($(-1,-1)$);

h) due punti $((1,0), (-1,0))$.

4.2.8

a) falsa; vedi (4.2.7,b);

b) falsa; vedi (4.2.7,d);

c) falsa; $x^2 + 2y^2 = 1$ non è una circonferenza;

d) falsa; vedi (4.2.7,c), oppure (4.2.7,g).

Dunque nessuna delle proposizioni proposte è vera.

Tema 5

Successioni e funzioni numeriche

5.1 Quesiti di livello base

5.1.1 Dati due numeri positivi a e b, è più grande la loro media aritmetica $\frac{a+b}{2}$ o la loro media geometrica $\sqrt{ab}$?

5.1.2 Una progressione $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ si dice *aritmetica* quando la differenza tra due termini consecutivi a_{n+1}, a_n è indipendente da n.

Dimostrare che il termine generale a_n di una progressione aritmetica si presenta sempre nella forma $a_n = b(n-1)+c$ (per opportuni valori delle costanti b e c).

5.1.3 Una progressione $a_1, a_2, a_3, \ldots$ (con $a_n \neq 0$ per ogni n) si dice *geometrica* quando il rapporto tra due termini consecutivi è costante.

Dimostrare che il termine generale a_n di una progressione geometrica si presenta sempre nella forma $a_n = c \cdot b^{n-1}$ (per opportuni valori delle costanti b e c).

5.1.4 Sono dati un angolo α di π^2 radianti e un angolo β di 539 gradi. Verificare che sono entrambi maggiori di un angolo giro e minori di due angoli giro. Dire quali dei due è il maggiore. Dire inoltre se è più grande il seno di α o il seno di β.

5.1.5 Il numero $1+\sqrt{2}$ è razionale? Sommando, moltiplicando e dividendo numeri della forma $x+y\sqrt{2}$ (con x e y razionali), si ottengono sempre numeri dello stesso tipo?

5.1.6 Durante un breve viaggio in treno, si fanno le seguenti osservazioni.

Al segnale di partenza, il treno comincia a muoversi ed aumenta di velocità per circa tre minuti. Poi prosegue a velocità approssimativamente costante per circa cinque minuti. A questo punto inizia a rallentare e dopo due minuti giunge ad una stazione, dove rimane in sosta per un minuto.

Quindi il treno riparte, ed impiega questa volta quattro minuti per raggiungere una velocità costante, che risulta ora un po' più elevata che in precedenza. Viaggia così per sette minuti e infine compie una frenata, che richiede questa volta tre minuti, per arrestarsi nella stazione di destinazione.

Si chiede di rappresentare queste osservazioni per mezzo di un grafico, riportando in ascissa il tempo e in ordinata la velocità. Si tenga presente che la rappresentazione grafica di un evento non può in nessun caso essere effettuata con esattezza assoluta: essa sarà necessariamente approssimativa e sarà tanto più precisa quanto maggiore è la quantità e l'accuratezza dei dati a disposizione. Quello che viene richiesto in questo esercizio è semplicemente il disegno di un grafico che risulti coerente con le informazioni fornite.

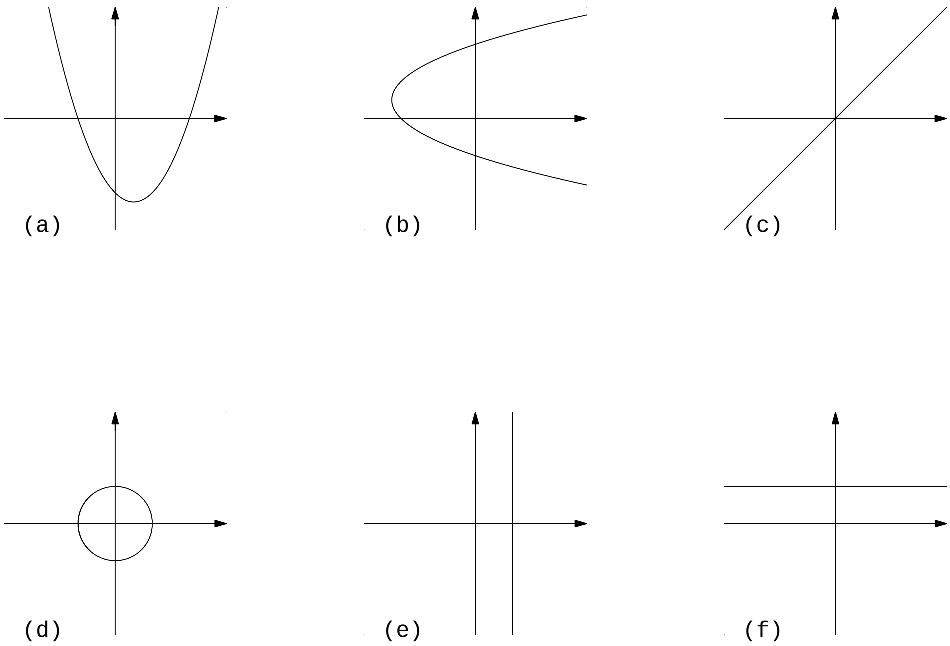


Figura 9.

5.1.7 Nella Figura 9 sono rappresentate delle relazioni tra numeri reali. Quali di queste possono essere interpretate come grafici di funzioni $y = f(x)$?

5.2 Quesiti che richiedono maggiore attenzione

5.2.1 Si consideri la successione $a_n = 3n - 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Verificare che si tratta di una progressione aritmetica e calcolare la somma dei primi 10 termini.

5.2.2 Si consideri la successione $a_n = 2 \cdot 5^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Verificare che si tratta di una progressione geometrica. Quindi calcolare il prodotto dei primi suoi 4 termini e la somma dei primi 5.

5.2.3 Un ciclista inizia un periodo di allenamento percorrendo 10 km il primo giorno, 15 km il secondo giorno, 20 km il terzo giorno e così via aumentando di 5 km ogni giorno.

Quanti chilometri ha percorso complessivamente dopo 30 giorni di allenamento?

5.2.4 Secondo un antico aneddoto orientale, un uomo che aveva reso un importante servigio all'imperatore della Cina chiese, come ricompensa, tanti chicchi di grano quanti se ne potevano mettere su una scacchiera nella maniera seguente: un chicco sulla prima casella, due chicchi sulla seconda, quattro chicchi sulla terza, otto chicchi sulla quarta, e così via raddoppiando ogni volta.

Sapendo che una scacchiera è composta da 64 caselle, quanti chicchi di grano dovette dare l'imperatore a quell'uomo?

5.2.5 Quante cifre sono necessarie per scrivere il numero 2^{64} nell'usuale base 10? (Per rispondere, può essere utile sapere che $\log_{10} 2 = 00{,}30103\ldots$)

5.2.6 Dire se è più grande il seno di un angolo di un radiante oppure il seno di un angolo di due radianti.

5.2.7 Dimostrare che

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) \leq \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta$$

qualunque siano $\alpha, \beta \in [0, \pi/2]$. Mostrare anche che in qualche caso vale l'uguaglianza.

5.2.8 Descrivere per scritto le caratteristiche delle funzioni corrispondenti ai grafici mostrati nella Figura 10.

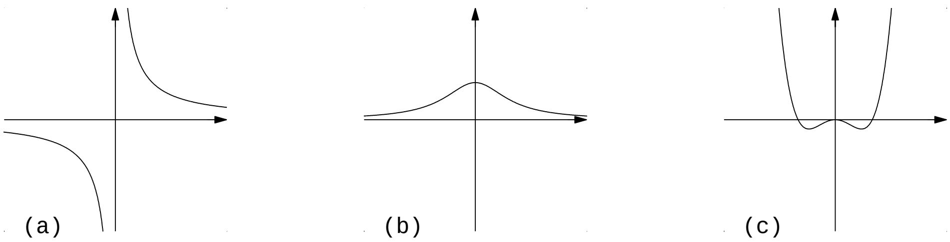


Figura 10.

Discutere in particolare la monotonia (crescenza, decrescenza) e l'esistenza di punti di massimo o di minimo relativi e assoluti.

Questi grafici corrispondono alle tre espressioni numeriche

$$y = x^4 - x^2\,, \qquad y = \frac{1}{1+x^2}\,, \qquad y = \frac{1}{x}$$

Associare ad ogni grafico l'espressione più appropriata.

5.2.9 Nella Figura 11 sono disegnati i grafici di tre funzioni biettive e delle loro inverse. Sono inoltre disegnati i grafici di due funzioni non invertibili e il grafico di una funzione che coincide con la sua inversa. Individuare le due funzioni non invertibili, quella che coincide con la sua inversa e le coppie di funzioni l'una inversa dell'altra.

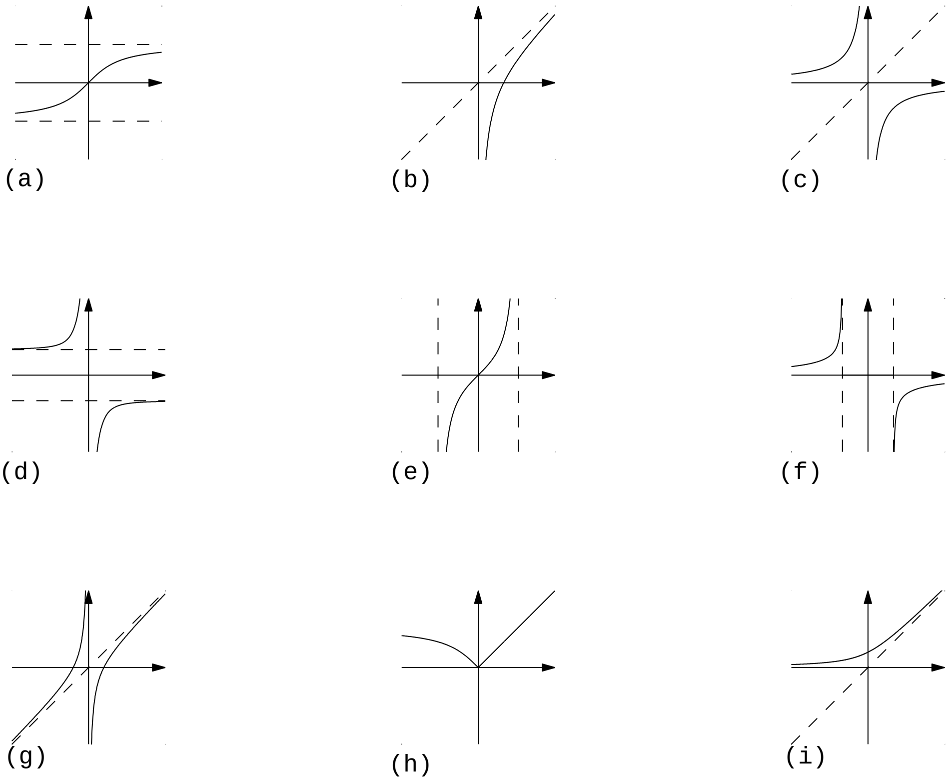


Figura 11.

5.2.10 Nella Figura 12 è riportato il grafico di una funzione $y = f(x)$.

La Figura 13 rappresenta invece i grafici delle funzioni $f(|x|), |f(x)|, |f(|x|)|, f(-x), f(x+1), f(x-1), f(2x), f(x/2), -f(x)$.

Dire quale grafico corrisponde a quale funzione.

5.3 Risposte commentate

5.1.1 È più grande la media aritmetica. Per vederlo, osserviamo che la disuguaglianza

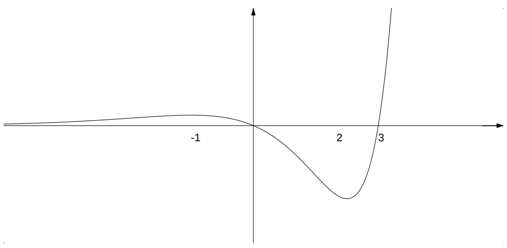


Figura 12.

a) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ è equivalente alla
b) $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, la quale è equivalente alla
c) $(a+b)^2 \geq 4ab$, la quale è equivalente alla
d) $a^2+2ab+b^2 \geq 4ab$, la quale è equivalente alla
e) $a^2-2ab+b^2 \geq 0$, la quale è infine equivalente alla
f) $(a-b)^2 \geq 0$

che è ovviamente sempre vera. Questi passaggi mostrano che la media aritmetica e la media geometrica sono uguali solo se i due numeri coincidono. Osserviamo anche che il passaggio da b) a c) è corretto in quanto entrambi i membri sono positivi.

5.1.2 Indichiamo con b la differenza costante di due termini consecutivi a_{n+1} e a_n della successione. Si ha allora

$$(*) \qquad a_{n+1} = a_n + b$$

per ogni $n = 1,2,3,\ldots$. Quest'ultima può essere interpretata come una formula ricorrente che fornisce i termini della successione, una volta che sia noto il valore di a_1. Posto allora $a_1 = c$ e applicando successivamente la $(*)$, si ottiene facilmente $a_n = c+(n-1)b$.

Dato un intero positivo N, la somma dei primi N termini di una progressione aritmetica si può calcolare mediante la formula

$$a_1 + \ldots + a_N = \frac{N[b(N-1)+2c]}{2} \ .$$

I calcoli eseguiti nella risoluzione del Quesito 1.2.1 sono particolari applicazioni di questa formula.

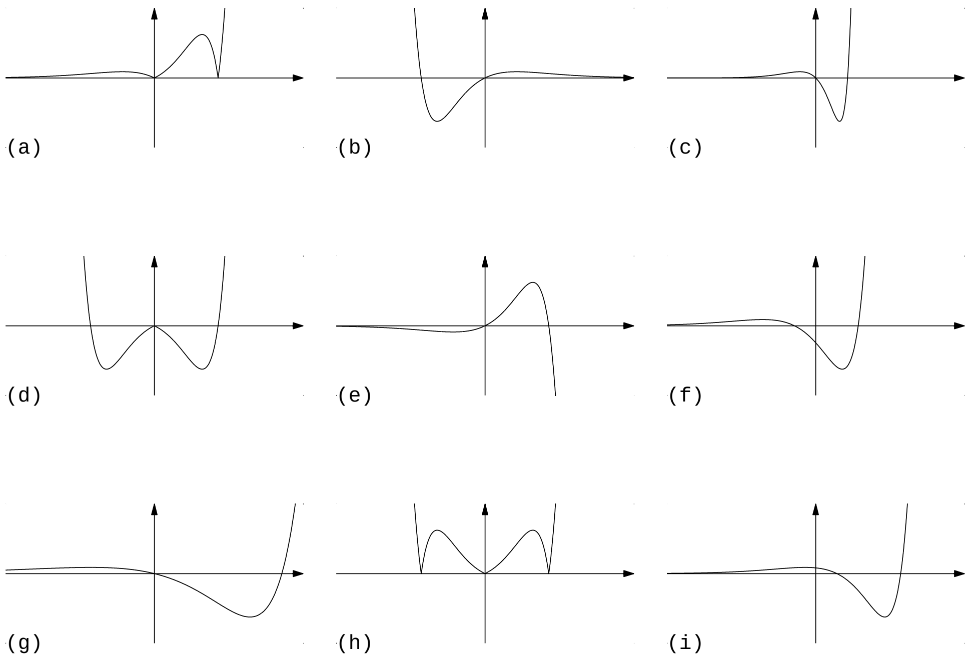


Figura 13.

5.1.3 Lo svolgimento è analogo a quello del Quesito 5.1.2. Posto $b = a_{n+1}/a_n$, si vede che i termini della successione sono generati dalla formula ricorsiva $a_{n+1} = b \cdot a_n$, una volta che sia noto il valore di $a_1 = c$. Di qui si ricava la formula esplicita $a_{n+1} = c \cdot b^n$.

Fissato un intero positivo N, il prodotto dei primi N termini di una progressione geometrica si può calcolare mediante la formula

$$a_1 \cdot \ldots \cdot a_N = c^N \cdot b^{\frac{N(N-1)}{2}} \ .$$

Per la somma dei primi N termini di una progressione geometrica si ha invece la formula

$$a_1 + \ldots + a_N = c \cdot \frac{b^N - 1}{b - 1} \ .$$

5.1.4 Per confrontare tra loro angoli dati conviene in generale ricondurli alla stessa unità di misura applicando la nota formula

$$\text{misura in radianti } = \frac{\pi}{180}\text{misura in gradi} .$$

Tuttavia in questo caso è sufficiente osservare che, essendo $3 < \pi < 4$, si ha

$$3\pi < \pi^2 < 4\pi \qquad \text{e che} \qquad 539 = 540 - 1 = 180 \cdot 3 - 1 .$$

Un angolo di π^2 radianti è quindi un po' più grande di tre angoli piatti, mentre un angolo di 539 gradi è un po' più piccolo.

Per quanto riguarda il valore del seno, conviene ragionare in modo geometrico. Facendo coincidere un lato di ciascun angolo con l'asse positivo delle x, l'altro lato viene a cadere nel secondo quadrante nel caso dell'angolo β e nel terzo quadrante nel caso dell'angolo α. Il seno di β risulta dunque positivo, mentre il seno di α risulta negativo. In questo caso, è cioè l'angolo minore ad avere il seno maggiore.

5.1.5 Se $1+\sqrt{2}$ fosse uguale ad un numero razionale m/n, si dovrebbe avere anche

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} - 1 .$$

Di conseguenza, $\sqrt{2}$ sarebbe razionale ed è ben noto che questo è falso. Per il resto osserviamo che

$$(x+y\sqrt{2}) + (u+v\sqrt{2}) = (x+u) + (y+v)\sqrt{2}$$

e

$$(x+y\sqrt{2}) \cdot (u+v\sqrt{2}) = xu + xv\sqrt{2} + yu\sqrt{2} + 2vy = (xu+2vy) + (xv+yu)\sqrt{2} .$$

Infine, posto che u e v non siano entrambi nulli,

$$\frac{(x+y\sqrt{2})}{(u+v\sqrt{2})} = \frac{(x+y\sqrt{2}) \cdot (u-v\sqrt{2})}{(u+v\sqrt{2}) \cdot (u-v\sqrt{2})} = \frac{(xu-2vy)}{u^2-2v^2} + \frac{(-xv+yu)}{u^2-2v^2}\sqrt{2} .$$

Questi passaggi mostrano che se x e y sono razionali, sommando, moltiplicando o dividendo numeri della forma $x+y\sqrt{2}$ si ottengono effettivamente numeri della stessa forma. Nel caso della divisione, osserviamo che è lecito moltiplicare numeratore e denominatore per $u-v\sqrt{2}$. Infatti, $u-v\sqrt{2} = 0$ se e solo se $u = v = 0$, il che è stato escluso, oppure $\frac{u}{v} = \sqrt{2}$ il che è impossibile in quanto u e v sono, per ipotesi, razionali.

5.1.6 Sulla base delle informazioni fornite dal testo, il grafico della Figura 14 potrebbe essere già abbastanza rappresentativo.

Tuttavia, una rappresentazione un po' più fedele alla realtà potrebbe essere fornita dal grafico della Figura 15.

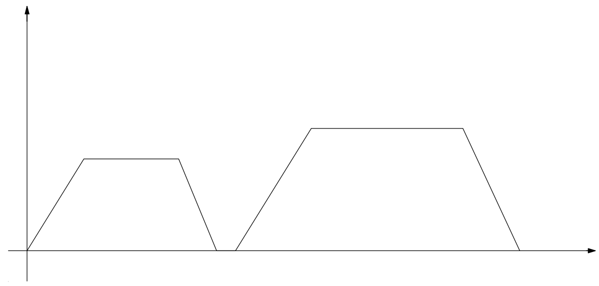


Figura 14.

5.1.7 Nel disegno, abbiamo riportato, come d'uso, la variabile indipendente x in ascissa e la variabile dipendente y in ordinata. Una relazione può allora essere interpretata come grafico di una funzione quando le rette verticali incontrano il grafico in non più di un punto. Dunque (a), (c), (f) rappresentano funzioni, le altre no. Si potrebbe aggiungere che (b) ed (e) rappresentano funzioni se si fosse riportata la variabile indipendente x sull'asse delle ordinate, e la variabile dipendente y sull'asse delle ascisse; (d) invece non rappresenta il grafico di una funzione in nessun caso.

* * *

5.2.1 Consideriamo due termini generici consecutivi a_{n+1} e a_n e verifichiamo che la loro differenza è costante. Si ottiene in particolare, in questo modo, il valore di $b = 3(n+1) - 1 - (3n-1) = 3$. Inoltre, per $n = 1$, si ottiene $c = a_1 = 2$. Applicando la formula ricordata

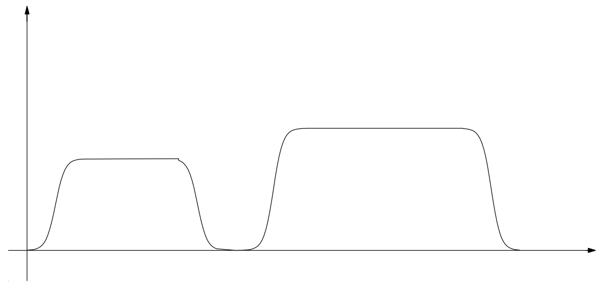


Figura 15.

nella risposta al Quesito 5.1.2, il valore della somma dei primi dieci termini risulta uguale a $\frac{10}{2}[3\cdot 9+2\cdot 2]=31\cdot 5=155$.

5.2.2 In questo caso si ha $a_{n+1}/a_n=5$ e $a_1=10$. Applicando le formule ricordate nella risposta al Quesito 5.1.3, si ha poi rispettivamente 156250000 per il prodotto e 7810 per la somma.

5.2.3 È un'applicazione di una formula già menzionata in precedenza. L'unica difficoltà consiste nel riconoscere che i chilometri percorsi ogni giorno crescono in progressione aritmetica, e nell'impostare correttamente i dati. Con le solite notazioni, abbiamo $b=5$, $c=10$ e $N=30$. Dunque il totale dei chilometri è $\frac{30}{2}[5\cdot 29+2\cdot 10]=2475$.

5.2.4 Anche in questo caso, si tratta di applicare una formula già vista. Il totale è dato da $2^{64}-1$.

5.2.5 Conoscere il numero di cifre che compongono un numero equivale a "collocare" il numero stesso tra due successive potenze di 10, e serve ad avere un'idea del suo ordine di grandezza. Per quanto riguarda il numero 2^{64} (che compariva nel quesito 5.2.4) possiamo osservare che

$$2^{64}=(10^N)^{64}=10^{64N}$$

dove si è posto $N=\log_{10}2$. Poiché, come suggerito, $N=0{,}30103...$, il nostro numero è all'incirca uguale a $10^{19{,}26592}$ ed è quindi compreso tra 10^{19} e 10^{20}.

5.2.6 Cerchiamo per prima cosa di arrivare alla risposta con un ragionamento intuitivo. Ricordando che $\pi=3{,}1415...>3$, si osserva che l'angolo di un radiante è minore dell'angolo di $\pi/3$ radianti e che l'angolo di due radianti è maggiore dell'angolo di $\pi/3$ radianti e minore dell'angolo di $2\pi/3$ radianti. Interpretando il seno come la proiezione sull'asse y dell'intersezione tra la circonferenza unitaria e il lato di ciascun angolo, risulta allora chiaro che $\operatorname{sen}2>\operatorname{sen}1$.

Procedendo in maniera più rigorosa, si può applicare la formula di duplicazione $\operatorname{sen}2=2\operatorname{sen}1\cdot\cos 1$. Come già osservato, l'angolo di un radiante è strettamente minore dell'angolo di $\pi/3$ radianti, per cui $\cos 1>\frac{1}{2}$. Si ha allora

$$\operatorname{sen}2>2\cdot\frac{1}{2}\operatorname{sen}1=\operatorname{sen}1\ .$$

5.2.7 L'esercizio fa riferimento alla formula di addizione del seno

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\ .$$

Poiché gli angoli devono essere compresi tra zero e $\pi/2$, sia il seno che il coseno sono non negativi. Inoltre, seno e coseno sono sempre non superiori a 1. Dunque, $\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\leq\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha\sin\beta\leq\operatorname{sen}\beta$. In conclusione, si ha $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\leq\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta$.

L'uguaglianza certamente non vale se α e β sono entrambi diversi da zero. In tal caso infatti $\operatorname{sen}\alpha$ e $\operatorname{sen}\beta$ sono anch'essi diversi da zero, mentre $\cos\alpha$ e $\cos\beta$ sono strettamente minori di 1. Per avere un esempio in cui $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$ bisogna allora prendere almeno uno dei due angoli α e β uguale a zero.

5.2.8 Il primo grafico a sinistra corrisponde ad una funzione con un asintoto verticale nell'origine. La funzione è decrescente sia nell'intervallo $(-\infty, 0)$ che nell'intervallo $(0, +\infty)$. Tuttavia sarebbe errato dire che la funzione è decrescente su tutto il suo dominio. Infatti, si ha, per esempio, $f(-1) < f(1)$ nonostante che $-1 < 1$. La funzione non presenta né massimi né minimi, né relativi né assoluti. Questo grafico corrisponde verosimilmente a quello della funzione numerica $y = 1/x$.

La seconda funzione presenta un asintoto orizzontale. La funzione cresce per $x < 0$ e decresce per $x > 0$. Si ha un massimo (assoluto) per $x = 0$. La funzione non ha invece minimi, nonostante che la sua immagine risulti limitata. Tra quelle date, la funzione che meglio si adatta a questo grafico è $y = 1/(1+x^2)$.

La terza funzione presenta un massimo (relativo) e due punti di minimo (entrambi assoluti). Essa ha un andamento qualitativo simile a quello della funzione numerica $y = x^4 - x^2$.

5.2.9 Una funzione è biettiva se e soltanto se per ogni valore della variabile dipendente y appartenente all'insieme immagine della funzione, esiste un unico valore della variabile indipendente x (appartenente al dominio di f), tale che $y = f(x)$.

Supponiamo di aver disegnato il grafico di una funzione biettiva $y = f(x)$ in un riferimento cartesiano, in cui la variabile indipendente x sia riportata, come d'uso, in ascissa e la variabile dipendente y in ordinata. Possiamo disegnare il grafico di una nuova funzione $y = g(x)$ sullo stesso riferimento cartesiano nel modo seguente. Si prende un numero a appartenente all'immagine di f e si risale a quell'unico valore b per cui $f(b) = a$. Quindi si pone $b = g(a)$. La funzione $y = g(x)$ si dice l'inversa di f. Per costruzione, il dominio di g coincide con l'immagine di f. Sottolineiamo che questa costruzione ha senso solo se f è biettiva. Per questa ragione, una funzione biettiva si dice anche invertibile. Osserviamo anche che se f è invertibile e g è la sua inversa, allora anche g è invertibile e l'inversa di g è f.

Sia $y = f(x)$ una funzione invertibile, e sia $y = g(x)$ la sua funzione inversa. In base alla definizione, se a appartiene al dominio di f si deve avere $a = f(g(a))$. In altre parole, se (a, b) è un punto appartenente al grafico di g, allora (b, a) deve appartenere al grafico di f, e viceversa. Da un punto di vista geometrico, due punti del piano cartesiano hanno le coordinate "scambiate" quando sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

In base a quese considerazioni, è allora facile vedere che le funzioni non invertibili sono la (g) e la (h). La funzione che coincide con la propria inversa è la (c) (il suo grafico è infatti simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante). Le coppie di funzioni l'una inversa dell'altra sono (a) ed (e), (b) e (i), (d) ed (f).

5.2.10 Nell’ordine, i grafici richiesti sono: (d), (a), (h), (b), (f), (i), (c), (g), (e).

CAPITOLO III

Test di autovalutazione

Il test che si trova nelle prossime pagine è composto da 30 domande a fronte di ciascuna delle quali sono proposte cinque risposte, di cui solo una è corretta. Si dovrà rispondere al test ponendo una croce sulla risposta ritenuta corretta.
Il tempo massimo a disposizione per leggere e rispondere a tutte le domande è di due ore. C'è tutto il tempo per rispondere con calma. E' permesso l'uso di libri o di appunti. Non è permesso l'uso di strumenti di calcolo.
Solo dopo aver risposto a tutte le domande, si possono confrontare le proprie risposte con quelle scritte nella tabella posta nella pagina successiva al test.
Se la risposta ad una domanda è sbagliata, si consiglia di ripetere il ragionamento, cercando di individuare da soli l'errore commesso, prima di leggere la spiegazione fornita.
Non tutte le domande sono di pari difficoltà e, per tale motivo, per ciascuna di esse viene fornita una valutazione del grado di difficoltà.

Test di autovalutazione

1. Eseguendo la divisione con resto di 3437 per 225 si ottiene:
A. 16 come quoziente e 163 come resto
B. 32 come quoziente e 163 come resto
C. 15 come quoziente e 163 come resto
D. 16 come quoziente e 62 come resto
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

2. Il massimo comun divisore di 228 e 444 è:
A. 34
B. 75
C. 12
D. 6
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

3. Tutti i numeri interi positivi minori di 30 che sono multipli sia di 4 che di 6 sono:
A. 4,6,8,12,16,18,20,24,28
B. 8,16,24
C. 24
D. 4,6,8,16,18,20,28
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

4. Se il prodotto di sette numeri interi è negativo, allora si può essere sicuri che si ha:
A. tutti i numeri sono negativi
B. uno è negativo e gli altri sono positivi
C. tre sono negativi e gli altri sono positivi
D. cinque sono negativi e gli altri sono positivi
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

5. Se a è un numero negativo, allora il numero $-a+3$ è:
A. sempre positivo
B. positivo solo se $a < -3$
C. positivo solo se $a > 3$
D. positivo solo se $a > -3$
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

6. La soluzione dell'equazione $\log_2(\log_3 x) = 3$ è

A. $x = 3$
B. $x = 3^4$
C. $x = 3^6$
D. $x = 3^8$
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

7. Il numero $\sqrt{0{,}9}$ è uguale a:

A. 0,3
B. 0,81
C. un numero compreso tra 0,81 e 0,9
D. un numero compreso tra 0,9 e 1
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

8. Posto $K = 98075/12783456$, risulta:

A. $10^{-2} < K < 10^{-1}$
B. $10^{-3} < K < 10^{-2}$
C. $10^{-4} < K < 10^{-3}$
D. $10^{-5} < K < 10^{-4}$
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

9. A quanti metri cubi corrispondono 700 cm^3?

A. $7 \cdot 10^4$ m^3
B. $7 \cdot 10^{-4}$ m^3
C. 0,7 m^3
D. 7 m^3
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

10. Si stima che attualmente la popolazione mondiale aumenti dell'$1{,}7\%$ ogni anno. Indicata con P la popolazione mondiale attuale, e con Q la popolazione mondiale stimata tra un anno, il legame tra P e Q è espresso da:

A. $Q = 1{,}0017P$
B. $Q = 1{,}017P$
C. $Q = 1{,}17P$
D. $Q = 1{,}7P$
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

11. Dato $a > 0$, la disequazione $\sqrt{a} < a$ è verificata:
A. per ogni a
B. solo per $a > 1$
C. solo per $a < 1$
D. solo per $a > \frac{1}{2}$
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

12. La doppia disequazione $4 < x^2 < 9$ è verificata:
A. solo per $\pm 2 < x < \pm 3$
B. solo per $2 < x < 3$
C. solo per $-2 < x < 3$
D. solo per $-3 < x < 3$
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

13. La disequazione
$$\frac{x^2 - 1}{x} > 0$$
è verificata:
A. per ogni $x \neq 0$
B. solo per $x > 1$
C. solo per $x < -1$
D. solo per $x < -1$ e per $x > 1$
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

14. Il primo scatto di una qualsiasi telefonata avviene al momento della risposta. Gli scatti successivi di una telefonata urbana si hanno con un intervallo di $3'40''$ in tariffa ordinaria mentre in tariffa serale l'intervallo tra gli scatti è di $6'40''$. Il costo di ogni scatto è 127 Lire. Pertanto il costo di una telefonata urbana di $5'$ è di 254 Lire se fatta in tariffa ordinaria e di 127 Lire se fatta in tariffa serale. Il costo di una telefonata urbana di $10'$ è di:
A. 508 Lire in tariffa ordinaria e 254 Lire in tariffa serale
B. 381 Lire in tariffa ordinaria e 190,5 Lire in tariffa serale
C. 381 Lire in tariffa ordinaria e 254 lire in tariffa serale
D. 391 Lire in tariffa ordinaria e 254 in tariffa serale
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

15. Il costo del noleggio di una automobile è dato da una quota fissa pari a 50.000 lire, più 20.000 per ogni giorno di noleggio, più 100 lire per ogni chilometro percorso. Il cliente che noleggia l'automobile per tre giorni percorrendo 350 chilometri paga:

A. 145.000 Lire
B. 70100 Lire
C. 113.500 Lire
D. 460.000 Lire
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

16. Viene chiesto ad un bambino bendato di estrarre due biglie da un sacchetto in cui vi sono 10 biglie bianche e 10 biglie nere. La probabilità che il bambino estragga due biglie nere è:

A. $1/4$
B. $56/38$
C. $9/38$
D. $9/20$
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

17. La frase "non è vero che tutti gli scolari sono diligenti" è equivalente alla frase:

A. "tutti gli scolari non sono diligenti"
B. "almeno uno scolaro non è diligente"
C. "nessuno scolaro è diligente"
D. "almeno uno scolaro è diligente"
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

18. L'equazione $\sin 2x = 2\sin x$ è verificata:

A. per ogni x
B. solo per $x = 2k\pi$ con k numero intero qualsiasi
C. solo per $x = k\pi$ con k numero intero qualsiasi
D. per nessun x
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

19. Un triangolo ABC ha gli angoli in B e in C di 30° e due lati di 40 cm. La sua altezza relativa al lato BC è uguale a:

A. $10\sqrt{3}$ cm
B. 20 cm
C. $20\sqrt{3}/3$ cm
D. 80 cm
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

20. Sono dati in un piano due triangoli equilateri congruenti. Le isometrie del piano che portano il primo triangolo a sovrapporsi al secondo sono in numero di:

A. 1
B. 2
C. 3
D. 6
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

21. Dato un sistema di riferimento cartesiano (ortogonale monometrico) in un piano, le rette parallele alla retta $r: \ y = x$ e aventi distanza da r uguale a 1 hanno come equazioni:

A. $y = x + 1$ e $y = x - 1$
B. $y = x + \sqrt{2}/2$ e $y = x - \sqrt{2}/2$
C. $y = x + \sqrt{2}$ e $y = x - \sqrt{2}$
D. $y = x + 1/2$ e $y = x - 1/2$
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

22. Dato un sistema di riferimento cartesiano (ortogonale monometrico) in un piano, l'insieme dei punti $P = (1 + t^2, 1 + t^2)$, ottenuto al variare di t nei reali, è:

A. una parabola
B. una retta
C. una semiretta
D. una circonferenza
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

23. Dato un sistema di riferimento cartesiano (ortogonale monometrico) in un piano, l'insieme dei punti $P = (x, y)$ verificanti l'equazione $x^2 - 2y^2 = 0$ è:

A. l'origine del sistema di riferimento
B. una retta
C. una coppia di rette aventi un punto in comune
D. un'ellisse
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

24. Ogni diagonale di un cubo di lato 1 m misura:

A. $\sqrt{2}$ m
B. $\sqrt{3}$ m
C. $\sqrt[3]{3}$ m
D. $\sqrt[3]{2}$ m
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

25. Due piani α e β sono tra loro perpendicolari se e solo se:
A. una retta di α è perpendicolare ad una retta di β
B. ogni retta di α è perpendicolare ad ogni retta di β
C. la retta di intersezione dei due piani è perpendicolare a tutte le rette di α e β
D. ogni piano interseca i piani α e β in due rette tra loro perpendicolari
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

26. Il luogo dei punti dello spazio equidistanti da due punti distinti è:
A. una retta
B. due sfere
C. una circonferenza
D. un piano
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

27. Dati due punti *A* e *B* distanti tra loro 5 cm, l'insieme dei punti *C* dello spazio tali che il triangolo *ABC* sia rettangolo in *A* ed abbia area uguale a 1 cm^2 è:
A. l'insieme vuoto
B. due punti
C. una circonferenza
D. una sfera
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

28. Ricordiamo che la somma dei primi *n* numeri interi positivi è $\frac{1}{2}n(n+1)$. Quindi la somma dei primi 100 numeri interi positivi multipli di 3 e uguale a:
A. 15150
B. 5050
C. 300
D. 14850
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

29. La successione a_n è definita dalla formula ricorsiva

$$\begin{cases} a_1 & = & 10 \\ a_{n+1} & = & \dfrac{1}{a_n} \end{cases}$$

Il termine a_{93} è uguale a:

A. $\dfrac{1}{10^{93}}$
B. 10^{93}
C. 10
D. $\dfrac{1}{10}$
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

30. Nella Figura 16 sono rappresentati due grafici di funzioni.

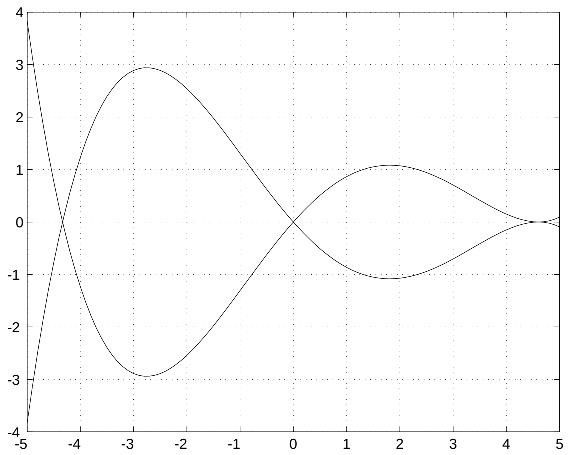


Figura 16.

Uno di essi rappresenta il grafico di $y = f(x)$. L'altro rappresenta il grafico di:

A. $y = f(-x)$
B. $y = -f(x)$
C. $y = -f(-x)$
D. $y = f^{-1}(x)$
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

Tabella delle risposte esatte

1	E	**16**	C
2	C	**17**	B
3	E	**18**	C
4	E	**19**	B
5	A	**20**	D
6	D	**21**	C
7	D	**22**	C
8	B	**23**	C
9	B	**24**	B
10	B	**25**	E
11	B	**26**	D
12	E	**27**	C
13	E	**28**	A
14	C	**29**	C
15	A	**30**	B

Soluzioni

1. Risposta esatta: E.
Possiamo fare i conti a mente. Abbiamo infatti: $225 \cdot 10 = 2250$ e $2250/2 = 1125$. Pertanto $225 \cdot 15 = 2250 + 1125 = 3375$. D'altronde $3437 - 3375 = 62$. Il quoziente è quindi 15 con resto 62.
Se fosse stato permesso l'uso della calcolatrice, si sarebbe potuto arrivare allo stesso risultato usando il seguente algoritmo. Dividendo 3375 per 225, si ottiene $15, \dots$. Inoltre $225 \cdot 15 = 3375$. Infine $3437 - 3375 = 62$. Ma si sarebbe forse impiegato più tempo usando una calcolatrice che facendo i calcoli a mente.
Si sarebbe potuto evitare di fare i calcoli andando per esclusione.
Le risposte A,B e C si escludono perché il resto non può avere come ultima cifra 3 poiché un multiplo di 225 ha come ultima cifra o 0 o 5. Rimane la risposta D: il prodotto di 225 per 16 ha come ultima cifra 0 ($6 \times 5 = 30$); allora il resto deve avere come ultima cifra 7, e quindi non può essere 62.
Commento. Le divisioni con resto sono state inserite nel tema 1. La domanda proposta è analoga al primo quesito di livello base del tema 1. Il non aver dato la risposta esatta fa pertanto scattare un campanello d'allarme. Non si ha ancora una padronanza dell'argomento? La ristrettezza di tempo ha causato un errore nei calcoli? In ambedue i casi si consiglia di correre velocemente ai ripari.

2. Risposta esatta: C.
Fattorizziamo ambedue i numeri. Abbiamo $228 = 2^2 \cdot 3 \cdot 19$ e $444 = 2^2 \cdot 3 \cdot 37$. Il massimo comun divisore di 228 e 444 è quindi $2^2 \cdot 3 = 12$.
La fattorizzazione dei due numeri richiede tempo. Avremmo risparmiato tempo determinando i fattori del numero che sembra più facilmente fattorizzabile e controllando quali tra questi suoi fattori sono al tempo stesso fattori del secondo numero. Si nota infatti che si ha $444 = 4 \cdot 111 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 37$. In alternativa si può usare l'algoritmo di Euclide. Abbiamo $444 = 228 + 216$, inoltre $228 = 216 + 12$. Pertanto 12 è il massimo comun divisore di 444 e 228.
Commento. Notiamo anzitutto che sarebbe gravissimo dare come risposta A o B. I due numeri assegnati infatti sono entrambi divisibili per 2 e per 3. Dunque il loro massimo comun divisore è 6 o un suo multiplo.
La domanda proposta è analoga al quesito di livello base 1.1.8. Vale anche in questo caso il commento fatto per la prima domanda.

3. Risposta esatta: E.
I multipli di 4 e di 6 sono dati dai multipli di 12, minimo comune multiplo di 4 e 6. Quelli minori di 30 sono 12 e 24.
Commento. Nel tema 1 è inserito l'argomento massimo comun divisore e minimo comune multiplo. "Sapere" un concetto non significa solamente saperne dare la definizione. Significa

anche sapere usare tale concetto. Chi ha dato la risposta A ha considerato l'insieme dei multipli di 4 e l'insieme dei multipli di 6. L'insieme dei multipli sia di 4 che di 6 è dato dall'intersezione dei due insiemi, non dall'unione.
Correre velocemente ai ripari se non si è data la risposta esatta.

4. Risposta esatta: E.
Se il prodotto di 7 numeri è negativo allora dalla regola dei segni segue che un numero dispari di essi sono negativi.
Commento. La risposta A è errata. Se infatti tutti i sette numeri sono negativi, allora il loro prodotto è negativo. Ma non è vero il viceversa. Discorso analogo vale per le risposte B,C,D. Molto probabilmente coloro che hanno dato la risposta sbagliata hanno invertito ipotesi con tesi (o, detto in altro modo, condizione necessaria con condizione sufficiente).

5. Risposta esatta: A.
L'opposto di un numero negativo è positivo, sommando ad esso un numero positivo si ottiene un numero positivo.
Commento. Una probabile causa di errore è il pensare che $-a$, poiché vi è il segno "meno", sia negativo. Errore imperdonabile. Non è assolutamente ammesso rispondere in modo errato a questa domanda.

6. Risposta esatta: D.
Da $\log_2(\log_3 x) = 3$ segue $\log_3 x = 2^3 = 8$ e quindi $x = 3^8$.
Commento. Per poter rispondere a questa domanda bisogna aver capito in profondità la definizione di logaritmo. Per capire in profondità una definizione non è sufficiente impararla a memoria. Chi non ha saputo dare la risposta esatta faccia ancora un po' di calcoli con i logaritmi.

7. Risposta esatta: D.
La risposta A è sbagliata. Infatti $0{,}3^2 = 0{,}09$. Errore imperdonabile aver scelto la risposta A. Anche la risposta B è sbagliata. Infatti $0{,}81^2 = 0{,}6561 < 0{,}9$. Proprio quest'ultima osservazione ci dice che si ha $0{,}81 < \sqrt{0{,}9}$. Abbiamo a $0{,}9^2 = 0{,}81 < 0{,}9$. Pertanto, poiché ovviamente $\sqrt{0{,}9} < 1$, la risposta esatta è la D.
Commento. Per rispondere a questa domanda è necessario conoscere la definizione di radice quadrata e possedere un minimo di inventiva. Chi ha dato la risposta sbagliata deve al più presto porre rimedio. In particolare deve rendersi conto che occorre capire meglio le definizioni (che magari già conosce) e capire anche il significato dei calcoli che esegue.

8. Risposta esatta: B.
Abbiamo $98075 = 9{,}8\ldots \cdot 10^4$ e $12783456 = 1{,}2\ldots \cdot 10^7$.
Poiché $1 < \frac{9{,}8\ldots}{1{,}2\ldots} < 10$, abbiamo $10^{-3} < K < 10^{-2}$.
Commento. Domanda non facile. Questo esercizio ha lo scopo di verificare la padronanza con le regole delle potenze. Sono regole importanti che devono essere ben interiorizzate in modo tale da poterle utilizzare nei più diversi contesti.

9. Risposta esatta: B.
Abbiamo 1 cm $= 10^{-2}$ m. Pertanto 1 cm$^3 = 10^{-6}$ m^3. Segue:

$700 \text{ cm}^3 = 7 \cdot 10^2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 = 7 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$.
Commento. Questo esercizio ha lo scopo di verificare la padronanza con i fattori di conversione tra unità di misura e con le regole delle potenze.

10. Risposta esatta: B.
Si ha $Q = P + 0{,}017P = 1{,}017P$.
Commento. Errori sulla rappresentazione dei numeri e sul calcolo di percentuali non sono ammessi.

11. Risposta esatta: B.
Poiché $0 < \sqrt{a}$, dividendo per $\sqrt{a}$ ambo i membri della disequazione $\sqrt{a} < a$ otteniamo $1 < \sqrt{a}$. Segue $a > 1$.
Commento. Errore grave aver risposto A. Basti pensare $a = 1$. Si ha $\sqrt{a} = 1 = a$. Oppure si pensi $a = 1/4$. In questo caso si ha $\sqrt{a} = 1/2 > 1/4 = a$.
Chi non è stato in grado di dare la risposta esatta deve al piú presto riguardarsi la definizione di radice quadrata con le relative implicazioni e le disequazioni. In effetti lo avrebbe dovuto già fare: sono argomenti inseriti alla fine del tema 2.

12. Risposta esatta: E.
Non dovrebbero esserci dubbi. La doppia disequazione è verificata per $-3 < x < -2$ e per $2 < x < 3$. L'affermazione precedente può essere equivocata perché l'uso della "e" nel linguaggio corrente è ambiguo. <u>Non</u> intendiamo infatti che le due condizioni siano verificate entrambe contemporaneamente. Per evitare ambiguità sarebbe preferibile scrivere la risposta nella forma $\{x : -3 < x < -2\} \cup \{x : 2 < x < 3\}$.
Commento. Chi ha dato una qualsiasi altra risposta deve riflettere con molta attenzione sul significato e sull'uso del formalismo relativo alle disequazioni. Chi poi ha dato la risposta A ha dato una risposta completamente priva di senso. Si può anche sbagliare ma non si può assolutamente scrivere qualcosa che non ha senso. Le risposte B,C e D hanno senso ma sono sbagliate. Il numero $x = -2{,}5$ non verifica le condizioni $2 < x < 3$ eppure si ha $4 < x^2 < 5$. Il numero $-2{,}5$ è quindi un controesempio alla risposta B. Il numero 0 è poi un controesempio sia alla risposta C che alla risposta D.

13. Risposta esatta: E.
Poiché $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ la disequazione è verificata ogni qual volta tra i fattori $x-1$, $x+1$ e $1/x$ ve ne sono o uno o tre positivi. Pertanto la disequazione è verificata ogni qual volta si ha $-1 < x < 0$ oppure ogni qual volta si ha $x > 1$.
Commento. Si tratta di una semplice disequazione con espressioni fratte. L'argomento e' inserito nel Tema 2. Chi ha dato una risposta errata deve svolgere molti esercizi di questo tipo.

14. Risposta esatta: C.
Il costo di una telefonata di n scatti è uguale a $127 \cdot n$ Lire. Poiché 10 minuti corrispondono a 3 scatti in tariffa ordinaria e a 2 scatti in tariffa serale, il costo della telefonata è uguale a 381 Lire in tariffa ordinaria e 254 Lire in tariffa serale.
Commento. Poiché 10 è il doppio di 5, in un primo momento viene in mente di raddoppiare

i costi della telefonata di 5 minuti. Basta però un minimo di attenzione per capire che i costi delle telefonate non sono proporzionali alle loro durate.

15. Risposta esatta: A.

Il costo del noleggio è uguale a $50.000 + 20.000 \cdot g + 100 \cdot k$ Lire, dove g è il numero di giorni e k è il numero di chilometri. Pertanto il cliente paga 145.000 Lire.

Commento. Domanda facile. Basta porre un po' d'attenzione.

16. Risposta esatta: C.

Nel sacchetto vi sono all'inizio 20 biglie di cui 10 nere. Il bambino ha quindi probabilità $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ di estrarre una prima biglia nera. Una volta estratta la biglia nera, nel sacchetto rimangono 19 biglie di cui solo 9 nere. La probabilità di estrarre ora una biglia nera è quindi uguale a $\dfrac{9}{19}$. Pertanto la probabilità che il bambino estragga due biglie nere è uguale a $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{9}{19} = \dfrac{9}{38}$.

Commento. Anche lo studente al quale non sono stati insegnati i primi rudimenti di probabilità dovrebbe essere in grado di rispondere correttamente a questa domanda anche se con una certa difficoltà. Lo studente che conosce già i rudimenti di probabilità non dovrebbe invece incontrare alcuna difficoltà.

Ad ogni modo la risposta B sarebbe stata gravemente errata: infatti $\dfrac{56}{38} > 1$.

17. Risposta esatta: B.

La risposta A, come la risposta C, è errata. La presenza di anche un solo scolaro non diligente implica che non tutti gli scolari sono diligenti.

Commento. Domanda molto facile.

18. Risposta esatta: C.

Sappiamo che si ha $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ per ogni valore di x.

L'equazione $\sin 2x = 2 \sin x$ è equivalente all'equazione $2 \sin x(\cos x - 1) = 0$.

Per la regola di annullamento del prodotto le soluzioni sono date dalle soluzioni dell'equazione $\sin x = 0$ (che sono $x = k\pi$ con k intero qualsiasi) e dalle soluzioni dell'equazione $\cos x = 1$ (che sono $x = 2k\pi$ con k intero qualsiasi).

Commento. Se non si ha una buona padronanza della trigonometria è facile sbagliare. Abbiamo inserito l'argomento "trigonometria" nel Tema 5. Anche chi non ha studiato la trigonometria a scuola deve assolutamente studiarsela per conto proprio. Nei corsi universitari la trigonometria viene utilizzata senza spiegarla: non vi saranno concessi errori su esercizi di questo tipo.

19. Risposta esatta: B.

Sappiamo che in un triangolo rettangolo, la misura di un cateto è uguale alla misura dell'ipotenusa per il seno dell'angolo ad esso opposto.

La misura in centimetri dell'altezza cercata è quindi uguale a $40 \cdot \sin 30^\circ = 40/2$.

Commento. Semplice esercizio di trigonometria. Chi ha dato una risposta errata non ha padronanza dei rudimenti di trigonometria. Deve porre immediatamente rimedio.

Notiamo che avremmo potuto rispondere alla domanda anche senza fare uso della trigonometria con il seguente ragionamento. Poiché gli angoli in B e C sono di 30°, l'angolo in A è quindi di 120°. Sia A' il punto simmetrico di A rispetto alla retta passante per B e C. Il triangolo $AA'B$ ha gli angoli di 60° e quindi è equilatero. Perciò l'altezza in A del triangolo ABC è metà di AA', quindi di AB, cioè 20 cm.

20. Risposta esatta: D.

Siano A,B,C i vertici di un triangolo e D,E,F i vertici del secondo triangolo. Scegliamo l'immagine del vertice A. Abbiamo tre possibilità: una per ogni vertice del triangolo DEF. Dobbiamo ora decidere l'immagine del vertice B. Poiché i due triangoli equilateri sono congruenti, abbiamo due possibilità: una per ognuno dei due vertici che non sono immagine del vertice A. A questo punto l'immagine del vertice C è fissata. Abbiamo quindi 6 isometrie.

Ci si potrebbe chiedere di che tipo siano le 6 isometrie. Si può innanzitutto studiare il caso in cui i due triangoli coincidano. In questo caso abbiamo l'identità, le rotazioni intorno al centro (che coincide con l'incentro, il circocentro, il baricentro e l'ortocentro) di 120° e 240° e le simmetrie rispetto ai tre assi del triangolo. In totale dunque, sei isometrie.

Consideriamo ora il caso in cui i due triangoli non coincidano. Allora è noto che esiste esattamente una isometria che porta un triangolo assegnato in un altro ad esso congruente. Le sei isometrie cercate sono date dalle sei isometrie che portano il triangolo ABC in se stesso, composte con quell'unica isometria che porta il triangolo ABC nel triangolo DEF.

Commento. Domanda non facile. Provare ora a rispondere alla stessa domanda sostituendo i due triangoli congruenti equilateri con due triangoli congruenti isosceli ma non equilateri. Considerare infine il caso di due triangoli congruenti scaleni.

21. Risposta esatta: C.

Le rette parallele alla retta r hanno equazione $y = x + a$. Per calcolare il valore del parametro a scegliamo il punto $O = (0,0)$ della retta r, e imponiamo che la sua distanza dalla retta cercata sia uguale a 1. Otteniamo $|a|/\sqrt{2}$=1. Pertanto le rette cercate hanno equazioni: $y = x + \sqrt{2}$ e $y = x - \sqrt{2}$.

Commento. Domanda non difficile di geometria analitica. Notiamo che si può ottenere la risposta facendo la figura e notando che la diagonale di un quadrato di lato 1 è uguale a $\sqrt{2}$.

22. Risposta esatta: C.

Notiamo che i punti P hanno l'ascissa uguale all'ordinata. Inoltre l'ascissa (e quindi l'ordinata) sono maggiori o uguali a 1. I punti P sono quindi punti della semiretta appartenente alla retta $y = x$, avente origine nel punto $(1,1)$ e contenente per esempio il punto $(2,2)$. Viceversa, ogni punto di tale semiretta è punto del tipo $(1+t^2, 1+t^2)$. Infatti un punto generico di tale semiretta ha coordinate (a,a) con $a \geq 1$. Si ha quindi $a = 1 + t^2$ ponendo $t = \sqrt{a-1}$.

Commento. Molte volte l'apparenza inganna: i termini $1 + t^2$ possono trarre in inganno. Chi ha dato la risposta A si può consolare pensando che questa è la risposta di solito scelta dalla maggioranza degli studenti universitari del primo anno.

23. Risposta esatta: C.
Si ha $x^2 - 2y^2 = (x + \sqrt{2}y)(x - \sqrt{2}y)$. Dalla legge di annullamento del prodotto segue che l'insieme delle soluzioni dell'equazione è dato dall'insieme dei punti della retta $x + \sqrt{2}y = 0$ e dall'insieme dei punti della retta $x - \sqrt{2}y = 0$. Si tratta di due rette che si incontrano nel punto $(0,0)$.
Commento. La domanda non è facile per coloro che, e sono la maggioranza, non sono abituati a maneggiare equazioni in più variabili. Un po' di attenzione permette però di risolvere problemi mai affrontati in precedenza. Nei corsi universitari vengono spesso assegnati problemi che, sebbene non trattati in precedenza, possono essere risolti con un po' di attenzione e inventiva.

24. Risposta esatta: B.
Si consideri una diagonale di una faccia del cubo. Essa misura $\sqrt{2}$. Si applichi quindi il teorema di Pitagora ad un triangolo rettangolo avente per cateti una diagonale di una faccia del cubo e un lato del cubo e per ipotenusa una diagonale del cubo.
Commento. Sebbene la geometria dello spazio sia spesso trascurata nelle scuole secondarie superiori, questa domanda non è molto difficile.

25. Risposta esatta: E.
Commento. Tra gli argomenti inseriti nel Tema 4 (geometria) vi è tra l'altro la perpendicolarità tra due piani. Consigliamo quindi di prendere un qualsiasi testo e andare a cercare la definizione di perpendicolarità tra due piani. Chi non ha saputo dare la risposta esatta deve rivedere con cura questo e gli altri argomenti di geometria dello spazio indicati nel Tema 4. Quasi tutti i corsi universitari considerano noti questi argomenti.

26. Risposta esatta: D.
Il luogo dei punti equidistanti da due punti distinti A e B è dato dal piano passante per il punto medio di A e B perpendicolare alla retta passante per A e B.
Commento. Per rispondere a questa domanda è necessario avere una discreta visione dello spazio.

27. Risposta esatta: C.
Affinché i triangoli ABC siano rettangoli in A, i punti C devono appartenere al piano π passante per A perpendicolare alla retta AB. Affinchè l'area del triangolo sia uguale a 1 cm^2 i punti devono appartenere alla circonferenza contenuta in π di centro A e raggio uguale a 2/5 cm.
Commento. Domanda assolutamente non facile. Per rispondere ad essa è necessario avere una visione dello spazio molto buona.

28. Risposta esatta: A.
Abbiamo:
$$3+6+9+\ldots+297+300 = 3(1+2+3+\ldots+99+100) = 3 \cdot \frac{1}{2} 100 \cdot 101 = 15150.$$
Commento. La domanda non è difficile se sono stati analizzati con cura i quesiti e le relative soluzioni assegnati nel secondo capitolo. Avete preso alla leggera il secondo capitolo? Male. Riguardatelo con cura e poi provate a rifare tutto il test.

29. Risposta esatta: C.
Abbiamo $a_1 = 10,\ a_2 = \dfrac{1}{a_1} = \dfrac{1}{10},\ a_3 = \dfrac{1}{a_2} = \dfrac{1}{\frac{1}{10}} = 10, \ldots.$
I termini di indice pari sono uguali a $\dfrac{1}{10}$ e quelli di indice dispari sono uguali a 10.
Commento. Domanda non molto difficile pur di aver ben compreso il significato della formula ricorsiva.

30. Risposta esatta: B.
I due grafici sono simmetrici rispetto all'asse delle x.
Commento. La domanda non è difficile. E' simile al Quesito 5.2.10.