CALCOLO 1		7 settembre 2006
Cognome:	Nome:	Matricola:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta: +1.5. Risposta errata: −0.25.*

1. Sia $f(x) : [a,b] \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Se $\int_a^b f(x)\,dx > (b-a)f(a)$, allora è sempre vero che: $\boxed{a}$ $\int_a^b f(x)\,dx < (b-a)f(b)$; $\boxtimes$ $f(x)$ non è costante; $\boxed{c}$ $f(x)$ è strettamente crescente ; $\boxed{d}$ $f(x) > f(a)$ per ogni $x \in [a,b]$.

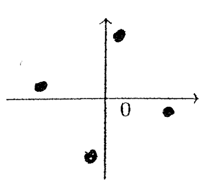
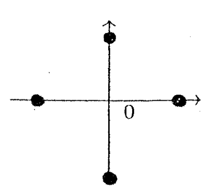
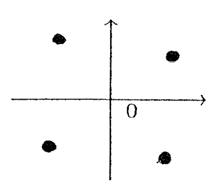
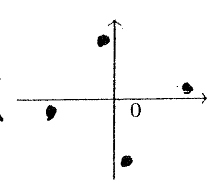
2. Il limite $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{2x}$ è uguale a: $\boxed{a}$ 1; $\boxed{b}$ $+\infty$; $\boxed{c}$ $\sqrt{e}$; $\boxtimes$ e^2.

3. Sia $f(t) = t^3 + 2t + 2$. Allora la retta tangente al grafico di $f^{-1}(x)$ in $(5, f^{-1}(5))$ è data da: $\boxed{a}$ $y = \frac{x+1}{6}$; $\boxed{b}$ $y = \frac{x+2}{7}$; $\boxed{c}$ $y = \frac{x-1}{4}$; $\boxtimes$ $y = \frac{x}{5}$.

4. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile tale che $f(x) > 0$. Se $f(x)$ è strettamente crescente, allora è sempre vero che: $\boxed{a}$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\boxtimes$ $\frac{1}{f(x)}$ è strettamente decrescente ; $\boxed{c}$ $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$; $\boxed{d}$ $f'(x)$ è strettamente crescente .

5. L'insieme dei numeri reali x per cui la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n + x^{2n}}{n^3+1}$ è convergente è dato da: $\boxed{a}$ tutti i numeri reali; $\boxed{b}$ nessun numero reale; $\boxed{c}$ $-1 < x < 1$; $\boxtimes$ $-1 \le x \le 1$.

6. I numeri complessi $z = \sqrt[4]{9+i}$ sono:

$\boxed{a}$  ; $\boxed{b}$  ; $\boxed{c}$  ; $\boxtimes$  .

7. L'insieme dei valori $\alpha > 0$ per cui l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{2^x}{x^\alpha}\,dx$ è convergente è dato da: $\boxed{a}$ $0 < \alpha < 2$; $\boxed{b}$ $\alpha > 0$; $\boxtimes$ nessun valore; $\boxed{d}$ $0 < \alpha < 1$.

8. Il polinomio di Taylor di grado 2 della funzione $f(x) = (x+1)\sin x$ con centro in $x_0 = 0$ è: $\boxed{a}$ $P_2(x) = x + \frac{x^2}{2}$; $\boxed{b}$ $P_2(x) = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2$; $\boxtimes$ $P_2(x) = x + x^2$; $\boxed{d}$ $P_2(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2}$.

CALCOLO I	7 settembre 2006

1. (6 punti)
Si calcoli l'integrale
$$\int_1^3 \frac{\sqrt{x}+1}{x+1}\,dx\,.$$

Poniamo $t=\sqrt{x}$, per cui $t^2=x$, $2t\,dt=dx$, $x=1 \to t=1$, $x=3 \to t=\sqrt{3}$. Allora:

$$\int_1^3 \frac{\sqrt{x}+1}{x+1}\,dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t+1}{t^2+1}\,2t\,dt = 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^2+t}{t^2+1}\,dt = 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^2+1-1+t}{t^2+1}\,dt =$$

$$= 2\int_1^{\sqrt{3}} \left(1+\frac{t-1}{t^2+1}\right)dt = 2t\Big|_1^{\sqrt{3}} + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2t}{t^2+1}\,dt - 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1}\,dt =$$

$$= 2(\sqrt{3}-1) + \log(t^2+1)\Big|_1^{\sqrt{3}} - 2\,\mathrm{arctg}\,t\Big|_1^{\sqrt{3}} =$$

$$= 2\sqrt{3}-2+\log\frac{4}{2} - 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{3} + 2\,\mathrm{arctg}\,1 =$$

$$= 2\sqrt{3}-2+\log 2 - 2\,\pi/3 + 2\cdot\pi/4 = 2\sqrt{3}-2+\log 2-\pi/6\,.$$

CALCOLO I	7 settembre 2006

2. (6 punti)
Si determini la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2}{y^2+4}\,x \\ y(0) = 2\,. \end{cases}$$

Inoltre, si determini il valore $\alpha > 0$ per cui $\dfrac{y(x)}{x^\alpha}$ tende a un numero finito e non nullo per $x \to +\infty$.

È un'equazione non lineare del I° ordine a variabili separabili. Scrivendo $y' = \dfrac{dy}{dx}$, si ha

$$\frac{y^2+4}{y^2}\,dy = x\,dx\,.$$

Integrando:

$$\int \left(1+\frac{4}{y^2}\right)dy = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + \text{cost}\,.$$

$$\parallel$$

$$y - \frac{4}{y}$$

Quindi, tenendo conto del dato di Cauchy $y(0)=2$:

$$2 - \frac{4}{2} = 0 + \text{cost} \Rightarrow \text{cost} = 0\,.$$

Dunque si ha, facendo il comune denominatore:

$$\frac{y^2 - 4 - x^2 y/2}{y} = 0\,.$$

Risolvendo al numeratore:

$$y(x) = \frac{x^2/2 \mp \sqrt{x^4/4 + 16}}{2} = \frac{x^2 \mp \sqrt{x^4+64}}{4}\,.$$

Si scarta il segno (−) perché in quel caso non si avrebbe $y(0)=2$. Dunque $y(x) = \dfrac{x^2+\sqrt{x^4+64}}{4}$.

Siccome $\sqrt{x^4+64} \sim x^2$ (per $x \to +\infty$), si ha $y(x) \sim \dfrac{x^2+x^2}{4} = \dfrac{x^2}{2}$, quindi $\alpha = 2$.

CALCOLO I	7 settembre 2006

3. (6 punti)
Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \frac{3-x}{2x^2+1} \,.$$

Se ne disegni qualitativamente il grafico [in particolare: limiti a $+\infty$ e a $-\infty$, segno, crescenza e decrescenza, convessità e concavità per x "vicino a $+\infty$" e per x "vicino a $-\infty$", motivando le risposte; non è invece richiesta la convessità e concavità in generale].

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, poiché il denominatore non si annulla mai (ed è sempre >0). Quindi il segno è : $f(x) > 0$ per $3-x>0$, cioè $x<3$; $f(x)<0$ per $x>3$; $f(3)=0$. Si verifica anche $f(0)=3$.
Siccome $x^2 \to +\infty$ più velocemente di x, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3-x}{2x^2+1} = 0 \,.$$

Analogamente, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
La derivata prima è :

$$f'(x) = \frac{(-1)(2x^2+1)-(3-x)4x}{(2x^2+1)^2} = \frac{2x^2-12x-1}{(2x^2+1)^2} \,.$$

Le radici del numeratore sono $3 \mp \sqrt{38}/2$, e $f(x)$ cresce per $x < 3-\sqrt{38}/2$ e $x > 3+\sqrt{38}/2$.
La derivata seconda è :

$$f''(x) = \frac{(4x-12)(2x^2+1)^{\cancel{2}} - (2x^2-12x-1)\cdot 2\cdot (\cancel{2x^2+1})\cdot 4x}{(2x^2+1)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= \frac{-8x^3+7x^2+12x-12}{(2x^2+1)^3} \,,$$ >0 per $x \approx -\infty$, <0 per $x \approx +\infty$.

$f(x)$ convessa per $x \approx -\infty$
$f(x)$ concava per $x \approx +\infty$.

Il grafico è :