# Serie di Fourier

**A. Visintin – Fourier Analysis, a.a. 2015-16**

Questo capitolo è da intendersi in forma provvisoria.

In questo capitolo introduciamo le funzioni periodiche, gli sviluppi in serie di Fourier [1] in forma di seni e coseni per le funzioni di periodo $2\pi$, e ne identifichiamo i coefficienti. Affrontiamo quindi la relazione tra la funzione e la sua serie di Fourier, e formuliamo un teorema di convergenza. Esaminiamo anche come alcune proprietà della funzione (parità, realtà, ecc.) si traducono in termini dei suoi coefficienti di Fourier. Introduciamo poi la rappresentazione esponenziale delle serie di Fourier, ed estendiamo la trattazione a funzioni di periodo qualsiasi. Successivamente assumiamo il punto di vista dell'Analisi Funzionale, e trattiamo la convergenza delle serie trigonometriche nello spazio di Hilbert $L^2(-\pi, \pi)$. Mostriamo poi l'uso delle serie di Fourier per la risoluzione di certi problemi ai limiti per equazioni alle derivate parziali, mediante il metodo di separazione delle variabili. Infine illustriamo alcuni classici aspetti analitici di questa teoria.

**Nota.** Il simbolo [Ex] indica che la giustificazione non è difficile, ed è lasciata come esercizio. Il simbolo [] invece indica che la giustificazione non è facile ed è omessa. Il simbolo * è usato per indicare punti che possono essere omessi (oltre che per il coniugio...).

## 1 Funzioni Periodiche

Fissata una costante $T > 0$, si dice che una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ è *periodica di periodo* $T$ (o più brevemente $T$*-periodica)* [2] se
$$f(t + T) = f(t) \qquad \forall t \in \mathbf{R}.$$
Ovviamente, una funzione periodica di periodo $T$ è pure periodica di periodo $kT$ per ogni intero $k > 1$. Ogni funzione periodica continua non costante ha un periodo minimo, detto *periodo fondamentale;* ogni altro periodo è multiplo intero di quello fondamentale. Ad esempio le funzioni seno, coseno, esponenziale immaginario (ovvero $t \mapsto e^{it}$) sono periodiche di periodo fondamentale $2\pi$; la funzione tangente è pure periodica di periodo $2\pi$, ma ha periodo fondamentale $\pi$.

È naturale interpretare la *variabile indipendente* $t$ come tempo, e questo è necessariamente reale. Lo stato $f(t)$ (ovvero la *variabile dipendente)* sarà invece supposto complesso. Comunque si può anche interpretare $t$ come una variabile spaziale (pure necessariamente reale), ed allora avrà senso estendere i risultati di questa sezione al caso in cui $t$ è un vettore di $\mathbf{R}^N$. Gran parte dei risultati di questo capitolo possono essere facilmente estesi al caso di $t \in \mathbf{R}^N$, con $f$ periodica *multiperiodica,* ovvero periodica rispetto ad ogni componente di $t$.

Siano $a \in \mathbf{R}$ e $T > 0$; una qualsiasi funzione $f : [a, a + T[\to \mathbf{C}$ può essere estesa in uno ed un solo modo ad una funzione $T$-periodica $\widetilde{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, detta appunto *estensione* $T$*-periodica* di $f$. Poiché ogni numero reale può essere rappresentato nella forma $t + nT$ per $t \in [a, a + T[$ e $n \in \mathbf{Z}$ opportuni, basta porre $\widetilde{f}(t+nT) := f(t)$ per ogni $t$ ed $n$. È quindi equivalente studiare una funzione $T$-periodica $f$ su tutto $\mathbf{R}$ o su un qualsiasi intervallo di lunghezza $T$; inoltre l'integrale $\int_a^{a+T} f(t)\, dt$ è indipendente da $a \in \mathbf{R}$, se tale integrale esiste per almeno un valore di $a$. [Es]

[1] Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830).

[2] Si definiscono anche la *frequenza* $\nu := 1/T$ e la *pulsazione* $\omega := 2\pi\nu$. La frequenza è misurata in cicli nell'unita' di tempo, la pulsazione in radianti nell'unita' di tempo.

Spesso si identifica una funzione periodica con la sua restrizione ad un intervallo di lunghezza pari al suo periodo. Questa rappresentazione presenta alcuni vantaggi; ad esempio, la funzione nulla è l'unica funzione periodica di $L^2(\mathbf{R})$, mentre $L^2(a, a+T)$ contiene una gran quantità di funzioni. Si noti comunque che per ogni funzione $T$-periodica $f$

$$\widetilde{f} \in C^0(\mathbf{R}) \qquad \Leftrightarrow \qquad f \in C^0([a, a+T[) \quad \text{e} \quad \lim_{t \to (a+T)^-} f(t) = f(a). \tag{1.1}$$

Si dice che una funzione $f : [a, b[ \to \mathbf{C}$ è *continua a tratti* se è continua in tutti i punti salvo al più in un numero finito, nei quali comunque esistono finiti sia il limite sinistro che quello destro; si chiede anche che esistano finiti il limite destro in $a$ e quello sinistro in $b$. Si dice che una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ è continua a tratti se lo è in ogni intervallo. Si noti che una funzione continua a tratti è limitata, quindi integrabile, in ogni intervallo. Ad esempio, l'estensione $\pi$-periodica della funzione $f : [0, 1[ \to \mathbf{R} : t \mapsto t$ è continua a tratti, mentre la funzione tangente non lo è.

Analogamente si dice che una funzione $f : ]a, b[ \to \mathbf{C}$ è *monotòna a tratti* se esiste un insieme finito di punti $t_0 = a < t_1 < ... < t_N = b$ tali che $f$ è o non crescente o non decrescente in ogni intervallo $]t_n, t_{n+1}[$ $(n = 0, ..., N-1)$ (questo comportamento può variare da intervallo a intervallo). Si dice anche che una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ è monotona a tratti se lo è in ogni intervallo. Ad esempio, le funzioni seno e coseno sono monotone a tratti su $]-\pi, \pi[$ ed anche su tutto $\mathbf{R}$; la funzione $f : t \mapsto t \sin(1/t)$ (con $f(0) = 0$) è monotona a tratti su ogni intervallo $[a, 2\pi[$ con $0 < a < 2\pi$, ma non su tutto $]0, 2\pi[$ (e tanto meno su tutto $\mathbf{R}$).

Si noti che le funzioni periodiche di un certo periodo costituiscono uno spazio lineare, e che lo stesso vale sia per le funzioni continue a tratti che per quelle monotone a tratti.

## 2 Rappresentazione Trigonometrica delle Serie di Fourier ed Identificazione dei Coefficienti

*In questo paragrafo assumiamo che $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ sia una funzione $2\pi$-periodica, e la identifichiamo con la sua restrizione ad un qualsiasi intervallo di lunghezza $2\pi$, ad esempio all'intervallo $[-\pi, \pi]$.*

Lo sviluppo in serie di Fourier si applica a funzioni periodiche. Qui assumiamo che il periodo sia uguale a $2\pi$ per semplificare certi conti; poi estenderemo facilmente la trattazione a funzioni di periodo qualsiasi.

Studieremo la possibilità di approssimare $f$ mediante una successione di funzioni della forma

$$S_n(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \qquad \forall t \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N},$$

dette *polinomi trigonometrici* (di ordine $n$) per motivi che saranno chiariti più avanti. Poniamo poi

$$S(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \qquad \forall t \in \mathbf{R}, \tag{2.1}$$

detta *serie trigonometrica* o *serie di Fourier formale.* Parleremo poi di serie di Fourier vera e propria (non formale) se questa serie converge, in un senso da specificare volta per volta: o dappertutto, o quasi dappertutto, o nello spazio di Hilbert $L^2(-\pi,\pi)$, ecc.. [3] Pertanto per serie di Fourier si intende solo lo sviluppo *in seni e coseni* di una funzione data.

Con terminologia tratta dall'acustica, il termine $a_0/2$ è detto *componente continua* del segnale; [4] $a_1 \cos t + b_1 \sin t$ è detto *armonica fondamentale;* gli addendi corrispondenti agli altri $k$ sono detti *armoniche superiori.*

Data una funzione $f$, ci chiediamo se $S = f$ in $\mathbf{R}$ per un'opportuna scelta dei coefficienti $\{a_0, a_1, a_2, ....\}$ e $\{b_1, b_2, ....\}$. [5] A questo proposito si pongono diversi problemi:

(i) Quali funzioni ($2\pi$-periodiche su tutto $\mathbf{R}$ o definite solo su $[-\pi,\pi]$) ammettono una rappresentazione in serie di Fourier?

(ii) In che senso è da intendersi la convergenza della serie: puntuale, uniforme, in $L^2(-\pi,\pi)$, o altro?

(iii) Supposto $S = f$, i coefficienti $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ sono individuati da $f$?

(iv) In caso affermativo, come si possono esprimere i coefficienti in termini di $f$?

Le prime due questioni riguardano la regolarità di $f$ (ovvero un elemento *qualitativo);* le altre due coinvolgono invece degli aspetti *quantitativi,* e quindi sono più vicine alle esigenze applicative.

Incominciamo proprio da queste ultime due questioni. Mostreremo che i coefficienti sono individuati da $f$, e per calcolarli useremo le seguenti identità.

**Lemma 2.1.** *(di Ortogonalità)*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt\, \cos \ell t\, dt = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq \ell \\ \pi & \text{se } k = \ell \neq 0 \\ 2\pi & \text{se } k = \ell = 0 \end{cases} \qquad \forall k, \ell \in \mathbf{N}, \tag{2.2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kt\, \sin \ell t\, dt = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq \ell \\ \pi & \text{se } k = \ell \neq 0 \\ 0 & \text{se } k = \ell = 0 \end{cases} \qquad \forall k, \ell \in \mathbf{N}, \tag{2.3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt\, \sin \ell t\, dt = 0 \qquad \forall k, \ell \in \mathbf{N}. \tag{2.4}$$

**Dimostrazione.** Grazie alla formula di Eulero,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt\, \cos \ell t\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2} \frac{e^{i\ell t} + e^{-i\ell t}}{2}\, dt$$
$$= \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{i(k+\ell)t} + e^{i(k-\ell)t} + e^{i(\ell-k)t} + e^{-i(k+\ell)t}\right) dt \qquad \forall k, \ell \in \mathbf{N},$$

dall'identità fondamentale

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imt}\, dt = \begin{cases} 2\pi & \text{se } m = 0 \\ 0 & \text{se } m \neq 0 \end{cases} \qquad \forall m \in \mathbf{N}, \tag{2.5}$$

[3] Una certa ambiguità è insita nel termine *serie.* Questo indica sia la successione delle somme parziali che il loro eventuale limite. Qui ci riferiamo alla successione delle somme parziali, dal momento che il limite può anche non esistere. (In ogni caso, trattandosi di funzioni, occorrerebbe specificare il senso del limite, ovvero il tipo di convergenza a cui si fa riferimento.)

[4] Questa denominazione non è delle più felici, poiché anche gli altri addendi sono continui.

[5] La scrittura $S = f$ presuppone la convergenza della serie stessa, in un senso ancora da specificare.

consegue allora la (2.2). La dimostrazione delle (2.3) e (2.4) è analoga. $\square$

Secondo l'impostazione dell'analisi funzionale, le (2.2)—(2.4) esprimono l'ortogonalità nel senso del prodotto scalare di $L^2(-\pi,\pi)$ di ogni coppia di funzioni dell'insieme

$$\{\sin kt, \cos kt : k \in \mathbf{N}\} = \{0, 1, \sin t, \cos t, ..., \sin kt, \cos kt, ...\}.$$

(Torneremo su questo aspetto più avanti.) Queste funzioni sono continue, ed appartengono a $L^p(-\pi,\pi)$ per ogni $p \in [1,+\infty]$.

Siamo ora in grado di mostrare che i coefficienti di Fourier di una funzione $f$ sono determinati univocamente da $f$, e possiamo esprimere i coefficienti $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ in termini di $f$. [6]

**Teorema 2.2.** *Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ una funzione $2\pi$-periodica continua. Se la serie (2.1) converge uniformemente a $S = f$, allora*

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt\ (=: a_k(f)) \qquad \textit{per } k = 0,1,2,... \tag{2.6}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt\ (=: b_k(f)) \qquad \textit{per } k = 1,2,... \tag{2.7}$$

**Dimostrazione.** In seguito all'ipotesi di convergenza uniforme, possiamo scambiare le operazioni di serie e di integrazione. Grazie al lemma di ortogonalità abbiamo

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos \ell t\,dt &= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos \ell t\,dt + \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt + b_k \sin kt)\right)\cos \ell t\,dt\\ &= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos \ell t\,dt + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kt\cos \ell t\,dt + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kt\cos \ell t\,dt\\ &= a_\ell \pi \qquad \text{per } \ell = 0,1,2,...\end{aligned} \tag{2.8}$$

(Si noti che questa formula vale anche per $\ell = 0$: è proprio per ottenere questo che abbiamo scritto il termine costante della serie nella forma $a_0/2$.)

Analogamente si ottiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin \ell t\,dt = b_\ell \pi \qquad \text{per } \ell = 1,2,... \ \square$$

In quest'ultimo teorema abbiamo richiesto che la funzione $f$ fosse continua, poiché la dimostrazione si basa sulla convergenza uniforme; tuttavia le formule (2.6) e (2.7) hanno senso anche per $f \in L^1(-\pi,\pi)$ Questo lascia sperare di poter rappresentare in serie di Fourier anche funzioni meno regolari, ad esempio continue a tratti, o soltanto $L^p$ per un $p \in [1,+\infty]$.

Inoltre la trasformazione $f \mapsto (\{a_k(f)\},\{b_k(f)\})$ opera (ad esempio) da $L^1(-\pi,\pi)$ a $\ell^\infty$ (lo spazio di Banach delle successioni limitate $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, dotato della norma del sup). Si verifica facilmente che $T$ è lineare e continua. [Ex] In particolare

$$T(if) = iT(f) \qquad \forall f \in L^1(-\pi,\pi); \tag{2.9}$$

[6] In teoria dei segnali le successioni dei coefficienti di Fourier $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ sono dette lo *spettro* del segnale $f$.

quindi se $f$ è a valori reali (immaginari, risp.), allora i suoi coefficienti di Fourier $\{a_k(f)\}, \{b_k(f)\}$ sono reali (immaginari, risp.).

Per una generica funzione $f \in L^1(-\pi, \pi)$, denoteremo con $S_f$ la serie trigonometrica corrispondente ai coefficienti di Fourier $\{a_k(f)\}$ e $\{b_k(f)\}$ definiti in (2.6) e (2.7),

$$S_f(t) := \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k(f)\cos kt + b_k(f)\sin kt], \tag{2.10}$$

e con $S_{f,n}$ il corrispondente polinomio trigonometrico di ordine $n$:

$$S_{f,n}(t) := \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}[a_k(f)\cos kt + b_k(f)\sin kt]. \tag{2.11}$$

$S_{f,n}$ non presenta alcun problema di convergenza, essendo una somma finita. Per contro, la serie di Fourier formale $S_f$ di $f$ può convergere puntualmente o meno.

In un serto senso $S : f \mapsto S_f$ è la trasformazione inversa della $T$.

**Osservazione.** La serie di Fourier formale non è l'unico uso che si può fare dei coefficienti di Fourier. Nel paragrafo 9 vedremo alcune rappresentazioni alternative della funzione originaria (quella che ha generato la famiglia dei coefficienti $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$).

Nell'ultimo mezzo secolo sono state poi studiate altre rappresentazioni alternative delle funzioni, che non usano i coefficienti di Fourier e si discostano alquanto dalla teoria qui sviluppata. In particolare le celebri *wavelets* sono particolarmente utili ad esempio nella compressione dei segnali.

# 3 Convergenza della Serie di Fourier

In questo paragrafo forniamo delle condizioni sufficienti (sebbene non necessarie) per la convergenza della serie trigonometrica (2.1), e discutiamo l'uguaglianza $S_f = f$.

**Teorema 3.1.** *(di Convergenza di Dirichlet) [] Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ $2\pi$-periodica, continua a tratti e tale che $f'$ sia continua a tratti oppure che $f$ sia monotona a tratti. Si ponga* [7]

$$\widetilde{f}(t) := \frac{1}{2}[f(t-0) + f(t+0)] \qquad \forall t \in \mathbf{R}. \tag{3.1}$$

*Allora la serie di Fourier formale di $f$ converge puntualmente alla funzione $\widetilde{f}$; ovvero, definendo $a_k = a_k(f)$ e $b_k = b_k(f)$ per ogni $k$ come in* (2.6) *e* (2.7)*,*

$$\widetilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt) \ (=: S_f(t)) \qquad \forall t \in \mathbf{R}. \tag{3.2}$$

*Se $f$ è anche continua in un intervallo $[a, b] \subset \mathbf{R}$, allora la sua serie di Fourier converge uniformemente a $\widetilde{f} = f$ in $[a, b]$.*

[7] Con notazione standard, $f(t \pm 0) := \lim_{y \to t^{\pm}} f(y)$.

Essendo $\widetilde{f} = f$ in ogni punto in cui $f$ è continua, la (9.12) implica $S_f = f$ in ogni punto in cui $f$ è continua, quindi quasi ovunque in $]-\pi, \pi[$ per ogni funzione continua a tratti.

**Osservazioni.** (i) Mediante la serie di Fourier formale si può approssimare qualsiasi funzione periodica ad esempio di classe $C^1$ (quindi soddisfacente le ipotesi del Teorema 3.1) con una serie di funzioni di classe $C^\infty$. Questo può apparire sorprendente, poiché per ogni $k$ una somma finita di funzioni di classe $C^k$ è essa pure di classe $C^k$. Tuttavia quest'ultima affermazione in generale non vale per le serie di funzioni, ovvero per le somme infinite; infatti la derivata di una serie di funzioni è uguale alla serie delle derivate solo sotto opportune ipotesi. Ad esempio se $f$ è di classe $C^1$, allora in seguito al Teorema 3.1 la sua serie di Fourier converge uniformemente a $f$, ma non è detto che la serie di Fourier formale di $f'$ (che è solo di classe $C^0$ a priori) converga a $f'$.

(ii) Per le (2.6) e (2.7), ciascun coefficiente di Fourier dipende da $f$ attraverso un'integrazione, e quindi non risente del comportamento di $f$ in specifici punti; pertanto, se si modifica $f$ solo in un punto $\bar{t}$ (o più in generale in un sottoinsieme di $\mathbf{R}$ di misura nulla), $S_f(\bar{t})$ non può cambiare.

Il Teorema di convergenza 3.1 ci dice che $f = S_f$ nei punti in cui $f$ è continua. I motivi per cui questo avvenga non sono ovvi: per rendersene conto occorrerebbe esaminare la dimostrazione. Tuttavia è chiaro che per quei punti non si può ripetere il ragionamento appena esposto, perchè modificando la $f$ in un punto ivi verrebbe meno la continuità.

(iii) Ciascun coefficiente di Fourier dipende dal comportamento globale di $f$, per via delle (2.6) e (2.7). Tuttavia, contrariamente a quanto ci si potrebbe aspettare, in seguito al Teorema 3.1 per ogni $t \in ]-\pi, \pi[$ il valore della somma $S_f(t)$ dipende solo dal comportamento di $f$ in prossimità di $t$. Più precisamente si ha il seguente risultato.

**Corollario 3.2.** *(Principio di localizzazione di Riemann) Se $f_1, f_2 : ]-\pi, \pi[ \to \mathbf{C}$ sono due funzioni continue tali che $f_1 = f_2$ in un intervallo $]a, b[ \subset ]-\pi, \pi[$, allora*

$$S_{f_1,n}(t) - S_{f_2,n}(t) \to 0 \qquad \textit{per } n \to \infty, \forall t \in ]a, b[.$$

In altri termini, se due funzioni hanno coefficienti di Fourier (e la continuità lo garantisce), allora le loro serie di Fourier formali hanno lo stesso comportamento in quell'aperto. Questo è un po' sorprendente, poiché i coefficienti di Fourier dipendono dal comportamento globale della funzione, ma è una diretta conseguenza del teorema di convergenza applicato alla funzione $f_1 - f_2$.

(iv) Nei pressi dei punti di discontinuità di $f$, per ogni intero $n \geq 1$ la somma parziale $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$ presenta delle oscillazioni attorno al valore limite. Per $n \to \infty$ queste oscillazioni diventano sempre più piccole, in modo da consentire la convergenza uniforme della serie di Fourier in ogni intervallo in cui $f$ è continua, coerentemente col Teorema 3.1. In prossimità dei punti di discontinuità di $f$ le oscillazioni comunque non si smorzano.

Si consideri ad esempio la funzione segno nell'intervallo $]-\pi, \pi[$:

$$f(t) := -1 \quad \text{se } -\pi < t < 0, \quad f(0) := 0, \quad f(t) := 1 \quad \text{se } 0 < t < \pi.$$

allora $S_{f,n} \to f$ puntualmente in $]-\pi, \pi[$, e la convergenza è uniforme in ogni sotto-intervallo chiuso che non contiene lo 0. Tuttavia si può dimostrare che per ogni $n$

$$\begin{aligned} &\exists t_n \in ]0, \pi[: \qquad S_{f,n}(t_n) - 1 \simeq 0.18 \\ &\exists t'_n \in ]-\pi, 0[: \quad S_{f,n}(t'_n) + 1 \simeq -0.18; \end{aligned} \tag{3.3}$$

per quanto osservato, sia $t_n$ che $t'_n$ convergono a 0 per $n \to \infty$. [] Questo è noto come il *fenomeno di Gibbs,* e si presenta nei pressi di ogni punto di discontinuità.

* (v) La continuità di $f$ non basta ad assicurare la convergenza della serie trigonometrica $S_f$: occorrono delle ipotesi aggiuntive su $f$, ad esempio quelle del Teorema 3.1 o altre condizioni più o meno elaborate. Elenchiamo schematicamente alcuni dei risultati più significativi:

— 1873: Du Bois Reymond costruisce una $f \in C^0([-\pi,\pi])$ tale che $S_f$ non converge per $t = 0$.

— 1926: Kolmogorov costruisce una $f \in L^1(-\pi,\pi)$ tale che $S_f$ non converge in alcun punto.

— 1966: Kahane and Katznelson dimostrano che per qualsiasi insieme di misura nulla $A \subset [-\pi,\pi]$ esiste $f \in C^0([-\pi,\pi])$ tale che $S_f$ non converge in $A$. (Questo ovviamente generalizza il risultato di Du Bois Reymond.)

— 1966: Carleson dimostra che per ogni $f \in L^2(-\pi,\pi)$ (in particolare quindi per ogni $f \in C^0([-\pi,\pi])$) $S_f$ converge ad $f$ in quasi tutti i punti. [8]

— 1967: Hunt estende il teorema di Carleson alle $f \in L^p(-\pi,\pi)$, per ogni$p > 1$. ($p = 1$ resta escluso grazie al risultato di Kolmogorov.)

# 4 Funzioni Pari e Dispari

In questo paragrafo trattiamo degli aspetti essenzialmente algoritmici; supponiamo quindi che $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ sia una funzione così regolare da garantire che $f = S_f$. Ad esempio in base al Teorema 3.1 di convergenza questo vale se $f$ è una funzione $2\pi$-periodica di classe $C^1$.

Si dice che

$$\begin{aligned} &f \text{ è pari} \qquad &\Leftrightarrow \qquad &f(-t) = f(t) \qquad \forall t \in \mathbf{R}, \\ &f \text{ è dispari} \qquad &\Leftrightarrow \qquad &f(-t) = -f(t) \qquad \forall t \in \mathbf{R}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

(Queste definizioni valgono anche se $f$ è definita solo in un sottoinsieme di $\mathbf{R}$ simmetrico rispetto all'origine.) Ad esempio, la funzione potenza $t \mapsto t^n$ è pari se $n$ è pari, mentre è dispari se $n$ è dispari. Il coseno è pari, seno e tangente sono dispari; lo stesso vale per le corrispondenti funzioni iperboliche. È immediato verificare che il prodotto di due funzioni pari o di due funzioni dispari è pari, mentre il prodotto di una funzioni pari ed una dispari è dispari (il che può forse spiegare questa terminologia).

Ogni funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ può essere decomposta nella somma di una funzione pari ed una dispari, dette rispettivamente *parte pari* e *parte dispari di* $f$:

$$\left. \begin{aligned} f_p(t) &:= \frac{f(t) + f(-t)}{2} \quad \text{(pari)} \\ f_d(t) &:= \frac{f(t) - f(-t)}{2} \quad \text{(dispari)} \end{aligned} \right. \qquad \Rightarrow \qquad f(t) = f_p(t) + f_d(t) \quad \forall t \in \mathbf{R}. \tag{4.2}$$

Si noti che $f$ è pari (dispari, risp.) sse $f_d \equiv 0$ ($f_p \equiv 0$, risp.). [9] Poiché il coseno è pari ed il seno è dispari, è facile verificare che

$$f_p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt, \qquad f_d(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

[8] Questo risultato è basato su una dimostrazione particolarmente complessa, ed è valso a Carleson il prestigioso premio Abel nel 2006.

[9] $g \equiv 0$ significa che $g$ è identicamente nulla, ovvero $g(t) = 0$ per ogni $t$.

(ricordiamo che stiamo supponendo che sia $f = S_f$); queste sono dette rispettivamente *serie di coseni* e *serie di seni.* Quindi

$$
\begin{aligned}
&f \text{ pari} \qquad \Leftrightarrow \qquad f(t) = f_p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt \quad \forall t \in \mathbf{R},\\
&f \text{ dispari} \qquad \Leftrightarrow \qquad f(t) = f_d(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt \quad \forall t \in \mathbf{R}.
\end{aligned} \tag{4.3}
$$

Inoltre

$$
\begin{aligned}
&f \text{ pari} \qquad \Leftrightarrow \qquad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos kt\, dt, \quad b_k = 0 \qquad \forall k,\\
&f \text{ dispari} \qquad \Leftrightarrow \qquad a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin kt\, dt \qquad \forall k.
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

Per verificare queste ultime due affermazioni basta notare che i rispettivi integrandi sono pari, e quindi i corrispondenti integrali estesi a $[0,\pi]$ sono uguali alla metà degli integrali su $[-\pi,\pi]$.

**Esempio 1.** Si consideri la funzione $[-\pi,\pi[\to \mathbf{R} : t \mapsto t$, e sia $f$ la sua estensione $2\pi$-periodica a tutto $\mathbf{R}$. La funzione $f$ è dispari, quindi può essere rappresentata come serie di soli seni. Essendo

$$
b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin kt\, dt = -\frac{2}{k}\cos k\pi = (-1)^{k+1}\frac{2}{k} \qquad \text{per } k = 1, 2, ...,
$$

la sua serie di Fourier formale è

$$
S_f(t) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{k}\sin kt = 2\sin t - \sin 2t + \frac{2}{3}\sin 3t + ... \qquad \forall t \in\, ]-\pi,\pi[.
$$

Per applicare il Teorema 3.1 di convergenza occorre ora valutare la regolarità della funzione: sia $f$ che $f'$ sono continue a tratti, ed $f$ ha dei salti solo in $k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$. Quindi

$$
f(t) = S_f(t) \qquad \forall t \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\}, \qquad f(t) = 0 \qquad \forall t \in \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\}.
$$

La funzione $f$ è continua in ogni intervallo $[a,b] \subset\, ]-\pi,\pi[$, ma non in tutto $[-\pi,\pi]$; pertanto la serie di Fourier formale $S_f$ converge uniformemente a $f$ in ogni intervallo $[a,b] \subset\, ]-\pi,\pi[$, ma non in tutto $[-\pi,\pi]$.

**Esempio 2.** Sia $g$ l'estensione $2\pi$-periodica della funzione $[-\pi,\pi[\, \to \mathbf{R} : t \mapsto |t|$. Questa funzione è pari, quindi può essere rappresentata mediante una serie di soli coseni: essendo

$$
a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos kt\, dt = ... = \begin{cases} \pi & \text{per } k = 0 \\ 0 & \text{per } k = \text{pari } \neq 0 \\ -4/(\pi k^2) & \text{per } k = \text{dispari}, \end{cases} \tag{4.5}
$$

si perviene a

$$
\begin{aligned}
S_g(t) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)t\\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\Big(\cos t + \frac{1}{3^2}\cos 3t + \frac{1}{5^2}\cos 5t + ...\Big) \qquad \forall t \in\, ]-\pi,\pi[.
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

Si verifica facilmente che $f$ è continua su tutto $\mathbf{R}$ e $f'$ è continua a tratti. Per il Teorema 3.1 quindi $f(t) = S_f(t)$ per ogni $t \in \mathbf{R}$, e $S_f$ converge uniformemente in tutto $\mathbf{R}$.

Tra l'altro per $t = \pi$ si ottiene una rappresentazione di $\pi^2$:

$$\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\,, \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots.$$

**Esempio 3.** Sia $h(t) := \tan t$ per ogni $t \neq \pi/2 + k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$. Questa funzione non è continua a tratti, quindi non possiamo applicare il Teorema 3.1.

**Osservazione.** Le funzioni $f$ e $g$ degli esempi precedenti coincidono in $[0,\pi[$, ed in questo intervallo possono essere rappresentate sia come serie di seni che come serie di coseni.

Questo non contraddice la (4.3), poiché questa *doppia rappresentazione* vale solo su una parte dell'insieme di definizione delle funzioni $f$ e $g$. D'altra parte i coefficienti di Fourier, in quanto integrali, dipendono dal comportamento della funzione in tutto l'intervallo $[-\pi,\pi[$. È quindi naturale che due funzioni che coincidono solo in parte dell'insieme di definizione abbiano due diverse rappresentazioni in serie di Fourier formale.

**Spettri.** Sia ora $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $2\pi$-periodica e continua, si definiscano gli $a_k$ e i $b_k$ come in (2.6) e (2.7), si ponga $\rho_0 := a_0/2$ e $\theta_0 = 0$. Per ogni $k \in \mathbf{N}$ siano $\rho_k \geq 0$ e $\theta_k \in [0, 2\pi[$ tali che

$$\begin{cases} \rho_k := \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \qquad \text{e, se } \rho_k > 0, \\ \cos\theta_k = \dfrac{a_k}{\rho_k}\,, \quad \sin\theta_k = -\dfrac{b_k}{\rho_k} \end{cases} \qquad \forall k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}; \tag{4.7}$$

si noti che i $\theta_k$ sono univocamente determinati se $\rho_k > 0$. Se invece $\rho_k = 0$ si scelga un qualsiasi valore per $\theta_k$. Si può allora riscrivere la serie (2.1) nella forma equivalente

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt) = \sum_{k=0}^{\infty}\rho_k \cos(kt + \theta_k) \qquad \forall t \in \mathbf{R}; \tag{4.8}$$

In teoria dei segnali i numeri $\rho_k$ e $\theta_k$ sono rispettivamente detti *ampiezza* e *fase* della frequenza $k$-esima del segnale $f$; le corrispondenti successioni $\{\rho_k\}$ e $\{\theta_k\}$ sono rispettivamente dette *spettro di ampiezza* e *spettro di fase.* Poiché $\cos\alpha = \sin(\alpha + \pi/2)$ per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$, ponendo $\widetilde{\theta}_k := \theta_k + \pi/2$ la (4.8) è anche equivalente a

$$S_f(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\rho_k \sin(kt + \widetilde{\theta}_k) \qquad \forall t \in \mathbf{R}. \tag{4.9}$$

# 5 Rappresentazione Esponenziale delle Serie di Fourier

Abbiamo esaminato le serie di Fourier formali per funzioni a valori reali; nulla impedisce di estendere quegli sviluppi a funzioni a valori complessi, dal momento che grazie alla linearità la trasformazione $f \mapsto (\{a_k(f)\}, \{b_k(f)\})$ può essere applicata sia alla parte reale che a quella immaginaria. In tal modo si ottiene una rappresentazione della forma (2.1), ma con spettro complesso, esso pure dato dalle formule (2.6) e (2.7). In questo paragrafo studieremo una diversa rappresentazione che si applica alle funzioni a valori complessi periodiche (anche qui assumendo che il periodo sia $2\pi$ per comodità).

Una serie trigonometrica

$$S(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt) \qquad \forall t \in \mathbf{R} \tag{5.1}$$

può essere espressa equivalentemente mediante esponenziali complessi, poiché grazie alle formule di Eulero

$$\cos kt = \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2}, \qquad \sin kt = \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i} \qquad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Ponendo $c_k := \frac{1}{2}[a_k - i\,\mathrm{sign(k)b_k}]$ per ogni $k \in \mathbf{N}$, ovvero

$$c_0 := \frac{a_0}{2}, \qquad c_k := \frac{a_k - ib_k}{2}, \qquad c_{-k} := \frac{a_k + ib_k}{2} \qquad \forall k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \tag{5.2}$$

la (5.1) fornisce

$$S(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{ikt} \qquad \forall t \in \mathbf{R}. \tag{5.3}$$

Quest'ultima è detta *serie trigonometrica in forma esponenziale.*

In teoria dei segnali, al pari dellle successioni dei coefficienti $\{(a_k, b_k)\}$, pure la successione doppia $\{c_k\}$ è denominata lo spettro del segnale $f$ (analogamente a quanto si vedrà per la trasformazione di Fourier). [10]

In questo caso le relazioni di ortogonalità (2.2), (2.3) e (2.4) assumono una forma particolarmente semplice:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} e^{-i\ell t}\, dt = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq \ell \\ 2\pi & \text{se } k = \ell \end{cases} \qquad \forall k, \ell \in \mathbf{Z}; \tag{5.4}$$

grazie a queste relazioni, il procedimento di calcolo utilizzato per ricavare le (2.6) e (2.7) fornisce

$$c_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt \qquad \forall k \in \mathbf{Z}. \tag{5.5}$$

Le formule (5.2) e le loro inverse

$$\begin{cases} a_k = c_k + c_{-k} & \text{per } k = 0, 1, 2, ..., \\ b_k = -i(c_k - c_{-k}) & \text{per } k = 1, 2, ... \end{cases} \tag{5.6}$$

permettono di passare agevolmente dalla rappresentazione delle serie trigonometriche in termini di seni e coseni a quella esponenziale e viceversa.

**Osservazione.** Sia $n \in \mathbf{N}$, $\{c_k \in \mathbf{C}\}_{|k| \leq n}$, e si ponga $P_n(x, y) := \sum_{k=0}^{n}[c_k(x + iy)^k + c_{-k}(x - iy)^k]$ per ogni $x, y \in \mathbf{R}$. Sviluppando le potenze si vede che $P$ è un polinomio algebrico di grado $n$. Inoltre

$$S_n(t) := \sum_{k=-n}^{k=n} c_k e^{ikt} = P_n(\cos t, \sin t). \tag{5.7}$$

[10] A volte si dice che le successioni $\{a_k\}, \{b_k\}$ costituiscono lo *spettro reale,* mentre la $\{c_k\}$ è lo *spettro complesso.* È vero che se $f$ è reale allora $\{a_k(f)\}$ e $\{b_k(f)\}$ sono reali, mentre $\{c_k(f)\}$ possono essere complessi. Comunque questa terminologia è un po' fuorviante, poiché nulla vieta di usare la rappresentazione in termini di seni e coseni anche per funzioni a valori complessi, ottenendo quindi coefficienti $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ complessi.

(Se $S_n$ è a valori reali, i coefficienti del polinomio $P$ possono essere supposti reali.)

Questo giustifica la denominazione di *polinomio trigonometrico* per $S_n$, sia per la rappresentazione in termini delle funzioni trigonometriche $\cos kt$ e $\sin kt$, che per quella in termini degli esponenziali complessi $e^{ikt}$.

**Valore Principale.** Resta da definire la somma della *serie doppia* $\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k e^{ikt}$ $\big(= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}\big)$. Occorre scegliere tra due alternative:

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k e^{ikt} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} c_k e^{ikt} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k} e^{-ikt} \qquad \forall t \in \mathbf{R}, \tag{5.8}$$

oppure

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k e^{ikt} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt} \qquad \forall t \in \mathbf{R}. \tag{5.9}$$

In questo caso quest'ultima è la definizione corretta: è detta somma della serie doppia nel senso del *valore principale,* ed è anche indicata con V.P. $\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k e^{ikt}$.

Si noti che la convergenza di due serie numeriche $\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k$ e $\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{-k}$ implica quella della corrispondente serie doppia nel senso del valore principale (V.P.):

$$\text{V.P.} \sum_{k\in\mathbf{Z}} \alpha_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{-k}\ ,$$

ma non sempre vale il viceversa. Un semplice controesempio è ottenuto ponendo $\alpha_k := k$ per ogni $k \in \mathbf{Z}$; infatti

$$\text{V.P.} \sum_{k\in\mathbf{Z}} \alpha_k = 0, \qquad \text{mentre} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} k = +\infty, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} (-k) = -\infty;$$

in questo caso l'espressione $\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{-k}$ non ha senso, poiché corrisponde alla forma indeterminata $(+\infty) + (-\infty)$. [11]

Nel seguito intenderemo sempre la somma delle serie doppie nel senso del valore principale, ed ometteremo di scrivere "V.P.". [12]

---

[11] Per le serie a termini positivi le due nozioni di convergenza sono equivalenti. (Non lo dimostriamo, però è chiaro che in tal caso sono escluse *compensazioni* come nel controesempio). Lo stesso vale per le serie assolutamente convergenti.

[12] Una definizione analoga può essere introdotta a proposito degli integrali di funzioni limitate su insiemi illimitati o di funzioni illimitate su insiemi limitati. Ad esempio gli integrali $\int_{-\infty}^{+\infty} t\,dt$ e $\int_{-1}^{+1} 1/t\,dt$ non esistono, né come integrali di Riemann generalizzati né come integrali di Lebesgue. Tuttavia si possono definire gli *integrali nel senso del valor principale:*

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} t\,dt := \lim_{m\to+\infty} \int_{-m}^{m} t\,dt \; (=0),$$

$$V.P. \int_{-1}^{+1} \frac{1}{t}\,dt := \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left( \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{t}\,dt + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{t}\,dt \right) (=0).$$

Si noti la stretta analogia tra integrali impropri e serie.

Mediante le formula di trasformazione (5.2) e (5.6), è facile verificare che intendere la serie trigonometrica $\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k e^{ikt}$ nel senso del valore principale equivale a scrivere la corrispondente serie in forma di seni e coseni come

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt) \qquad \text{piuttosto che} \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt.$$

(Ovviamente sarebbe più restrittivo richiedere la convergenza di entrambe queste due ultime serie, piuttosto che quella della loro somma.)

**Funzioni Pari e Dispari.** Denotando con $c$ la funzione $\mathbf{Z} \to \mathbf{C} : k \mapsto c_k$ e con $i\mathbf{R}$ l'insieme dei numeri immaginari, si verifica facilmente che

$$\begin{array}{llll} f \text{ pari} & \Leftrightarrow & c_{-k} = c_k & \forall k \in \mathbf{Z}, \\ f \text{ dispari} & \Leftrightarrow & c_{-k} = -c_k & \forall k \in \mathbf{Z}, \\ f(t) \in \mathbf{R}\ \ \forall t & \Leftrightarrow & c_{-k} = c_k^* & \forall k \in \mathbf{Z}, \\ f(t) \in i\mathbf{R}\ \ \forall t & \Leftrightarrow & c_{-k} = -c_k^* & \forall k \in \mathbf{Z}; \end{array} \qquad [Es] \qquad (5.10)$$

Quest'ultima equivalenza discende dalla precedente, osservando che

$$\widetilde{f} = if \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{c}_k = ic_k \qquad \forall k \in \mathbf{Z}. \qquad [Es] \qquad (5.11)$$

Denotando con $c$ la successione doppia $\mathbf{Z} \to \mathbf{C} : k \mapsto c_k$ , la (5.10) può essere letta come segue:

$$\begin{array}{lll} f \text{ pari} & \Leftrightarrow & c \text{ è pari}, \\ f \text{ dispari} & \Leftrightarrow & c \text{ è dispari}, \\ f(t) \in \mathbf{R}\ \ \forall t & \Leftrightarrow & \mathrm{Re}(c) \text{ è pari, } \mathrm{Im}(c) \text{ è dispari}, \\ f(t) \in i\mathbf{R}\ \ \forall t & \Leftrightarrow & \mathrm{Re}(c) \text{ è dispari, } \mathrm{Im}(c) \text{ è pari}. \end{array} \qquad [Es] \qquad (5.12)$$

Incidentalmente si noti anche che, se $f$ è sviluppabile in serie di Fourier formale, allora

$$f(t) \in \mathbf{R}\ \ \forall t \quad \Rightarrow \quad f(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \mathrm{Re}(c_k e^{ikt}). \qquad (5.13)$$

Il passaggio dalla funzione $f$ alle successioni dei coefficienti di Fourier $\{(a_k, b_k)\}$ o $\{c_k\}$ è interpretato come un processo di *analisi;* l'operazione inversa che porta dai coefficienti di Fourier alla funzione $f$ è interpretato come *sintesi.*

**Rappresentazione Esponenziale Alternativa.** In analogia con la (4.8), si noti che per ogni $k \in \mathbf{Z}$,

$$c_k = r_k e^{i\varphi_k} \qquad \text{per } r_k \geq 0 \text{ e } \varphi_k \in \mathbf{R} \text{ opportuni;}$$

$r_k$ e $e^{i\varphi_k}$ sono rispettivamente detti *ampiezza* e *fasore.* Pertanto

$$S_f(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k e^{ikt} = \sum_{k\in\mathbf{Z}} r_k e^{i(kt+\varphi_k)} \qquad \forall t \in \mathbf{R}. \qquad (5.14)$$

**Osservazione.** Disponiamo quindi di quattro rappresentazioni $S_f^{(1)}, ..., S_f^{(4)}$ per lo sviluppo in serie di Fourier formale di una funzione $2\pi$-periodica:

(i) due rappresentazioni in termini di seni e coseni per $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$:

$$S_f^{(1)}(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt) \qquad (a_k, b_k \in \mathbf{R}), \tag{5.15}$$

$$S_f^{(2)}(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k \cos(kt + \theta_k) \qquad (\rho_k, \theta_k \in \mathbf{R}); \tag{5.16}$$

(ii) due rappresentazioni in forma esponenziale per $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$:

$$S_f^{(3)}(t) := \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{ikt} \qquad (c_k \in \mathbf{C}), \tag{5.17}$$

$$S_f^{(4)}(t) := \sum_{k \in \mathbf{Z}} r_k e^{i(kt+\varphi_k)} \qquad r_k \in \mathbf{R}^+, \varphi_k \in \mathbf{R}. \tag{5.18}$$

La rappresentazione esponenziale è più semplice di quella in termini di seni e coseni ed il suo uso conduce a conti più agevoli. Nel caso di funzioni a valori reali la rappresentazione in termini di seni e coseni comunque consente di sviluppare la trattazione in ambito reale.

**Confronto tra le rappresentazioni spettrali alternative.** Come abbiamo visto, questi sviluppi in serie sono equivalenti: si passa da uno all'altro mediante semplici formule di trasformazione lineari dei coefficienti di Fourier (siano essi reali o complessi). I coefficienti $a_k, b_k, c_k$ degli sviluppi di Fourier (5.15) e (5.17) dipendono linearmente dalla funzione $f$; questo invece non vale per i coefficienti $\rho_k, \theta_k, r_k, \varphi_k$ delle rappresentazioni (5.16) e (5.18), che sono ricavati dagli $a_k, b_k, c_k$ mediante trasformazioni non lineari. Questo può rendere più conveniente la rappresentazione dello spettro in termini di $a_k, b_k, c_k$ piuttosto che $\rho_k, \theta_k, r_k, \varphi_k$.

**Funzioni con Periodo Diverso da $2\pi$.** Se $f$ è periodica di periodo $T \neq 2\pi$, allora $\widetilde{f}(\tau) := f(T\tau/2\pi)$ è una funzione $2\pi$-periodica. Partendo dallo sviluppo in serie trigonometrica

$$S_{\widetilde{f}}(\tau) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\tau + b_k \sin k\tau) \qquad \forall \tau \in \mathbf{R},$$

mediante la trasformazione di variabile $\tau \mapsto t := T\tau/(2\pi)$ si ha

$$S_f(t) = S_{\widetilde{f}}\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{2k\pi}{T}t + b_k \sin\frac{2k\pi}{T}t\right) \qquad \forall t \in \mathbf{R},$$

con

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(\tau)\cos k\tau\, d\tau = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\frac{2k\pi}{T}t\, dt \qquad \text{per } k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(\tau)\sin k\tau\, d\tau = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\frac{2k\pi}{T}t\, dt \qquad \text{per } k = 1, 2, \ldots$$

Pertanto tutti i risultati precedenti si estendono facilmente a $S_f$. Analogamente

$$S_f(t) = S_{\widetilde{f}}\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{2\pi ikt/T} \qquad \forall t \in \mathbf{R},$$

con

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(\tau)e^{-ik\tau}\,d\tau = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-2\pi ikt/T}\,dt \qquad \forall k\in\mathbf{Z}. \tag{5.19}$$

# 6 Serie di Fourier in $L^2$

Finora abbiamo trattato la teoria delle serie di Fourier per funzioni continue, o continue a tratti. Adesso illustriamo la teoria negli spazi funzionali $L^p$.

Incominciamo da un risultato molto semplice.

**Proposizione 6.1.** *Per ogni successione di coefficienti $c = \{c_k\} \in \ell^1$, la corrispondente serie di Fourier $S_c = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k e^{ikt}$ converge uniformemente ad una funzione continua.. L'operatore $\ell^1 \to C^0([-\pi,\pi)]) : c \mapsto S_c$ è continuo. [Ex]*

Sappiamo che lo spazio di funzioni $L^2(-\pi,\pi)$ e lo spazio di successioni $\ell^2$ sono entrambi dotati di prodotto scalare:

$$(f,g)_{L^2} := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)[g(t)^*]\,dt \qquad \forall f,g\in L^2(-\pi,\pi), \tag{6.1}$$

$$(\{c_k\},\{d_k\})_{\ell^2} := \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k d_k^* \qquad \forall\{c_k\},\{d_k\}\in\ell^2. \tag{6.2}$$

Per le funzioni di $L^2(-\pi,\pi)$ ha senso scrivere le formule dei coefficienti di Fourier, poiché $L^2(-\pi,\pi)\subset L^1(-\pi,\pi)$.

**Teorema 6.2.** *Ogni funzione $f\in L^2(-\pi,\pi)$ è sviluppabile in serie di Fourier. Più precisamente, definiti i coefficienti $\{a_k\}$, $\{b_k\}$, $\{c_k\}$ come in* (2.6), (2.7) *e (5.5),*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt + b_k\sin kt) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k e^{ikt} \qquad q\forall t\in\mathbf{R}, \tag{6.3}$$

*nel senso della convergenza in $L^2(-\pi,\pi)$. Ovvero, per $n\to+\infty$,*

$$\begin{aligned} &\left\| f(t) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kt + b_k\sin kt)\right\|_{L^2} \to 0,\\ &\left\| f(t) - \sum_{k=-n}^{k=n} c_k e^{ikt}\right\|_{L^2} \to 0. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Si noti che in generale la convergenza in $L^2(-\pi,\pi)$ implica la convergenza quasi dappertutto di una opportuna sottosuccessione, ma non di tutta la successione. [13]

Formule analoghe valgono per le rappresentazioni (5.16) e (5.18).

**Dimostrazione.** Il teorema si basa sulla teoria delle serie di Fourier astratte negli spazi di Hilbert.

(Grazie al teorema di Weierstrass-Stone,) si può dimostrare che la famiglia $\{e^{ikt}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ è una base ortogonale di $L^2(-\pi,\pi)$. Per ogni $f\in L^2(-\pi,\pi)$, $\{c_k(f) = (f,e^{ikt})_{L^2}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ è la famiglia dei suoi coefficienti di Fourier in $L^2(-\pi,\pi)$. Questo significa esattamente quanto affermato nella tesi. □

[13] Per via del sullodato risultato di Carleson del 1966, se $f$ è continua la sua serie di Fourier converge per ogni $t\in\,]-\pi,\pi[$; ma questa è unáltra storia.

Vediamo ora che l'operazione che trasforma una funzione di $L^2(-\pi,\pi)$ nei suoi coefficienti di Fourier stabilisce una corrispondenza particolarmente interessante tra gli spazi di Hilbert $L^2(-\pi,\pi)$ e $\ell^2$.

**Teorema 6.3.** *(di Parseval) Siano $f, \widetilde{f} \in L^2(-\pi,\pi)$, e siano*

$$S_f(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k e^{ikt} \qquad q\forall t \in \mathbf{R} \tag{6.5}$$

$$S_{\widetilde{f}}(t) := \frac{\widetilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\widetilde{a}_k \cos kt + \widetilde{b}_k \sin kt) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \widetilde{c}_k e^{ikt} \qquad q\forall t \in \mathbf{R} \tag{6.6}$$

*i rispettivi sviluppi in serie di Fourier (nel senso della convergenza in $L^2(-\pi,\pi)$). Allora*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\widetilde{f}(t)^* \, dt = \frac{\pi}{2} a_0 \widetilde{a}_0^* + \pi \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \widetilde{a}_k^* + b_k \widetilde{b}_k^*) = 2\pi \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k \widetilde{c}_k^* \ (\in \mathbf{C}), \tag{6.7}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt = \frac{\pi}{2}|a_0|^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|^2 + |b_k|^2) = 2\pi \sum_{k\in\mathbf{Z}} |c_k|^2 \ (\in \mathbf{R}^+). \tag{6.8}$$

*Pertanto*

$$|c_k| \to 0 \qquad \textit{per } k \to +\infty \textit{ (disuguaglianza di Bessel)}, \tag{6.9}$$

Dal punto di vista applicativo, (6.8) esprime l'uguaglianza tra l'energia del segnale periodico $f$ e la somma delle energie delle sue componenti armoniche.

**Dimostrazione.** Per verificare la prima uguaglianza di (6.7), basta scrivere $f(t)\widetilde{f}(t)^*$ in termini dei coefficienti di Fourier $\{a_k\}$, $\{b_k\}$, sviluppare il prodotto, quindi integrare ed usare le proprietà di ortogonalità (2.2)—(2.4). Analogamente grazie alla (5.4)

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\widetilde{f}(t)^* \, dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k e^{ikt}\right)\left(\sum_{\ell\in\mathbf{Z}} \widetilde{c}_\ell^* e^{-i\ell t}\right) dt \\ &= \sum_{k\in\mathbf{Z}}\sum_{\ell\in\mathbf{Z}} c_k \widetilde{c}_\ell^* \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-\ell)t} \, dt = 2\pi \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k \widetilde{c}_k^* = 2\pi \sum_{k\in\mathbf{Z}} |c_k|^2.\end{aligned}$$

Ancora una volta abbiamo scambiato le operazioni di serie e di integrale; in $L^2(-\pi,\pi)$ questo è del tutto lecito. Infine ponendo $\widetilde{f} = f$ nella (6.7) si ottiene la (6.8). □

**Corollario 6.4.** *La trasformazione $T$ che manda $f$ nel suo spettro $\{c_k\}$ è un isomorfismo isometrico tra gli spazi di Hilbert $L^2(-\pi,\pi)$ e $\ell^2$.*

Il prossimo risultato lega l'operazione di derivazione delle funzioni (derivabili) periodiche e l'espansione in serie di Fourier. Questo è uno dei principali risultati di questa teoria, per altro già ricca.

**Teorema 6.5.** *Sia $f \in L^2(-\pi,\pi)$ e sia (6.3) il suo sviluppo in serie di Fourier formale. Se $f' \in L^2(-\pi,\pi)$ allora*

$$f'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k(-a_k \sin kt + b_k \cos kt) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} ikc_k e^{ikt} \qquad q\forall t \in \mathbf{R}. \tag{6.10}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 \, dt = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k^2(|a_k|^2 + |b_k|^2) = 2\pi \sum_{k\in\mathbf{Z}} k^2|c_k|^2 \ (< +\infty). \tag{6.11}$$

*Analogamente, per ogni intero $n \geq 1$, se $f, ..., f^{(n)} \in L^2(-\pi, \pi)$ allora* [14]

$$f^{(n)}(t) = ... = \sum_{k\in\mathbf{Z}} (ik)^n c_k e^{ikt} \qquad q\forall t \in \mathbf{R}, \tag{6.12}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f^{(n)}(t)|^2 \, dt = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k^n (|a_k|^2 + |b_k|^2) = 2\pi \sum_{k\in\mathbf{Z}} k^n |c_k|^2 \ (< +\infty). \tag{6.13}$$

Pertanto, affinché esista la derivata $n$-esima, quanto più alto è l'ordine $n$ di derivazione, tanto più rapidamente lo spettro deve convergere a zero all'infinito ($k \to +\infty$ per $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$; $k \to \pm\infty$ per $\{c_k\}$). E viceversa.

**Osservazione.** In particolare, se $\sum_{k\in\mathbf{Z}} k|c_k|^2$ allora $f, f' \in L^2(-\pi, \pi)$. Questo implica che $f$ è assolutamente continua, in particolare. (Tra l'altro $f(-\pi) = f(\pi)$, poiché in effetti $t$ varia lungo la circonferenza...)

**Serie di Fourier astratte.** In ogni spazio di Hilbert (separabile) $H$ si definiscono le *serie di Fourier astratte.* Queste consistono nella rappresentazione di ogni $u \in H$ nella forma $u = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k$ (nel senso della convergenza in $H$, ovviamente); qui $\{u_k\}$ è una base ortonormale di $H$, e $a_k = (u, u_k)_H$ for ogni $k$. Se poi $\{u_k\}$ è la famiglia delle funzioni trigonometriche (normalizzate), allora riotteniamo la serie di Fourier classica.

# 7 Method of Variable Separation for PDEs

The theory of Fourier series is at the basis of the classical *method of separation of variables* for the solution of PDEs (= partial differential equations) — more specifically, of certain PDEs with constant coefficients in domains with special symmetries (e.g., a Cartesian product of intervals).

For instance, let us consider the following boundary-value problem for the Laplace equation:

$$\begin{array}{lll} D_x^2 u + D_y^2 u = 0 & \text{in } ]0,\pi[ \times ]0,\pi[, & \\ u(0,y) = 0, & u(\pi,y) = 0 & \forall y \in ]0,\pi[, \\ u(x,0) = 0, & u(x,\pi) = g(x) & \forall x \in ]0,\pi[, \end{array} \tag{7.1}$$

for a prescribed function $g$.

Let us first look for general complex-valued solutions of the PDE of the form $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Assuming that $u(x, y) \neq 0$ for any $(x, y)$, we get

$$0 = \frac{D_x^2 u + D_y^2 u}{u} = \frac{X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y)}{X(x)Y(y)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)}. \tag{7.2}$$

As $X''(x)/X(x)$ ($Y''(y)/Y(y)$, resp.) does not depend on $y$ ($x$, resp.), we infer that

$$\exists C \in \mathbf{C} : \qquad -\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = C, \tag{7.3}$$

[14] Omettiamo la formula della derivata $n$-esima della serie di Fourier formale in forma in termini di seni e coseni perché richiederebbe una distinzione dei diversi valori di $n$, in quanto la derivazione trasforma seni in coseni e viceversa. È invece molto agevole derivare la serie di Fourier formale in forma esponenziale, poiché la derivata di un esponenziale è un esponenziale: questo è uno dei vari vantaggi offerti da tale rappresentazione.

that is, the following system of two ODEs (= ordinary differential equations):

$$X''(x) = -CX(x), \qquad Y''(x) = CY(x). \tag{7.4}$$

We know that the general solution of the first equation is of the form

$$X(x) = a\cos\sqrt{C}x + b\sin\sqrt{C}x \qquad \forall x \in ]0,\pi[\ (a, b \in \mathbf{C}). \tag{7.5}$$

Because of $(7.1)_2$, we assume the boundary conditions

$$X(0) = 0, \qquad X(\pi) = 0. \tag{7.6}$$

This yields

$$a = 0, \qquad b\sin\sqrt{C}\pi = 0. \tag{7.7}$$

If $b = 0$, then $X(x) \equiv 0$, whence $u(x, y) \equiv 0$. This solution is of no interest, since it fits the condition for $y = \pi$ only if $g \equiv 0$. In order to get a nontrivial solution we need $\sin\sqrt{C}\pi = 0$; this holds iff If $C > 0$ and $\sqrt{C} = k \in \mathbf{N}$. We thus have the linearly independent family $\{X_k\}$ of solutions, with

$$X_k(x) = \sin kx \qquad \forall x \in ]0,\pi[, \forall k \in \mathbf{N}. \tag{7.8}$$

For $C = k^2$ $(\in \mathbf{N})$, the other ODE reads

$$Y''(y) - k^2 Y(y) = 0, \tag{7.9}$$

which has the general solution

$$Y(y) = a\cos iky + b\sin iky \qquad \forall y \in ]0,\pi[\ (a, b \in \mathbf{C}), \tag{7.10}$$

or equivalently,

$$Y(y) = \widetilde{a}\cosh ky + \widetilde{b}\sinh ky \qquad \forall y \in ]0,\pi[\ (\widetilde{a}, \widetilde{b} \in \mathbf{C}). \tag{7.11}$$

By assuming the boundary condition $Y(0) = 0$, we get $\widetilde{a} = 0$; this yields the following linearly independent family $\{Y_k\}$ of solutions:

$$Y_k(y) = \sinh ky \qquad \forall x \in ]0,\pi[, \forall k \in \mathbf{N}. \tag{7.12}$$

(The reader will notice that we are not prescribing any condition on $Y$ for $y = \pi$.)

In conclusion, the linearly independent functions

$$u_k(x, y) = X_k(x)Y_k(y) = \sin kx \sinh ky \qquad \forall (x, y) \in ]0,\pi[^2\ (k \in \mathbf{N}) \tag{7.13}$$

fulfill the system

$$\begin{aligned}
&D_x^2 u_k + D_y^2 u_k = 0 \qquad \text{in } ]0,\pi[\times]0,\pi[,\\
&u_k(0, y) = 0, \qquad u_k(\pi, y) = 0 \qquad \forall y \in ]0,\pi[,\\
&u_k(x, 0) = 0 \qquad \forall x \in ]0,\pi[.
\end{aligned} \tag{7.14}$$

At least formally, for any sequence $\{c_k\}$ in $\mathbf{C}$, the same then holds for the (infinite) linear combination

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx \sinh ky \qquad \forall (x, y) \in ]0,\pi[^2. \tag{7.15}$$

This function solves the boundary-value problem (7.1) iff $u(x,\pi) = g(x)$ for any $x \in ]0,\pi[$. Setting $\widehat{c}_k = c_k \sinh k\pi$ for any $k$, this reads

$$\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{c}_k \sin kx = g(x) \qquad \forall x \in ]0,\pi[. \tag{7.16}$$

The $\widehat{c}_k$s are thus the Fourier coefficients of $g$, provided that this function can be represented as a Fourier series of sines. This holds for the odd extension to $]-\pi,\pi[$ of any sufficiently regular $g : ]0,\pi[ \to \mathbf{C}$.

The solution $u$ is unique.

**Other Boundary Conditions I.** The method of separation of variables may also be applied to other boundary conditions. For instance, let us consider the following problem:

$$\begin{aligned} &D_x^2 u + D_y^2 u = 0 \qquad \text{in } ]0,\pi[ \times ]0,\pi[,\\ &u(0,y) = 0, \qquad D_x u(\pi,y) = 0 \qquad \forall y \in ]0,\pi[,\\ &u(x,0) = 0, \qquad u(x,\pi) = g(x) \qquad \forall x \in ]0,\pi[, \end{aligned} \tag{7.17}$$

again for a prescribed function $g$.

One proceeds as above, searching for solutions of the PDE of the form $u(x,y) = X(x)Y(y)$. In this case the function $X$ is assumed to solve the following problem

$$X''(x) = -CX(x), \qquad X(0) = 0, \qquad X'(\pi) = 0. \tag{7.18}$$

If $C = (k+1/2)^2$ for some $k \in \mathbf{N}$, this problem has the following linearly independent family $\{X_k\}$ of solutions

$$X_k(x) = \sin[(k+\tfrac{1}{2})x] \qquad \forall x \in ]0,\pi[, \forall k \in \mathbf{N}. \tag{7.19}$$

Proceeding as above, we get that the linearly independent functions

$$u_k(x,y) = \sin[(k+\tfrac{1}{2})x] \sinh[(k+\tfrac{1}{2})y] \qquad \forall (x,y) \in ]0,\pi[^2 \ (k \in \mathbf{N}) \tag{7.20}$$

fulfill the system

$$\begin{aligned} &D_x^2 u_k + D_y^2 u_k = 0 \qquad \text{in } ]0,\pi[ \times ]0,\pi[,\\ &u_k(0,y) = 0, \qquad D_x u_k(\pi,y) = 0 \qquad \forall y \in ]0,\pi[,\\ &u_k(x,0) = 0 \qquad \forall x \in ]0,\pi[. \end{aligned} \tag{7.21}$$

The general solution thus reads

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin[(k+\tfrac{1}{2})x] \sinh[(k+\tfrac{1}{2})y] \qquad \forall (x,y) \in ]0,\pi[^2. \tag{7.22}$$

This function solves the boundary-value problem (7.17) iff $u(x,\pi) = g(x)$ for any $x \in ]0,\pi[$, and so on. The Fourier coefficients $\{c_k\}$ may be determined in terms of those of $g$ as above.

The solution $u$ is unique.

*Exercise.* What is the solution if the condition "$u(x,0) = 0$ for $x \in ]0,\pi[$" is replaced by "$D_y u(x,0) = 0$ for $x \in ]0,\pi[$" ?

**Other Boundary Conditions II.** Let us next consider the following problem:

$$\begin{aligned} &D_x^2 u + D_y^2 u = 0 \qquad \text{in } ]0,\pi[\times]0,\pi[,\\ &D_x u(0,y) = 0, \qquad D_x u(\pi,y) = 0 \qquad \forall y \in ]0,\pi[,\\ &u(x,0) = 0, \qquad u(x,\pi) = g(x) \qquad \forall x \in ]0,\pi[, \end{aligned} \tag{7.23}$$

again for a prescribed function $g$.

One proceeds as above, and assumes that the function $X$ solves the problem

$$X''(x) = -CX(x), \qquad X'(0) = 0, \qquad X'(\pi) = 0. \tag{7.24}$$

If $\sqrt{C} = k \in \mathbf{N}$, this problem has the following linearly independent family $\{X_k\}$ of solutions

$$X_k(x) = \cos kx \qquad \forall x \in ]0,\pi[, \forall k \in \mathbf{N}. \tag{7.25}$$

Proceeding as above, we get that the linearly independent functions

$$u_k(x,y) = \cos kx \sinh ky \qquad \forall (x,y) \in ]0,\pi[^2 \ (k \in \mathbf{N}) \tag{7.26}$$

fulfill the system

$$\begin{aligned} &D_x^2 u_k + D_y^2 u_k = 0 \qquad \text{in } ]0,\pi[\times]0,\pi[,\\ &D_x u_k(0,y) = 0, \qquad D_x u_k(\pi,y) = 0 \qquad \forall y \in ]0,\pi[,\\ &u_k(x,0) = 0 \qquad \forall x \in ]0,\pi[. \end{aligned} \tag{7.27}$$

The general solution thus reads

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos kx \sinh ky \qquad \forall (x,y) \in ]0,\pi[^2. \tag{7.28}$$

This function solves the boundary-value problem (7.17) iff $u(x,\pi) = g(x)$ for any $x \in ]0,\pi[$, and so on. The Fourier coefficients $\{c_k\}$ may be determined in terms of those of $g$ as above.

The solution $u$ is unique.

*Exercise.* What is the solution if the condition "$u(x,0) = 0$ for $x \in ]0,\pi[$" is replaced by "$D_y u(x,0) = 0$ for $x \in ]0,\pi[$" ?

**Other PDEs.** The method of separation of variables may also be applied to other boundary-value problems for PDEs, again with constant coefficients and set in special domains. Here we indicate some examples, in which $y$ typically represents time. For all of these problems the solution $u$ is unique.

1. Cauchy-Dirichlet problem for the wave equation:

$$\begin{aligned} &D_x^2 u - D_y^2 u = 0 \qquad \text{in } ]0,\pi[\times]0,\pi[,\\ &u(0,y) = 0, \qquad u(\pi,y) = 0 \qquad \forall y \in ]0,\pi[,\\ &u(x,0) = 0, \qquad D_y u(x,0) = g(x) \qquad \forall x \in ]0,\pi[, \end{aligned} \tag{7.29}$$

for a prescribed function $g$.

The method of separation of variables provides the following general solution for the PDE coupled with the first three boundary conditions:

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx \sin ky \qquad \forall (x,y) \in \,]0,\pi[^2. \tag{7.30}$$

This function solves the boundary-value problem (7.29) iff $D_y u(x,0) = g(x)$ for any $x \in \,]0,\pi[$. The Fourier coefficients $\{c_k\}$ may be determined in terms of those of $g$ as above.

*Exercises.* (i) What is the solution if in (7.29) the condition "$u(x,0) = 0$ for $x \in \,]0,\pi[$" is replaced by "$D_y u(x,0) = 0$ for $x \in \,]0,\pi[$" ?

(ii) What is the solution if in (7.29) the condition "$u(0,y) = 0$ for $y \in \,]0,\pi[$" is replaced by "$D_x u(0,y) = 0$ for $y \in \,]0,\pi[$" ?

(iii) What is the solution if in (7.29) the conditions "$u(0,y) = u(\pi,y) = 0$ for $y \in \,]0,\pi[$" are replaced by "$D_x u(0,y) = D_x u(\pi,y) = 0$ for $y \in \,]0,\pi[$" ?

2. Cauchy-Dirichlet problem for the heat equation

$$\begin{aligned} &D_x^2 u - D_y u = 0 \qquad \text{in } ]0,\pi[\, \times \,]0,\pi[, \\ &u(0,y) = 0, \qquad u(\pi,y) = 0 \qquad \forall y \in \,]0,\pi[, \\ &u(x,0) = g(x) \qquad \forall x \in \,]0,\pi[, \end{aligned} \tag{7.31}$$

for a prescribed function $g$.

The method of separation of variables provides the following general solution for the PDE coupled with the first two boundary conditions:

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-k^2 y} \sin kx \qquad \forall (x,y) \in \,]0,\pi[^2. \tag{7.32}$$

This function solves the boundary-value problem (7.31) iff $u(x,0) = g(x)$ for any $x \in \,]0,\pi[$. The Fourier coefficients $\{c_k\}$ may be determined in terms of those of $g$ as above.

*Exercises.* (i) What is the solution if in (7.31) the condition "$u(0,y) = 0$ for $y \in \,]0,\pi[$" is replaced by "$D_x u(0,y) = 0$ for $y \in \,]0,\pi[$" ?

(ii) What is the solution if in (7.31) the conditions "$u(0,y) = u(\pi,y) = 0$ for $y \in \,]0,\pi[$" are replaced by "$D_x u(0,y) = D_x u(\pi,y) = 0$ for $y \in \,]0,\pi[$" ?

3. Cauchy-Dirichlet problem for the Schrödinger equation

$$\begin{aligned} &D_x^2 u + i D_y u = 0 \qquad \text{in } ]0,\pi[\, \times \,]0,\pi[, \\ &u(0,y) = 0, \qquad u(\pi,y) = 0 \qquad \forall y \in \,]0,\pi[, \\ &u(x,0) = g(x) \qquad \forall x \in \,]0,\pi[, \end{aligned} \tag{7.33}$$

for a prescribed function $g$. The method of separation of variables provides the following general solution for the PDE coupled with the first two boundary conditions:

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ik^2 y} \sin kx \qquad \forall (x,y) \in \,]0,\pi[^2. \tag{7.34}$$

This function solves the boundary-value problem (7.33) iff $u(x,0) = g(x)$ for any $x \in ]0,\pi[$. The Fourier coefficients $\{c_k\}$ may be determined in terms of those of $g$ as above.

This result may also be derived by noticing that the Schrödinger equation may be retrieved from the heat equation $D_x^2 u - D_y u = 0$ by replacing $y$ by $-iy$. The same substitution may then be made in the corresponding solutions.

*Exercises.* (i) What is the solution if in (7.32) the condition "$u(0,y) = 0$ for $y \in ]0,\pi[$" is replaced by "$D_x u(0,y) = 0$ for $y \in ]0,\pi[$" ?

(ii) What is the solution if in (7.32) the conditions "$u(0,y) = u(\pi,y) = 0$ for $y \in ]0,\pi[$" are replaced by "$D_x u(0,y) = D_x u(\pi,y) = 0$ for $y \in ]0,\pi[$" ?

# 8 Further Exercises on Variable Separation

**Exercise 1.** Solve the equation $\Delta u = 0$ on the set $]0,\pi[^2$, with the boundary conditions $D_x u(0,y) = u(\pi,y) = 0$ for $0 < y < \pi$, $u(x,0) = 0$ for $0 < x < \pi$, and $u(x,\pi) = x$ for $0 < x < \pi$.

**Exercise 2.** Solve the equation $\Delta u = 0$ on the set $]0,\pi[^2$, with the boundary conditions $u(0,y) = u(\pi,y)$ and $D_x u(0,y) = D_x u(\pi,y)$ for $0 < y < \pi$, and $u(x,\pi) = (\sin x)\cos x$ for $0 < x < \pi$.

**Exercise 3.** Solve the equation $D_{tt}u - D_{xx}u = 0$ on the set $]0,\pi[\times\mathbf{R}^+$, with the boundary conditions $u(0,t) = D_x u(\pi,t) = 0$ for $t > 0$, and with the Cauchy conditions $u(x,0) = 1$ and $D_t u(x,0) = x$ for $0 < x < \pi$.

**Exercise 4.** Solve the equation $\Delta u = 0$ on the set $]0,\pi[^2$, with the boundary conditions $u(0,y) = 1$ and $u(\pi,y) = 2$ for $0 < y < \pi$, $u(x,0) = 1$ for $0 < x < \pi$, and $u(x,\pi) = x$ for $0 < x < \pi$.

**Exercise 5.** (i) Use the method of separation of variables to find the real solutions of the equation $D_{xx}u + D_{yy}u = 0$ in the annulus $\{(r,\theta) : 1 < r < 2, 0 < \theta < 2\pi\}$.

(ii) Solve the same problem in the disk $\{(r,\theta) : 0 \le r < 1\}$.

*Hint:* Remind the representation of the Laplacian operator $\Delta$ in polar coordinates $(r,\theta)$: if $u(x,y) = \widetilde{u}(r,\theta)$ then

$$\Delta u(x,y) = L\widetilde{u}(r,\theta), \qquad \text{with} \qquad L = r^{-1}D_r(rD_r) + r^{-2}D_\theta^2.$$

*Solution.* (i) We look for solutions of the form $u(x,y) = \widetilde{u}(r,\theta) = R(r)H(\theta)$.

The PDE $\Delta u(x,y) = L\widetilde{u}(r,\theta) = 0$ yields $[r^2R''(r) + rR'(r)]/R = -H''/H = C$ $(\in \mathbf{C})$.

Let us search for $2\pi$-periodic solutions of the ODE $H''(\theta) + CH(\theta) = 0$. For $k := \sqrt{C} \in \mathbf{N}$ we get the basis of solutions $\{\cos k\theta, \sin k\theta : k \in \mathbf{N}\}$.

The ODE $[r^2R''(r) + rR'(r)]/R = k^2$ is equivalent to $r^2R''(r) + rR'(r) - k^2R(r) = 0$. This second order problem has two independent solutions. Searching for a solution of the form $R(r) = r^\lambda$ with $\lambda \in \mathbf{C}$, we get $\lambda(\lambda - 1) + \lambda - k^2 = 0$, that is, $\lambda^2 = k^2$, i.e., $\lambda = \pm k$ if $k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. If $k = 0$ the two independent solutions are $R(r) = 1$ and $R(r) = \log r$. For $R(r)$ we thus get the basis of solutions $\{r^k, r^{-k}\}_{k\in\mathbf{N}} \cup \{\log r\}$.

The general solution of the PDE then reads $\widetilde{u}(r,\theta) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} r^k(a_k\cos k\theta + b_k \sin k\theta) + c\log r$, with $a_k, b_k, c$ $(k \in \mathbf{Z})$ real constants.

(ii) In this case we must impose the boundedness of $R$ at the origin. The basis of solutions for $R(r)$ is thus reduced to $\{r^k : k \in \mathbf{N}\}$.

The general solution of the PDE thus reads $\widetilde{u}(r,\theta) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k(a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)$.

**Exercise 6.** (i) Let us denote by $(r,\theta)$ the polar coordinates in the plane, and set $u(x,y) = \widetilde{u}(r,\theta)$. Solve the equation $D_{xx}u + D_{yy}u = 0$ in the annulus $\{(r,\theta) : 1 < r < 2\}$ with the boundary conditions $\widetilde{u}(1,\theta) = 0$ and $\widetilde{u}(2,\theta) = \sin\theta$ for any $\theta \in [0,2\pi]$.

(ii) Solve the same problem, with the boundary conditions $\widetilde{u}(1,\theta) = \cos\theta$ and $\widetilde{u}(2,\theta) = \sin(3\theta)$ for any $\theta \in [0,2\pi]$.

(iii) Solve the same problem for two generic boundary conditions $\widetilde{u}(1,\theta) = g_1(\theta)$ and $\widetilde{u}(2,\theta) = g_2(\theta)$ for any $\theta \in [0,2\pi]$, with $g_1, g_2$ representable as Fourier series.

*Solution.* (i) Let us look for a solution of the form $u(x,y) = \widetilde{u}(r,\theta) = R(r)\sin\theta$. As $D_\theta^2 \sin\theta = -\sin\theta$, we have $\Delta u(x,y) = L\widetilde{u}(r,\theta) = 0$ iff $r^2R''(r) + rR'(r) - R(r) = 0$. This equation has the independent solutions $R(r) = C_1 r + C_2/r$ for $1 < r < 2$ (see the previous exercise). Imposing the boundary conditions $R(1) = 0$ and $R(2) = 1$, we get $R(r) = (2/3)(r - 1/r)$. Thus $\widetilde{u}(r,\theta) = (2/3)(r - 1/r)\sin\theta$. The solution $\widetilde{u}$ is unique.

(ii) *Outline:* The solution $\widetilde{u}$ may be represented as $\widetilde{u} = \widetilde{u}_1 + \widetilde{u}_2$, with $\widetilde{u}_1$ and $\widetilde{u}_2$ solving the PDE and fulfilling the following two sets of boundary conditions: $\widetilde{u}_1(1,\theta) = \cos\theta$, $\widetilde{u}_1(2,\theta) = 0$ and $\widetilde{u}_2(1,\theta) = 0$, $\widetilde{u}_2(2,\theta) = \sin(3\theta)$ for any $\theta \in [0,2\pi]$. The functions $\widetilde{u}_1$ and $\widetilde{u}_2$ may be determined as above. The solution $\widetilde{u}$ is unique.

Alternatively, one may use the method of the following part (iii).

(iii) As we saw in the Exercise 5, the general solution of the PDE reads $\widetilde{u}(r,\theta) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} r^k(a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) + c\log r$. Let $g_r(\theta) = \alpha_{r,0}/2 + \sum_{h\in\mathbf{N}}(\alpha_{r,h}\cos h\theta + \beta_{r,h}\sin h\theta)$ for any $\theta \in [0,2\pi]$ and $r = 1,2$.

Because of the linear independence, different harmonics uncouple: the coefficients must then be identified for each $k \in \mathbf{Z}$ (independently one from the other). More explicitly, prescribing the boundary conditions, for each $h \in \mathbf{N}\setminus\{0\}$ we get two systems; each consists of two equations for two unknowns:

$\alpha_{r,h} = r^h a_h + r^{-h} a_{-h}$ with $r = 1,2$, for the two unknowns $a_h$ and $a_{-h}$, and

$\beta_{r,h} = r^h b_h - r^{-h} b_{-h}$ with $r = 1,2$, for the two unknowns $b_h$ and $b_{-h}$.

For $n = 0$ instead we get a single system of two equations:

$\alpha_{r,0}/2 = a_0 + c\log r$ with $r = 1,2$, for the two unknowns $a_0$ and $c$.

The solution $\widetilde{u}$ is unique.

Alternatively, one may represent the solution $\widetilde{u}$ as $\widetilde{u} = \widetilde{u}_1 + \widetilde{u}_2$, and use the method of part (ii).

**Exercise 7.** (i) Let us denote by $(r,\theta)$ the polar coordinates in the plane, and set $u(x,y) = \widetilde{u}(r,\theta)$. Solve the equation $D_{xx}u + D_{yy}u = 0$ in the region $\{(r,\theta) : r > 1\}$, with the side conditions $\widetilde{u}(1,\theta) = \sin(2\theta)$ and $\lim_{r\to+\infty}\widetilde{u}(r,\theta) = 0$ uniformly for $\theta \in [0,2\pi]$.

(ii) Solve the same problem, with the function $\sin(2\theta)$ replaced by a prescribed $2\pi$-periodic complex function $g$, which is for instance of class $C^1$.

*Solution.* (i) Let us look for solutions of the form $u(x,y) = \widetilde{u}(r,\theta) = R(r)\sin 2\theta$. As $D_\theta^2\sin(2\theta) = -4\sin(2\theta)$, $\Delta u(x,y) = L\widetilde{u}(r,\theta) = 0$ iff $r^2R''(r) + rR'(r) - 4R(r) = 0$, that is $R(r) = C_1r^2 + C_2/r^2$ for $r > 1$. Imposing the boundary conditions $R(1) = 1$ and $R(+\infty) = 0$, we get $R(r) = 1/r^2$. We thus get the solution $\widetilde{u}(r,\theta) = (\sin 2\theta)/r^2$.

The solution $\widetilde{u}$ is unique.

(ii) This part is left to the reader.

**Exercise 8.** Let us denote by $(r, \theta)$ the polar coordinates in the plane, and set $u(x, y) = \widetilde{u}(r, \theta)$. Solve the equation $D_{xx}u + D_{yy}u = 0$ in the unit disk $\{(r, \theta) : r < 1\}$ with the boundary condition $\widetilde{u}(1, \theta) = g(\theta)$ for any $\theta \in [0, 2\pi]$, for a prescribed $2\pi$-periodic complex function $g$, which is for instance of class $C^1$.

*Solution.* In the Exercise 5 we saw that the general solution of the PDE is $\widetilde{u}(r, \theta) = a_0/2 + \sum_{k\geq 1} r^k(a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)$, which in complex exponential form reads $\widetilde{u}(r, \theta) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k r^{|k|} e^{ik\theta}$.

The function $g$ is representable as a Fourier series: let $\{\hat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-ikt}\, dt\}_{k\in\mathbf{Z}}$ be its spectrum, so that $g(\theta) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \hat{g}_k e^{ik\theta}$ for any $\theta \in [0, 2\pi]$. Thus $\widetilde{u}(1, \cdot) = g$ iff $c_k = \hat{g}_k$ for any $k \in \mathbf{Z}$. In conclusion

$$\widetilde{u}(r, \theta) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \hat{g}_k r^{|k|} e^{ik\theta} = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) r^{|k|} e^{-ik(\theta-t)}\, dt \tag{8.1}$$

The solution $\widetilde{u}$ is unique.

**Exercise 9.** Solve the equation $\Delta u = 0$ on the set $]0, \pi[^2$, with the boundary conditions $u(0, y) = 0$ and $u(\pi, y) = y$ for $0 < y < \pi$, $u(x, 0) = 0$ for $0 < x < \pi$, and $u(x, \pi) = g(x)$ for $0 < x < \pi$, for a prescribed $2\pi$-periodic complex function $g$, which is for instance of class $C^1$.

*Solution. Outline:* The solution $u$ may be represented as $u = u_1 + u_2$, with $\Delta u_1 = \Delta u_2 = 0$, and $u_1$ and $u_2$ fulfilling the following two sets of boundary conditions:

$u_1(0, y) = 0$ and $u_1(\pi, y) = y$ for $0 < y < \pi$, $u_1(x, 0) = 0$ for $0 < x < \pi$;

$u_2(0, y) = u_2(\pi, y) = 0$ for $0 < y < \pi$, $u_2(x, 0) = 0$ for $0 < x < \pi$, and $u_2(x, \pi) = g(x) - u_1(x, \pi)$ for $0 < x < \pi$.

For instance, we may take $u_1(x, y) = xy/\pi$.

The solution $u$ is unique, although there are also other choices of $u_1$.

# 9 Kernels, Summability and Convergence

In this section we outline some results of convergence of Fourier series. For any periodic function $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ that is either continuous or locally integrable (notice that either condition guarantees the existence of the spectrum), we shall see the following issues. Although the formal Fourier series need not converge pointwise (not even a.e.), other trigonometric polynomials with better limit properties may be constructed by taking the *convolution* of $f$ with suitable *kernels*. We shall also introduce the operation of *summation,* and use it to interpret the previous results.

**Periodic convolution.** For any $f, g \in L^1(-\pi, \pi)$, let us identify these functions with their periodic extension to $\mathbf{R}$, and define their periodic convolution as follows

$$(f * g)(t) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t - \tau)g(\tau)\, d\tau \qquad \forall t \in [-\pi, \pi]. \tag{9.1}$$

It is easy to check that

$$f * g \in L^1(-\pi, \pi), \qquad \|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1} \qquad \forall f, g \in L^1(-\pi, \pi). \tag{9.2}$$

Moreover, the convolution is commutative, associative and distributive with respect to addition.

For any $f \in L^1(-\pi,\pi)$, let us define the Fourier coefficients

$$\hat{f}_n := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt \qquad \forall n \in \mathbf{Z}, \forall f \in L^1(-\pi,\pi), \tag{9.3}$$

set $\phi_n(t) = e^{int}$ for any $t \in \mathbf{R}$, and notice that

$$f * \phi_n = 2\pi \hat{f}_n \phi_n \qquad \text{in } ]-\pi,\pi[, \forall n \in \mathbf{N}, \forall f \in L^1(-\pi,\pi). \tag{9.4}$$

**The Dirichlet kernel.** Let us next define the classical *Dirichlet kernel* (here in $[-\pi,\pi]$)

$$D_n(t) := \frac{1}{2\pi}\sum_{|k|\le n} e^{ikt} = \frac{1}{2\pi}\sum_{|k|\le n}\cos(kt) \qquad \forall t \in [-\pi,\pi], \forall n \in \mathbf{N}. \tag{9.5}$$

Setting $y = e^{it}$, we have

$$\begin{aligned} D_n(t) &= \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{k=0}^{n} y^k + \sum_{k=1}^{n} y^{-k}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1-y^{n+1}}{1-y} + \frac{y^{-n}-1}{1-y}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{y^{-n}-y^{n+1}}{1-y} = \frac{1}{2\pi}\frac{y^{-n-1/2}-y^{n+1/2}}{y^{-1/2}-y^{1/2}} \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{\sin[(n+1/2)t]}{\sin(t/2)} \qquad \forall t \in [-\pi,\pi]. \end{aligned} \tag{9.6}$$

Notice that

$$S_{f,n} := \sum_{|k|\le n} \hat{f}_k \phi_k \overset{(9.4)}{=} \frac{1}{2\pi}\sum_{|k|\le n} f * \phi_k = D_n * f \qquad \text{in } [-\pi,\pi], \forall n, \forall f \in L^1(-\pi,\pi). \tag{9.7}$$

The formal Fourier series may thus be represented as follows:

$$S_f := \lim_{n\to\infty} S_{f,n} = \lim_{n\to\infty} D_n * f \qquad \text{in } [-\pi,\pi], \forall f \in L^1(-\pi,\pi). \tag{9.8}$$

We have

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt = 1 \qquad \forall n \in \mathbf{N}, \tag{9.9}$$

$$\forall \delta > 0, \quad \int_{\delta<|t|<\pi} D_n(t)\,dt \to 0 \quad \text{as } n \to \infty; [] \tag{9.10}$$

but unfortunately

$$D_n \not\geq 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}\setminus\{0\}, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\,dt \to +\infty \quad \text{as } n \to \infty.[] \tag{9.11}$$

This divergence is at the basis of the difficulties that are met in studying the pointwise convergence of the Fourier series of continuous functions.

Next we restate the convergence Theorem 3.1 in terms of the Dirichlet kernel.

**Theorem 9.1.** *(of Dirichlet) [] Let $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ be piecewise continuous, periodic of period $2\pi$, and either $f'$ be piecewise continuous or $f$ be piecewise monotone. Then*

$$(D_n * f)(t) \to \frac{1}{2}[f(t-0) + f(t+0)] \qquad \forall t \in \mathbf{R}. \tag{9.12}$$

*If moreover $f$ is continuous, then the convergence is uniform.*

**The Fejér kernel.** Let us next define the classical *Fejér kernel* (here in $[-\pi, \pi]$). This is constructed by averaging the Dirichlet kernels:

$$\begin{aligned} F_n &:= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{|j| \le k} \phi_j \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \le n} \Big(1 - \frac{|k|}{n+1}\Big) \phi_k \qquad \text{in } [-\pi, \pi], \forall n \in \mathbf{N}. \end{aligned} \tag{9.13}$$

It is not difficult to check that

$$F_n(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{n+1} \Big( \frac{\sin[(n+1/2)t]}{\sin(t/2)} \Big)^2 \ge 0 \qquad \forall t \in \,]-\pi, \pi[, \forall n \in \mathbf{N}, [] \tag{9.14}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\, dt = 1 \qquad \forall n \in \mathbf{N}, \tag{9.15}$$

$$\forall \delta > 0, \quad \int_{\delta < |t| < \pi} F_n(t)\, dt \to 0 \quad \text{ as } n \to \infty. [] \tag{9.16}$$

Thus $\int_{-\pi}^{\pi} |F_n(t)|\, dt = 1$ for any $n$, at variance with the Dirichlet kernel. This is at the basis of the next theorem, and of the advantages of using this kernel in order to represent a function via trigonometric functions.

**Remark.** By (9.4) and (9.13),

$$F_n * f = \sum_{|k| \le n} \Big(1 - \frac{|k|}{n+1}\Big) \hat{f}_k \phi_k \ne \sum_{|k| \le n} \hat{f}_k \phi_k = S_{f,n} = D_n * f \qquad \forall f \in L^1(-\pi, \pi). \tag{9.17}$$

For any $n$, $F_n * f$ is obviously a trigonometric polynomial. But, at variance with $\lim_{n\to\infty} D_n * f$, $\lim_{n\to\infty} F_n * f$ is no Fourier series, because of the presence of the factors $\big(1 - \frac{|k|}{n+1}\big)$. This limit is not even a trigonometric series, since one does not pass from $F_n * f$ to $F_{n+1} * f$ just by adding an harmonic of order $n+1$; in this passage, actually the coefficients of all harmonics of lower order are also modified. [15]

**Theorem 9.2.** *(of Fejér) [] If $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ is piecewise continuous and periodic of period $2\pi$, then*

$$(F_n * f)(t) \to \frac{1}{2}[f(t-0) + f(t+0)] \qquad \forall t \in \mathbf{R}. \tag{9.18}$$

*If moreover $f$ is continuous, then the convergence is uniform.*

[15] Therefore one should not speak of Fejér series, but rather of *Fejér sums,* with reference to the notion of *summation* that we introduce ahead.

**Corollary 9.3.** *(Weierstrass theorem for trigonometric polynomials)* [16] *Any periodic continuous function can be uniformly approximated by trigonometric polynomials.*

**The Poisson kernel.** Let us next define the classical *Poisson kernel* (here in $[-\pi, \pi]$)

$$P(r,t) := \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} r^{|n|} e^{int} \qquad \forall r < 1, \forall t \in [-\pi, \pi]. \tag{9.19}$$

This series converges absolutely, because $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \left| r^{|n|} e^{int} \right| \le \sum_{n \in \mathbf{Z}} r^{|n|} < +\infty$ for any $r < 1$. Setting $y = re^{it}$, we have

$$\begin{aligned} P(r,t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} y^n + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (y^*)^n = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{1-y} + \frac{y^*}{1-y^*} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1-|y|^2}{|1-y|^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2} > 0 \qquad \forall r < 1, \forall t \in [-\pi, \pi], \end{aligned} \tag{9.20}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} P(r,t)\, dt = 1 \qquad \forall n \in \mathbf{N}, \tag{9.21}$$

$$\int_{\delta < |t| < \pi} P(r,t)\, dt \to 0 \quad \text{ as } r \to 1^-, \forall \delta > 0.[] \tag{9.22}$$

These properties are at the basis of the Poisson Theorem 9.4 ahead.

In the Exercises we set $u(x,y) = \widetilde{u}(r,\theta)$, and studied the equation $D_{xx}u + D_{yy}u = 0$ in the unit disk $\{(r,\theta) : r < 1\}$ with the boundary condition $\widetilde{u}(1,\cdot) = f$ [17] in $[0, 2\pi]$, for a prescribed $2\pi$-periodic complex function $f$, for instance of class $C^1$. We saw that, denoting the spectrum of $f$ by $\{\hat{f}_k\}$,

$$\widetilde{u}(r,\theta) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \hat{f}_k r^{|k|} e^{ik\theta} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) r^{|k|} e^{ik(\theta - t)}\, dt \qquad \forall r < 1, \forall \theta \in [-\pi, \pi] \tag{9.23}$$

is the unique solution of that boundary-value problem, see (8.1). Notice that

$$\widetilde{u}(r,\cdot) = P(r,\cdot) * f \qquad \text{in } [-\pi, \pi], \forall r < 1; \tag{9.24}$$

by (9.20) we thus get the following classical representation of the solution of the Dirichlet problem for the Lapacian in the disk:

$$\widetilde{u}(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) r^{|k|} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta - t) + r^2}\, dt \qquad \forall r < 1, \forall \theta \in [-\pi, \pi]. \tag{9.25}$$

This integral is often referred to as the *Poisson integral* of $f$.

**Theorem 9.4.** *(of Poisson) [] If $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ is piecewise continuous and periodic of period $2\pi$, then*

$$[P(r,\cdot) * f](t) \to \frac{1}{2}[f(t-0) + f(t+0)] \qquad \text{as } r \to 1^-, \forall t \in \mathbf{R}. \tag{9.26}$$

*If moreover $f$ is continuous, then the convergence is uniform.*

[16] The classical Weierstrass theorem states that any continuous functions defined on a closed real interval can be uniformly approximated by a sequence of polynomials. This may be derived from this corollary.

[17] There this function was labelled $g$...

**Riemann-Lebesgue lemma.** The next result is as famous as its two authors.

**Theorem 9.5.** *(Riemann-Lebesgue lemma)*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}\,dt \to 0 \qquad \text{as } n \to +\infty, \forall f \in L^1(-\pi,\pi). \tag{9.27}$$

*Proof.* The argument may be based on the following properties:
(i) $L^2(-\pi,\pi)$ is dense in $L^1(-\pi,\pi)$;
(ii) the mapping $f \mapsto \{\hat{f}_n\}$ is an isometric isomorphism, by Corollary 6.4;
(iii) for any $\{\hat{f}_n\} \in \ell^2$, $\hat{f}_n \to 0$ as $n \to +\infty$, because of the Bessel inequality (6.9). [Ex] $\square$

The spectrum of any function of $L^1(-\pi,\pi)$ is thus an element of the Banach space $c_0$ of vanishing sequences.

**Proposition 9.6.** *The mapping $f \mapsto \{\hat{f}_n\}$ defines a linear and bounded operator $L^1(-\pi,\pi) \to c_0$.*

*Proof.* This operator is linear and bounded, hence continuous. $\square$

*Exercise.* Does the mapping $f \mapsto \{\hat{f}_n\}$ define a continuous operator $L^p(-\pi,\pi) \to c_0$ for $p \in ]1,\infty]$?

**Remark.** Putting together the Theorems 6.1, 6.4 and 9.6, we get the following picture:

$$\begin{aligned}
&\{c_k\} \mapsto \textstyle\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k e^{ikt} && \text{is a linear and continuous operator } \ell^1 \to C^0([-\pi,\pi)]),\\
&f \mapsto \{c_k(f)\} && \text{is an isometric isomorphism } L^2(-\pi,\pi) \to \ell^2,\\
&f \mapsto \{c_k(f)\} && \text{is a linear and continuous operator } L^1(-\pi,\pi) \to c_0.
\end{aligned} \tag{9.28}$$

**Abel and Cesàro summations.** Next we introduce two notions that are at the basis of the Fejér Theorem 9.2 and of the Poisson Theorem 9.4.

For any complex (unilateral) sequence $\{a_k\}_{k\in\mathbf{N}}$, let us set $s_n = \sum_{k\le n} a_k$ for any $n \in \mathbf{N}$, and consider the limits [18]

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{k\in\mathbf{N}} a_k := \lim_{n\to\infty} s_n \ \big(= \lim_{n\to\infty} \sum_{k\le n} a_k\big) \quad \text{if it exists,}\\
&\textstyle\sum_{k\in\mathbf{N}}^{(C)} a_k := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k\le n} s_k \ \big(= \lim_{n\to\infty} \sum_{k\le n} \big(1 - \frac{k}{n+1}\big) a_k\big) \quad \text{if it exists,}\\
&\textstyle\sum_{k\in\mathbf{N}}^{(A)} a_k := \lim_{r\to 1^-} \ \sum_{k\le n} r^k a_k \quad \text{if it exists.}
\end{aligned} \tag{9.29}$$

$\sum_{k\in\mathbf{N}} a_k$ is the ordinary sum of the series. The limit $\sum_{k\in\mathbf{N}}^{(C)} a_k$ ($\sum_{k\in\mathbf{N}}^{(A)} a_k$, resp.) is called the *Cesàro sum (Abel sum,* resp.) of the series. These procedures are called *summations* of the series, and need not yield the same outcome. If the Cesàro sum (Abel sum, resp.) is finite (equal to $\sigma$, say), then one says that the series $\sum_k a_k$ is *Cesàro summable (Abel summable,* resp.) *to $\sigma$.*

**Theorem 9.7.** *(of summation) [] For any numerical sequence $\{a_k\}$ in $\mathbf{C}$,*

$$\text{if } \textstyle\sum_{k\in\mathbf{N}} a_k \text{ converges, then } \sum_{k\in\mathbf{N}}^{(C)} a_k \text{ converges and } \sum_{k\in\mathbf{N}} = \sum_{k\in\mathbf{N}}^{(C)} a_k; \tag{9.30}$$

$$\text{if } \textstyle\sum_{k\in\mathbf{N}}^{(C)} a_k \text{ converges, then } \sum_{k\in\mathbf{N}}^{(A)} a_k \text{ converges and } \sum_{k\in\mathbf{N}}^{(C)} a_k = \sum_{k\in\mathbf{N}}^{(A)} a_k. \tag{9.31}$$

*The converse implications fail. Moreover, if the terms are either all positive or all negative, then these three notions of summability are equivalent.*

[18] Here the summation index will always range in $\mathbf{N}$.

The Abel summability is thus the weakest of these three notions. Here are some examples:

(i) The series $\sum_{k\in\mathbf{N}}(-1)^k$ does not converge in the ordinary sense. But $\sum^{(C)}_{k\in\mathbf{N}}(-1)^k = 1/2$, since the sequence of the partial sums reads $\{s_n\} = \{1, 0, 1, 0, 1, ...\}$. Hence also $\sum^{(A)}_{k\in\mathbf{N}}(-1)^k = 1/2$.

(ii) By comparison with the integral $\int_1^{+\infty} x^s\,dx$, [19] one sees that $\sum_{k\in\mathbf{N}} k^s$ converges iff $s < -1$ (for the other $s$ this sum diverges to $+\infty$). As $k^s > 0$ for any $k \in \mathbf{N}$, we infer that this series is Cesàro and Abel summable exactly for the same $s$, and that $\sum^{(A)}_{k\in\mathbf{N}} k^s = \sum^{(C)}_{k\in\mathbf{N}} k^s = \sum_{k\in\mathbf{N}} k^s$ for any $s$.

(iii) The series $\sum_{k\in\mathbf{N}}(-1)^k(k+1)$ does not converge in the ordinary sense, but is Abel summable. More precisely $\sum^{(A)}_{k\in\mathbf{N}}(-1)^k(k+1) = 1/4$, since $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)r^k = -\frac{d}{dr}\sum_{k=0}^{\infty}(-r)^{k+1} = -\frac{d}{dr}\sum_{k=-1}^{\infty}(-r)^{k+1} = -\frac{d}{dr}\sum_{h=0}^{\infty}(-r)^h = -\frac{d}{dr}(1+r)^{-1} = (1+r)^{-2}$ for any $r < 1$. On the other hand, the series $\sum_{k\in\mathbf{N}}(-1)^k(k+1)$ is not Cesàro summable, since the sequence of the partial sums diverges.

We illustrated the summation of unilateral series (i.e., indexed by $k \in \mathbf{N}$). However these results are easily extended to bilateral series (i.e., indexed by $k \in \mathbf{Z}$).

Because of the summation theorem, the Fejér Theorem 9.2 entails the Poisson Theorem 9.4. For any $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ continuous and periodic of period $2\pi$, the (formal) Fourier series $\sum_{k\in\mathbf{Z}} \hat{f}_k e^{ikt}$ is thus Abel summable to $f$. This means that the solution $\widetilde{u}(r,t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \hat{f}_k r^{|k|} e^{ikt}$ of the Laplace equation uniformly converges to the boundary datum $f(t)$ as $r \to 1^-$.

By applying these procedures of summation to trigonometric functions, we draw the following conclusion, for any $f : ]-\pi, \pi[ \to \mathbf{C}$:

$\lim_{n\to\infty} D_n * f$ coincides with the ordinary sum of the formal Fourier series (and converges pointwise if $f$ is piecewise $C^1$),

$\lim_{n\to\infty} F_n * f$ coincides with the Cesàro sum of that series (and converges pointwise if $f$ is piecewise $C^0$),

$\lim_{r\to 1^-} P(r,\cdot) * f$ coincides with the Abel sum of that series (and converges pointwise if $f$ is piecewise $C^0$).

[19] More explicitly, it is easily checked that $\sum_{k\geq 1} k^s \leq \int_1^{+\infty} x^s\,dx \leq \sum_{k\geq 0} k^s$ for any $s \in \mathbf{R}$.